Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Introducción a órdenes parciales matriciales

Néstor Thome
Araceli Hernández

www.smm.org.mx

Serie: Cursos. Vol. 4 (2017)

INTRODUCCIÓN A ÓRDENES PARCIALES MATRICIALES

Néstor Thome

Profesor Titular de Universidad

Departamento de Matemática Aplicada

Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar

Universitat Politècnica de València, España

Correo electrónico: njthome@mat.upv.es.

Araceli Hernández

Profesora Adjunta

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de La Pampa, Argentina

Correo electrónico: aracelih@ing.unlpam.edu.ar.

Índice general

Prólogo

Este libro corresponde a las notas de un curso del mismo nombre impartido en la Universidad Nacional de La Pampa de Argentina durante el curso académico 2016.

La intención de estas notas es introducir al lector en temas relacionados con órdenes parciales definidos sobre el anillo de las matrices complejas o sobre alguna subclase especial.

Para ello es necesario un primer capítulo en el que se presentan las nociones básicas de matrices inversas generalizadas. El concepto de matriz inversa generalizada es un concepto básico para definir posteriormente las relaciones binarias que serán relaciones de orden o preorden.

En el segundo capítulo se introducen y caracterizan el preorden espacio, el orden parcial menos y el orden parcial estrella.

Finalmente, en el tercer capítulo se introduce la clase de matrices EP y se estudia el orden parcial estrella sobre esta clase de matrices.

Cada capítulo finaliza con una serie de ejercicios mediante los cuales el lector puede completar los detalles necesarios para entender completamente los resultados expuestos previamente o bien para realizar práctica numérica con ejemplos guiados.

Se trata de unas notas autocontenidas. De hecho, en un Anexo se demuestra un teorema de Análisis Matricial necesario en el Capítulo 3 que no suele encontrarse en los textos habituales. El nivel necesario requerido para poder seguir el temario corresponde al de un alumno que haya estudiado algún curso de Álgebra Lineal o Análisis Matricial.

Los autores agradecen cualquier sugerencia que el lector quiera realizar enviando un correo electrónico.

Los autores.

Tabla de símbolos

$\mathbb{C}^{m\times n}$	espacio de matrices complejas de tamaño $m \times n$.
$\mathbb{C}^{m}$	espacio de matrices complejas de tamaño $m \times 1$.
I_n	matriz identidad de tamaño $n \times n$.
O_n	matriz nula de tamaño $n \times n$.
$\mathbb{C}_r^{m\times n}$	conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ y de rango r.
$\mathcal{N}(A)$	subespacio núcleo de A.
$\mathcal{R}(A)$	subespacio imagen de A.
$\mathrm{rg}(A)$	rango de la matriz A.
$\mathrm{índ}(A)$	índice de A.
A^*	traspuesta conjugada de A.
A^{-1}	inversa de A.
$A^{\#}$	inversa de grupo de A.
$A^{\dagger}$	inversa de Moore-Penrose de A.
A^{D}	inversa de Drazin de A.
A^{π}	proyector correspondiente al valor propio nulo de A.
$\sigma(A)$	espectro o conjunto de valores propios de A.
$P_{M,N}$	proyector ortogonal sobre M paralelamente a N.
$\leq^*$	orden parcial estrella.
$A^{\dagger(M,N)}$	inversa de Moore-Penrose de A ponderada respecto a M y N.
$A^{\circledast(M,N)}$	traspuesta conjugada de A ponderada respecto a M y N.

Capítulo 1

Introducción a matrices inversas generalizadas

La utilidad de la inversa de una matriz para resolver infinidad de problemas prácticos es indiscutible. Sin embargo, no siempre se puede asegurar que la matriz del problema que se pretende resolver tenga inversa. Por ejemplo, al resolver sistemas de ecuaciones lineales, puede darse el caso de que no tenga solución o bien tener infinitas. Esto hace plantearse otras alternativas para obtener una solución al problema en algún sentido que se deberá establecer. En concreto, se trata de buscar otro tipo de inversas que proporcionen la respuesta o que aporten técnicas que permitan resolver el problema inicial.

Se comenzará con las inversas laterales de una matriz que pueden definirse para matrices rectangulares y constituyen un primer tipo de generalización de la inversa ordinaria.

Definición 1.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama* **inversa a izquierda** *(resp.* **derecha***) de A a cualquier matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tal que $XA = I_n$ (resp. $AX = I_m$).*

Ejemplo 1.1 Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 5 & 11 & -8 \\ 5 & 4 & 13 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$BA = I_2 \qquad \text{pero} \qquad AB \neq I_3.$$

Es decir, que B es una inversa a izquierda pero no una inversa a derecha de A.

Se denotará por $\mathcal{G}_I(A)$ y por $\mathcal{G}_D(A)$ al conjunto de todas las inversas a izquierda y a derecha de A, respectivamente.

Puede ocurrir que para una matriz compleja rectangular dada A no exista ninguna matriz X que cumpla $AX = I$ pero sí cumpla la relación más relajada $AXA = A$ o bien $XAX = X$. Pensadas como aplicaciones lineales, $AX = I$ indica que AX se comporta como la identidad sobre todo el espacio mientras que $AXA = A$ indica que AX se comporta como la identidad sobre $\mathcal{R}(A)$ (comprobarlo). Estas observaciones dan origen a dos tipos de inversas generalizadas.

Definición 1.2 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz dada. Se dice que la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es una* **{1}-inversa** *o* **inversa interior** *de A si satisface la ecuación matricial:*

(1) $AXA = A$.

Ejemplo 1.2 Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}.$$

Entonces, su/s $\{1\}$-inversa/s

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix},$$

si existe/n, debe/n cumplir que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que resulta se tiene que

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \\ 1-a & -b \end{bmatrix}, \qquad a,\ b \in \mathbb{C}.$$

Se observa que en este caso existen infinitas $\{1\}$-inversas de A.

Definición 1.3 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz dada. Se dice que la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es una* **$\{2\}$-inversa** *o* **inversa exterior** *de A si satisface la ecuación matricial:*

(2) $XAX = X$.

Ejemplo 1.3 Para la matriz A del ejemplo 1.2 se tiene que las mismas $\{1\}$-inversas halladas también satisfacen la condición de ser $\{2\}$-inversas de A.

Por lo tanto, una matriz puede tener infinitas inversas exteriores.

Se denotará por $\mathcal{G}_1(A)$ y por $\mathcal{G}_2(A)$ al conjunto de todas las $\{1\}$-inversas y $\{2\}$-inversas de A, respectivamente.

Definición 1.4 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz dada. Se dice que la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es la* **inversa de Moore-Penrose** *de A si satisface las cuatro ecuaciones matriciales siguientes:*

(1) $AXA = A$,

(2) $XAX = X$,

(3) $(AX)^* = AX$, *es decir AX es hermítica,*

(4) $(XA)^* = XA$, *es decir XA es hermítica.*

Ejemplo 1.4 Para la matriz A del ejemplo 1.2 se tiene que

$$X = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

satisface las cuatro condiciones de la inversa de Moore-Penrose.

Definición 1.5 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz cuadrada dada. Se dice que la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la* **inversa de grupo** *de A si satisface las tres ecuaciones matriciales siguientes:*

(1) $AXA = A$,

(2) $XAX = X$,

(5) $AX = XA$.

Para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, se recuerda que se llama **índice** de A, se denota por $\text{índ}(A)$, al menor entero no negativo k tal que satisface alguna de las afirmaciones equivalentes:

1. $rg(A^{k+1}) = rg(A^k)$,
2. $\mathcal{R}(A^{k+1}) = \mathcal{R}(A^k)$,
3. $\mathcal{N}(A^{k+1}) = \mathcal{N}(A^k)$.

Definición 1.6 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz cuadrada dada. Se dice que la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la* **inversa de Drazin** *de A si satisface las tres ecuaciones matriciales siguientes:*

(2) $XAX = X$,

(5) $AX = XA$,

(6) $A^{k+1}X = A^k$, *donde* $k = \text{índ}(A)$.

Nota 1.1 *En caso de existir la inversa ordinaria A^{-1} de una matriz cuadrada A, todas las inversas generalizadas que cumplan la propiedad de las inversas interiores coinciden con A^{-1}. Sin embargo, tomando $A = I_2$ y $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ se observa que A es invertible y X es una $\{2\}$-inversa de A con $X \neq I_2$.*

1.1. La inversa generalizada de Moore-Penrose

Se cree que la noción de inversa generalizada de una matriz apareció por primera vez cuando E. H. Moore definió una única inversa para una matriz cualquiera, llamada por él *general reciprocal.* Aunque su primera publicación fue en 1920 parece ser que los resultados se obtuvieron antes. Varios años más tarde, recién en 1955, R. Penrose publicó otra definición para esta misma inversa generalizada. Esta definición es la que hoy se conoce con el nombre de inversa de Moore-Penrose.

Se probará que este tipo de inversa generalizada existe *siempre* y además es *única*. Se comenzará demostrando la unicidad de dicha matriz.

Teorema 1.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Si existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface las cuatro propiedades de la inversa de Moore-Penrose dadas en la definición 1.4 de página 5 entonces dicha matriz es única.*

Demostración. Sean X_1 y X_2 dos matrices de tamaño $n \times m$ que satisfacen las cuatro propiedades en la definición 1.4. Es decir se tiene que:

1. $AX_1A = A$
2. $X_1AX_1 = X_1$
3. $(AX_1)^* = AX_1$
4. $(X_1A)^* = X_1A$
5. $AX_2A = A$
6. $X_2AX_2 = X_2$
7. $(AX_2)^* = AX_2$
8. $(X_2A)^* = X_2A$.

Es necesario probar que $X_1 = X_2$. En efecto, usando las propiedades 2, 5, 4, 8 y 1 resulta que:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1AX_1 = X_1AX_2AX_1 \\ &= (X_1A)^*(X_2A)^*X_1 = A^*X_1^*A^*X_2^*X_1 \\ &= (AX_1A)^*X_2^*X_1 = A^*X_2^*X_1 = (X_2A)^*X_1 \\ &= X_2AX_1. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando las propiedades 6, 7, 1, 3 y 5 resulta que:

$$\begin{aligned} X_2 &= X_2AX_2 = X_2(AX_2)^* = X_2X_2^*A^* = X_2X_2^*(AX_1A)^* \\ &= X_2X_2^*A^*X_1^*A^* = X_2(AX_2)^*(AX_1)^* = X_2AX_2AX_1 \\ &= X_2AX_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_1 = X_2$. ■

En caso de existir la inversa de Moore-Penrose de la matriz A se denotará por $A^\dagger$. Se estudia ahora la existencia de dicha inversa.

Se recuerda que una **matriz** $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ es **de rango completo por columnas** si $r = n$, se dice **de rango completo por filas** si $r = m$, y es **de rango completo** si $r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{mín}\{m, n\}$.

Teorema 1.2 *Sea $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ una matriz rectangular dada. Entonces existen dos matrices M y N tales que $M \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ y $N \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$ que satisfacen:*

$$\boxed{A = MN}.$$

Esta expresión de la matriz A se conoce con el nombre de una **factorización de rango completo** *de A, y se denota por (M, N). En este caso,*

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(M) \qquad \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(N).$$

Demostración. Sea $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ una matriz tal que sus columnas son $a_1^{'}, a_2^{'}, \ldots, a_n^{'}$, es decir

$$A = \begin{bmatrix} a_1^{'} & a_2^{'} & \cdots & a_n^{'} \end{bmatrix}.$$

Como $\mathrm{rg}(A) = r$ podemos suponer que $a_1, a_2, \ldots, a_r$ son las r columnas linealmente independientes de A. Luego, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que

$$a_i^{'} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}\, a_j,$$

y los escalares de esta combinación lineal están unívocamente determinados. Es decir que:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_1^{'} & \cdots & a_n^{'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_{11}a_1 + \cdots + \alpha_{1r}a_r & \ldots & \alpha_{n1}a_1 + \cdots + \alpha_{nr}a_r \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1r} & \cdots & \alpha_{nr} \end{bmatrix}}_{N}. \end{aligned}$$

Como $\{a_1, \ldots, a_r\}$ es linealmente independiente, entonces $\text{rg}(M) = r$ y además como

$$r = \text{rg}(A) = \text{rg}(MN) \leq \text{rg}(N) \leq r$$

entonces $\text{rg}(N) = r$. Por último, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(M)$ y $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(N)$ puesto que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(M)$ y $\mathcal{N}(N) \subseteq \mathcal{N}(A)$ y cada par de subespacios tiene la misma dimensión.

■

Dada una matriz rectangular $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, del teorema 1.2 se puede observar que siempre existen dos matrices $M \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ y $N \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$ tales que $A = MN$ y es claro que existen $(M^*M)^{-1}$ y $(NN^*)^{-1}$.

Teorema 1.3 *Sea $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ y sea $A = MN$ una factorización de rango completo de A. Entonces la inversa de Moore-Penrose de A existe y está dada por:*

$$\boxed{A^\dagger = N^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^*.}$$

Demostración. Llamando

$$X = N^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^*,$$

si se prueba que X satisface las cuatro propiedades de la definición 1.4 entonces usando la unicidad de la inversa de Moore-Penrose, se deduce que $A^\dagger = X$ y el teorema queda probado. En efecto:

$$\begin{aligned} AXA &= MNN^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^*MN \\ &= MN \\ &= A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XAX &= N^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^*MNN^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^* \\ &= N^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^* \\ &= X. \end{aligned}$$

$$(AX)^* = [MNN^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^*]^*$$

$$\begin{aligned}
&= [M(M^*M)^{-1}M^*]^* \\
&= M(M^*M)^{-1}M^* \\
&= MNN^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^* \\
&= AX.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(XA)^* &= [N^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^*MN]^* \\
&= [N^*(NN^*)^{-1}N]^* \\
&= N^*(NN^*)^{-1}N \\
&= N^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^*MN \\
&= XA.
\end{aligned}$$

De esta manera el teorema queda demostrado. ■

Ejemplo 1.5 Considerar la siguiente factorización de rango completo de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{N}.$$

Luego se tiene que:

$$NN^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y así} \quad (NN^*)^{-1} = I_2$$

y

$$M^*M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$(M^*M)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando según se indica en el teorema 1.3 resulta que:

$$A^\dagger = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nota 1.2 *En el ejemplo 1.4 de la página 5 se indicó una matriz X que satisface las cuatro condiciones de la definición de inversa de Moore-Penrose. Ahora sí es posible asegurar que dicha matriz X es la inversa de Moore-Penrose $A^\dagger$ de la matriz A allí indicada.*

Nota 1.3 *El teorema 1.3, además de probar que cualquier matriz rectangular A admite una inversa de Moore-Penrose (que es única por el teorema 1.1), da un método que permite calcularla. Se observa que la inversa de Moore-Penrose de la factorización de rango $A = MN$ también puede escribirse como*

$$A^\dagger = N^\dagger M^\dagger.$$

(Comprobarlo.)

Proposición 1.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $\lambda^\dagger \in \mathbb{C}$ definida por*

$$\lambda^\dagger = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & si\ \lambda \neq 0 \\ 0 & si\ \lambda = 0 \end{cases}$$

entonces la inversa de Moore-Penrose de A satisface las siguientes propiedades:

(a) $(A^\dagger)^\dagger = A$.

(b) $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$.

(c) $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$.

(d) $A^* = A^*AA^\dagger = A^\dagger AA^*$.

(e) $(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^*)^\dagger$.

(f) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$.

(g) *Si* $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es una matriz diagonal siendo* $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *los elementos de su diagonal principal, entonces* $D^\dagger$ *es una matriz diagonal siendo* $d_1^{'}, d_2^{'}, \ldots, d_n^{'}$ *los elementos de su diagonal principal, donde* $d_i^{'} = \dfrac{1}{d_i}$ *si* $d_i \neq 0$ *y* $d_i^{'} = 0$ *si* $d_i = 0$.

(h) $(UAV)^\dagger = V^* A^\dagger U^*$, *siendo* U *y* V *dos matrices unitarias.*

(i) $\mathcal{G}_2(O) = \{O\}$ *(y por tanto* $O_n^\dagger = O_n$*).*

(j) *Si* $m = n$ *y existe la inversa ordinaria* A^{-1} *entonces* $A^\dagger = A^{-1}$.

Demostración. Las demostraciones son técnicas y pueden demostrarse usando la definición de inversa de Moore-Penrose. ■

Utilizando la descomposición en valores singulares de la matriz A y las propiedades (g) y (h) de la proposición anterior es posible hallar la inversa de Moore-Penrose $A^\dagger$.

Teorema 1.4 *Sea* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$. *Entonces existen dos matrices unitarias* $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *y* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *y una matriz diagonal* $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ *tales que*

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{bmatrix} V^*, \tag{1.1}$$

siendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$. *Esta factorización se llama* **descomposición en valores singulares** *de* A*, siendo los números* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ *los* **valores singulares** *de* A *y donde* $r = \operatorname{rg}(A)$.

Demostración. Como A^*A es una matriz hermítica, entonces A^*A es diagonalizable mediante una matriz unitaria V, es decir existe una base $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ formada por vectores propios de A^*A de manera tal que

$$\langle x_i, x_j \rangle = x_i^* x_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Luego, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A^*A se tiene que

$$A^*Ax_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Es posible definir entonces la matriz:

$$V = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, por ser A^*A una matriz hermítica se tiene que todos sus valores propios son reales, i.e.: $\lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n$. Por tanto, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ resulta que:

$$0 \leq ||Ax_i||^2 = x_i^* A^* A x_i = x_i^*(\lambda_i x_i) = \lambda_i x_i^* x_i = \lambda_i \langle x_i, x_i \rangle = \lambda_i. \tag{1.2}$$

Es posible suponer que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > \lambda_{l+1} = \dots = \lambda_n = 0.$$

Se define:

$$\sigma_i := +\sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

e

$$y_i := \frac{1}{\sigma_i} A x_i, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Entonces para cada $i = 1, 2, \dots, l$ resulta que:

$$\langle y_i, y_i \rangle = y_i^* y_i = \frac{1}{\sigma_i}(Ax_i)^* \frac{1}{\sigma_i}(Ax_i) = \frac{1}{\sigma_i{}^2} x_i^* A^* A x_i = \frac{1}{\sigma_i{}^2}||Ax_i||^2 = \frac{1}{\lambda_i}\lambda_i = 1$$

y para $j \neq i$ se tiene que:

$$\langle y_j, y_i \rangle = y_j^* y_i = \frac{1}{\sigma_j}(Ax_j)^* \frac{1}{\sigma_i}(Ax_i) = \frac{1}{\sigma_j \sigma_i} x_j^*(A^* A x_i) = \frac{1}{\sigma_j \sigma_i} x_j^* \lambda_i x_i = 0.$$

Por lo tanto, $\{y_1, y_2, \dots, y_l\}$ es un conjunto ortogonal de vectores de $\mathbb{C}^{m\times 1}$.

En particular, como el conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_l\}$ es linealmente independiente, por el teorema de la base incompleta es posible extenderlos a una base de $\mathbb{C}^{m\times 1}$

$$\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \dots, y_l, y_{l+1}, \dots, y_m\},$$

que además, por el procedimiento de Gram-Schmidt, pueden elegirse tales que:

$$\langle y_i, y_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

para todo $i = 1, 2, \dots, m$, y para todo $j = 1, 2, \dots, m$.

Con estos vectores es posible definir la matriz

$$U := \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix}.$$

Faltan comprobar dos hechos:

(a) $U^*AV = \begin{bmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{bmatrix}$ donde $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ y

(b) $l = r$ $(= \mathrm{rg}(A))$.

En efecto. Primero se prueba (**a**).

$$U^*AV = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_m^* \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^*Ax_1 & y_1^*Ax_2 & \ldots & y_1^*Ax_n \\ y_2^*Ax_1 & y_2^*Ax_2 & \ldots & y_2^*Ax_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_m^*Ax_1 & y_m^*Ax_2 & \ldots & y_m^*Ax_n \end{bmatrix}.$$

Si se llama Σ_1 a esta última matriz, como $Ax_i = \sigma_i y_i$ para $i = 1, 2, \ldots, l$, se tiene que:

$$y_j^*Ax_i = y_j^*\sigma_i y_i = \sigma_i y_j^* y_i = \sigma_i \delta_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, m$.

Además, como se ha visto en (1.2) $\lambda_i = ||Ax_i||^2$ con lo que se tiene que $\lambda_i = 0$ si y sólo si $Ax_i = 0$ y esto ocurre para $i = l+1, \ldots, n$.

Se concluye que para $i = l+1, \ldots, n$ y para todo $j = 1, 2, \ldots, m$ es $y_j^*Ax_i = y_j^*0 = 0$, y finalmente

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

Para demostrar la parte (**b**) se usará (**a**) y el hecho que el rango es invariante por matrices invertibles. En efecto, si

$$A = U\Sigma_1 V^*,$$

siendo U y V matrices unitarias (y por lo tanto invertibles) se tiene que

$$r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(U\Sigma_1 V^*) = \mathrm{rg}(\Sigma_1) = l,$$

como se quería demostrar. ■

Ejemplo 1.6 Una descomposición en valores singulares de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es:

$$A = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right]}_{U} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\Sigma_1} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{V^*}.$$

El siguiente resultado muestra una manera de calcular la inversa de Moore-Penrose de una matriz A a partir de su descomposición en valores singulares.

Teorema 1.5 *Para una descomposición en valores singulares $A = U\Sigma_1 V^*$ de la matriz $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, se tiene que su inversa de Moore-Penrose está dada por*

$$A^\dagger = V\Sigma_1^\dagger U^*,$$

siendo

$$\Sigma_1^\dagger = \begin{bmatrix} \Sigma^\dagger & O \\ O & O \end{bmatrix}, \text{ con } \Sigma^\dagger = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}\right).$$

Demostración. Por la propiedad (h) de la proposición 1.1 se tiene que $A = U\Sigma_1 V^*$ implica $A^\dagger = (U\Sigma_1 V^*)^\dagger = V\Sigma_1^\dagger U^*$. La forma de la matriz $\Sigma_1^\dagger$ se obtiene de la propiedad (g) de la misma proposición. ■

Ejemplo 1.7 Usando la descomposición en valores singulares de la matriz A dada en el ejemplo 1.6, el teorema 1.5 indica que la inversa de Moore-Penrose de A es:

$$A^\dagger = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\Sigma_1^\dagger} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{U^*}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2. Inversa de Moore-Penrose ponderada

Para finalizar, se realizará una extensión de la inversa de Moore-Penrose al caso ponderado.

Para ello, a lo largo de esta sección se asumirá que $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son dos matrices hermíticas definidas positivas donde $M^{1/2}$ y $N^{1/2}$ representan sus respectivas raíces cuadradas.

Definición 1.7 *Sean $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices hermíticas definidas positivas y sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ se llama la **inversa de Moore-Penrose de A ponderada por las matrices M y N** si cumple:*

(1) $AXA = A$,

(2) $XAX = X$,

(3) $(MAX)^* = MAX$, *es decir MAX es hermítica,*

(4) $(NXA)^* = NXA$, *es decir NXA es hermítica.*

Dadas las matrices A, M y N y una solución X, se construyen las matrices

$$\widetilde{A} = M^{1/2}AN^{-1/2} \qquad \text{y} \qquad \widetilde{X} = N^{1/2}XM^{-1/2}.$$

A continuación se demuestra que X es una solución simultánea para las cuatro ecuaciones matriciales de la Definición 1.7 si y sólo si $\widetilde{X}$ es una solución simultánea para las cuatro ecuaciones matriciales de la Definición de inversa de Moore-Penrose de $\widetilde{A}$. En efecto,

(1) $AXA = A \iff (M^{1/2}AN^{-1/2})(N^{1/2}XM^{-1/2})(M^{1/2}AN^{-1/2}) = M^{1/2}AN^{-1/2} \iff \widetilde{A}\widetilde{X}\widetilde{A} = \widetilde{A}$.

(2) $XAX = X \iff (N^{1/2}XM^{-1/2})(M^{1/2}AN^{-1/2})(N^{1/2}XM^{-1/2}) = N^{1/2}XM^{-1/2} \iff \widetilde{X}\widetilde{A}\widetilde{X} = \widetilde{X}$.

(3) $(MAX)^* = MAX \iff [M^{1/2}(M^{1/2}AN^{-1/2})(N^{1/2}XM^{-1/2})M^{1/2}]^* =$
$M^{1/2}(M^{1/2}AN^{-1/2})(N^{1/2}XM^{-1/2})M^{1/2} \iff [M^{1/2}\widetilde{A}\widetilde{X}M^{1/2}]^* =$
$M^{1/2}\widetilde{A}\widetilde{X}M^{1/2} \iff (\widetilde{A}\widetilde{X})^* = \widetilde{A}\widetilde{X}$, pues $M^{1/2}$ es hermítica.

(4) $(NXA)^* = NXA \iff [N^{1/2}(N^{1/2}XM^{-1/2})(M^{1/2}AN^{-1/2})N^{1/2}]^* =$
$N^{1/2}(N^{1/2}XM^{-1/2})(M^{1/2}AN^{-1/2})N^{1/2} \iff [N^{1/2}\widetilde{X}\widetilde{A}N^{1/2}]^* =$
$N^{1/2}\widetilde{X}\widetilde{A}N^{1/2} \iff (\widetilde{X}\widetilde{A})^* = \widetilde{X}\widetilde{A}$, pues $N^{1/2}$ es hermítica.

Es sabido que existe una única $\widetilde{X}$ tal que $\widetilde{X} = \widetilde{A}^\dagger$, es decir $\widetilde{X}$ coincide con la inversa de Moore-Penrose de $\widetilde{A}$ [1]. Entonces la existencia y unicidad conocida para la inversa de Moore-Penrose $\widetilde{X}$ de $\widetilde{A}$ implica la existencia y unicidad para la inversa de Moore-Penrose X de A ponderada por M y N. Se denotará entonces, sin ambigüedad, $X = A^{\dagger_{(M,N)}}$.

Luego, además de haber probado que siempre existe una única matriz X en las condiciones de la Definición 1.7 se tiene la siguiente representación para $A^{\dagger_{(M,N)}}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{X} = \widetilde{A}^\dagger &\iff N^{1/2}XM^{-1/2} = (M^{1/2}AN^{-1/2})^\dagger \\ &\iff X = N^{-1/2}(M^{1/2}AN^{-1/2})^\dagger M^{1/2}. \end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\boxed{A^{\dagger_{(M,N)}} = N^{-1/2}(M^{1/2}AN^{-1/2})^\dagger M^{1/2}}.$$

Se sabe que cuando se resuelve de manera aproximada por mínimos cuadrados un sistema de ecuaciones lineales (inconsistente) del tipo

$$Ax = b \qquad \text{con} \qquad A \in \mathbb{C}^{m\times n} \qquad \text{y} \qquad b \in \mathbb{C}^m,$$

el vector $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ de norma 2 mínima que minimiza la expresión $\|Ax - b\|_2$ está dado por $x = A^\dagger b$.

Teorema 1.6 (Penrose) *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Para cada $b \in \mathbb{C}^m$, de entre todas las soluciones en mínimos cuadrados de $Ax = b$, el vector Xb es la única solución con mínima norma.

[1] No debe confundirse la expresión $\widetilde{A}^\dagger$ que podría escribirse como $(\widetilde{A})^\dagger$ con $\widetilde{A^\dagger}$.

(b) $X = A^{\dagger}$.

Ahora, si en lugar de usar la norma 2, se consideran las normas inducidas por las matrices M y N:

$$\|x\|_M^2 = x^* M x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^{m\times 1},$$

$$\|x\|_N^2 = x^* N x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^{n\times 1},$$

una generalización del problema anterior consiste en resolver de manera aproximada por mínimos cuadrados un sistema de ecuaciones lineales (inconsistente) del tipo $Ax = b$, con $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^{m\times 1}$, considerando que el residuo $Ax - b$ está afectado por distintos pesos dados por la matriz M y de modo que x tenga norma mínima ponderada de acuerdo a los pesos dados por la matriz N. Es decir, se debe minimizar la expresión

$$\|Ax - b\|_M^2 = (Ax - b)^* M (Ax - b)$$

encontrando x tal que $\|x\|_N^2 = x^* N x$ tome el valor más pequeño posible.

Teorema 1.7 *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Para cada $b \in \mathbb{C}^m$, de entre todas las soluciones en mínimos cuadrados (con respecto a la norma inducida por M) de $Ax = b$, el vector Xb es la única solución con norma inducida por N mínima.

(b) $X = A^{\dagger(M,N)}$.

Demostración. El cambio de variables

$$\widetilde{A} = M^{1/2} A N^{-1/2}, \qquad \widetilde{b} = M^{1/2} b \qquad \text{y} \qquad \widetilde{x} = N^{1/2} x$$

permite reescribir

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_M^2 &= (Ax - b)^* M (Ax - b) \\ &= (Ax - b)^* (M^{1/2})^* M^{1/2} (Ax - b) \\ &= [M^{1/2}(Ax - b)]^* M^{1/2} (Ax - b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \|M^{1/2}Ax - M^{1/2}b\|_2^2 \\ &= \|(M^{1/2}AN^{-1/2})(N^{1/2}x) - M^{1/2}b\|_2^2 \\ &= \|\widetilde{A}\widetilde{x} - \widetilde{b}\|_2^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|x\|_N^2 &= x^*Nx \\ &= x^*(N^{1/2})^*N^{1/2}x \\ &= [N^{1/2}x]^*N^{1/2}x \\ &= \|N^{1/2}x\|_2^2 \\ &= \|\widetilde{x}\|_2^2. \end{aligned}$$

Del Teorema 1.6 se tiene que para cada $b \in \mathbb{C}^m$, de entre todas las soluciones en mínimos cuadrados de $\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$, el vector $\widetilde{x} = \widetilde{A}^\dagger\widetilde{b}$ es la única solución con mínima norma, con lo que $N^{1/2}x = (M^{1/2}AN^{-1/2})^\dagger M^{1/2}b$, es decir, $x = N^{-1/2}(M^{1/2}AN^{-1/2})^\dagger M^{1/2}b = A^{\dagger(M,N)}b$ termina la demostración. ∎

A continuación se dan algunas propiedades de la inversa de Moore-Penrose ponderada. Se debe tener en cuenta que la ortogonalidad debe ser considerada en función del producto escalar utilizado en cada caso (euclídeo, inducido por M o inducido por N) y que se define la **matriz traspuesta conjugada de A ponderada con respecto a M y N** como

$$A^{\circledast(M,N)} = N^{-1}A^*M.$$

Lema 1.1 *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y S_m, S_n subespacios de $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$, respectivamente. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) $\mathcal{R}(AA^{\dagger(M,N)}) = \mathcal{R}(A)$ *y* $\mathcal{N}(AA^{\dagger(M,N)}) = \mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)})$.

(b) $\mathcal{R}(A^{\dagger(M,N)}A) = \mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)})$ *y* $\mathcal{N}(A^{\dagger(M,N)}A) = \mathcal{N}(A)$.

(c) $S_m^{\perp_M} = M^{-1/2}(M^{1/2}S_m)^\perp$ *y* $S_n^{\perp_N} = N^{-1/2}(N^{1/2}S_n)^\perp$.

(d) $\mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) = (\mathcal{R}(A))^{\perp_M}$.

(e) $\mathcal{R}(A^{\circledast_{(M,N)}}) = (\mathcal{N}(A))^{\perp_N}$.

(f) $AA^{\dagger_{(M,N)}}$ *es un proyector* M*-ortogonal sobre el espacio* $\mathcal{R}(A)$ *a lo largo del espacio* $\mathcal{N}(A^{\circledast_{(M,N)}})$.

(g) $A^{\dagger_{(M,N)}}A$ *es un proyector* N*-ortogonal sobre el espacio* $\mathcal{R}(A^{\circledast_{(M,N)}})$ *a lo largo del espacio* $\mathcal{N}(A)$.

(h) $$\begin{aligned} \mathbb{C}^m &= M^{1/2}\mathcal{R}(A) \oplus^{\perp} M^{1/2}\mathcal{N}(A^{\circledast_{(M,N)}}) \\ &= M^{1/2}\mathcal{R}(A) \oplus^{\perp} M^{-1/2}\mathcal{N}(A^*). \end{aligned}$$

(i) $$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= N^{1/2}\mathcal{R}(A^{\circledast_{(M,N)}}) \oplus^{\perp} N^{1/2}\mathcal{N}(A) \\ &= N^{-1/2}\mathcal{R}(A^*) \oplus^{\perp} N^{1/2}\mathcal{N}(A). \end{aligned}$$

(j) $\mathcal{R}(A^{\dagger_{(M,N)}}) = \mathcal{R}(A^{\dagger_{(M,N)}}A) = \mathcal{R}(N^{-1}A^*)$ *y*
$\mathcal{R}((A^{\dagger_{(M,N)}})^*) = \mathcal{R}((AA^{\dagger_{(M,N)}})^*) = \mathcal{R}(MA)$.

Demostración. Las demostraciones siguen de las definiciones. ■

1.3. Ejercicios

(1) Calcular la inversa de Moore-Penrose de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mediante

(a) una factorización de rango completo.

(b) una descomposición en valores singulares.

(2) Demostrar que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermítica e idempotente entonces $A^\dagger = A$.

(3) Demostrar que si $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ entonces $D^\dagger = \operatorname{diag}(d_1^\dagger, \ldots, d_n^\dagger)$ donde

$$d_i^\dagger = \begin{cases} 1/d_i & d_i \neq 0 \\ 0 & d_i = 0 \end{cases}.$$

(4) Encontrar un ejemplo que muestre que, en general, no se cumple que

$$\text{Si } B = SAS^{-1} \text{ entonces } B^\dagger = SA^\dagger S^{-1}.$$

(5) Demostrar que si $B = UAV$ con $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarias y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ entonces $B^\dagger = V^* A^\dagger U^*$.

(6) Dada la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de rango $r > 0$, se considera una descomposición de Hartwig-Spindelböck de la forma

$$A = W \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ O & O \end{bmatrix} W^*, \tag{1.3}$$

donde $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz unitaria, $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz diagonal con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ y las dos matrices $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$ y $L \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ son tales que $KK^* + LL^* = I_r$. Se pide:

(a) Probar que

$$A^\dagger = W \begin{bmatrix} K^*\Sigma^{-1} & O \\ L^*\Sigma^{-1} & O \end{bmatrix} W^*.$$

(b) Probar de dos formas diferentes que $AA^\dagger$ y $A^\dagger A$ son proyectores ortogonales (es decir, son matrices hermíticas e idempotentes).

(c) Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de rango $r > 0$ se llama EP si cumple que $AA^\dagger = A^\dagger A$. Se denota por $\oplus^\perp$ la suma directa ortogonal.

Demostrar que:

(I) A es EP si y sólo si existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz invertible $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ tales que

$$A = U \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} U^*.$$

(II) Si A es EP entonces $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$.

(III) Si A es EP entonces $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$.

(IV) A es EP si y sólo si $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus^\perp \mathcal{N}(A)$.

Capítulo 2

Órdenes parciales matriciales

En la literatura se pueden encontrar varias relaciones de orden parcial o de preorden definidas a partir de alguna inversa generalizada. Se recuerda que un preorden sobre un conjunto no vacío es una relación binaria que es reflexiva y transitiva. Si además esta relación cumple la propiedad de antisimetría entonces se denomina relación de orden parcial. En este capítulo se trabajará con el pre-orden espacio definido sobre el conjunto de matrices rectangulares y los órdenes parciales menos y estrella definidos en el mismo conjunto.

En la primera sección se presentará el preorden espacio y se estudiarán algunas propiedades del mismo que involucran inversas generalizadas. Esta relación binaria se considera la base de todas las relaciones de órdenes parciales siguientes, ya que adicionando algunas condiciones a su definición se puede transformar en una relación de orden parcial. El nombre de este preorden se debe a que en su definición se involucran los espacios imagen y núcleo de una matriz.

En las secciones siguientes se estudiará el orden parcial menos en el conjunto de matrices rectangulares y luego, sobre el mismo conjunto, se trabajará con el orden parcial estrella.

2.1. El preorden espacio

Se recuerda que $\mathcal{R}(A)$ denota el espacio imagen de la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Definición 2.1 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se define la relación binaria*

$$A \preceq^s B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B) \quad y \quad \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*).$$

Lema 2.1 *$\preceq^s$ define un preorden sobre $\mathbb{C}^{m\times n}$.*

Demostración. Es inmediata de la definición. ■

El preorden $\preceq^s$ se llama **preorden espacio** puesto que involucra el espacio imagen de matrices en la condición $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ y el espacio núcleo en la condición $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$ por ser equivalente a $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(A)$.

Ejemplo 2.1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \not\preceq^s \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \not\preceq^s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \preceq^s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad y \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \preceq^s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.2 *Sean $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ y $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ dos matrices a coeficientes complejos. Entonces $A \preceq^s B$ si y sólo si $b_i \neq 0$ cuando $a_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$.*

Ejemplo 2.3 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices (hermíticas) definidas no negativas. Entonces*

$$A \preceq^s A + B \qquad y \qquad B \preceq^s A + B.$$

Recordar que $\mathcal{G}_1(A)$ denota el conjunto de todas las $\{1\}$-inversas de A.

Proposición 2.1 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $A \preceq^s B$.

(b) $A = BB^-A = AB^-B$ *para toda* $B^- \in \mathcal{G}_1(A)$.

(c) $A = BB^-A = AB^-B$ *para alguna* $B^- \in \mathcal{G}_1(A)$.

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) Suponiendo que $A \preceq^s B$ se tiene que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$. De la primera inclusión se deduce que $A = BX$ para alguna matriz X (véase ejercicio 1). Multiplicando a izquierda por BB^- se tiene

$$BB^-A = BB^-BX = BX = A, \qquad \text{para toda } B^- \in \mathcal{G}_1(A).$$

De manera semejante, de $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$ se deduce que existe una matriz Y tal que $A^* = B^*Y$, es decir $A = Y^*B$. Multiplicando a derecha por B^-B se tiene

$$AB^-B = Y^*BB^-B = Y^*B = A, \qquad \text{para toda } B^- \in \mathcal{G}_1(A),$$

con lo que se prueba (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c) Es inmediata.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Si existe una matriz $B^- \in \mathcal{G}_1(A)$ tal que $A = BB^-A = AB^-B$ entonces

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(BB^-A) \subseteq \mathcal{R}(B)$$

y

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}((AB^-B)^*) = \mathcal{R}((B^*(B^-)^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*).$$

Por lo tanto, $A \preceq^s B$. ■

Nota 2.1 *Si $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ son tales que $A \preceq^s B$ entonces* $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(B)$ *(véase ejercicio 2).*

Lema 2.2 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Si $A \preceq^s B$ entonces $PAQ \preceq^s PBQ$ para todo par de matrices invertibles $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

Demostración. Se demuestra usando propiedades del espacio imagen de una matriz (véase ejercicio 3). ■

Es claro que:

- Si $A \preceq^s O$ entonces $A = O$.
- $O \preceq^s B$ para toda matriz B.

Teorema 2.1 *Sean* $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *con* $\mathrm{rg}(A) = a$ *y* $\mathrm{rg}(B) = b$*. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $A \preceq^s B$.

(b) Si (B_1, B_2) *es una factorización de rango completo de* B *entonces* $A = B_1 T B_2$ *para alguna matriz* $T \in \mathbb{C}^{b\times b}$.

(c) Si (A_1, A_2) *es una factorización de rango completo de* A *se tiene que:*

- *Si* $a = b$ *entonces* $B = A_1 R A_2$ *para alguna matriz invertible* $R \in \mathbb{C}^{b\times b}$.
- *Si* $a < b$ *entonces existen matrices* $E \in \mathbb{C}^{m\times(b-a)}$ *y* $F \in \mathbb{C}^{(b-a)\times n}$ *y una matriz invertible* $R \in \mathbb{C}^{b\times b}$ *tales que*

$$\begin{bmatrix} A_1 & E \end{bmatrix} \qquad y \qquad \begin{bmatrix} A_2 \\ F \end{bmatrix}$$

tienen rango completo y

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & E \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} A_2 \\ F \end{bmatrix}.$$

para alguna matriz invertible $R \in \mathbb{C}^{b\times b}$.

Demostración. Si $B = O$, por la observación anterior, $A = O$ y corresponde a un caso irrelevante. Sea entonces $B \neq O$.

(a) $\Longrightarrow$ (b) El resultado es evidente para $A = O$ (tomando $T = O$). Sea entonces $A \neq O$ y sea (A_1, A_2) una factorización de rango completo de A, es decir, $A = A_1 A_2$ con $A_1 \in \mathbb{C}^{m\times a}$, $A_2 \in \mathbb{C}^{a\times n}$ y $\mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_2) = a$. Sea $B = B_1 B_2$ con $B_1 \in \mathbb{C}^{m\times b}$, $B_2 \in \mathbb{C}^{b\times n}$ y $\mathrm{rg}(B_1) = \mathrm{rg}(B_2) = b$.

Como $A \preceq^s B$ entonces $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$. Luego,

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_1 A_2) \subseteq \mathcal{R}(A_1)$$

y por ser $\mathrm{rg}(A_1) = a$ se tiene que $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_1)$. Del mismo modo, $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B_1)$. Además, de

$$\mathcal{R}(A_1) = \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B_1)$$

se tiene que existe una matriz $T_1 \in \mathbb{C}^{b\times a}$ tal que $A_1 = B_1 T_1$.

También, por ser (A_2^*, A_1^*) una factorización de rango completo de A^* y (B_2^*, B_1^*) una factorización de rango completo de B^*, se obtiene

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A_2^*) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(B_2^*).$$

Así, de

$$\mathcal{R}(A_2^*) = \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(B_2^*)$$

se tiene que existe una matriz $T_2 \in \mathbb{C}^{a\times b}$ tal que $A_2^* = B_2^* T_2^*$. Por lo tanto, $A_2 = T_2 B_2$ y

$$A = A_1 A_2 = B_1(T_1 T_2) B_2,$$

lo que prueba (b) tomando $T = T_1 T_2 \in \mathbb{C}^{b\times b}$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) El resultado es evidente para $A = O$. Sea entonces $A \neq O$. Sea (B_1, B_2) una factorización (fija) de rango completo de B. Por (b), $A = B_1 T B_2$ para alguna matriz $T \in \mathbb{C}^{b\times b}$. Luego,

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B_1 T B_2) \subseteq \mathcal{R}(B_1) = \mathcal{R}(B).$$

De forma análoga,

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(B_2^* T^* B_1^*) \subseteq \mathcal{R}(B_2^*) = \mathcal{R}(B^*).$$

Se tiene entonces que $A \preceq^s B$.

(a) $\Longrightarrow$ (c) La condición (c) carece de sentido para el caso $A = O$. Sea entonces $A \neq O$. Se supone que $A \preceq^s B$ y sean (A_1, A_2) una factorización (fija) de rango completo de A y (B_1, B_2) una factorización de rango completo de B que se deberá determinar. Como antes,

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_1),\ \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A_2^*),\ \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B_1) \ \text{ y } \ \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(B_2^*).$$

De $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ se tiene $\mathcal{R}(A_1) \subseteq \mathcal{R}(B_1)$, de donde $A_1 = B_1 T_1$ para alguna matriz $T_1 \in \mathbb{C}^{b\times a}$. También, de $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$ se tiene $\mathcal{R}(A_2^*) \subseteq \mathcal{R}(B_2^*)$, de donde $A_2 = T_2 B_2$ para alguna matriz $T_2 \in \mathbb{C}^{a\times b}$. Ahora se analizan dos situaciones:

- $a = b$. En este caso, $\mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_2) = \mathrm{rg}(B_1) = \mathrm{rg}(B_2)$ y

$$a = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B_1 T_1) \leq \mathrm{rg}(T_1) \leq a,$$

de donde T_1 es invertible. De forma similar, T_2 es invertible. Por lo tanto,

$$B = B_1B_2 = A_1T_1^{-1}T_2^{-1}A_2,$$

con lo que $B = A_1RA_2$ para la matriz invertible $R = T_1^{-1}T_2^{-1} \in \mathbb{C}^{a\times a}$.

- $a < b$. En este caso, como $A \preceq^s B$, se tiene que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ y existe alguna columna de B que no es combinación lineal de las columnas de A.

  Como $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_1)$, existe una matriz $E \in \mathbb{C}^{m\times(b-a)}$ (con rango columna completo) tal que las columnas de $\begin{bmatrix} A_1 & E \end{bmatrix}$ forman una base de $\mathcal{R}(B)$.

  Como $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A_2^*)$, existe una matriz $F^* \in \mathbb{C}^{n\times(b-a)}$ (con rango columna completo) tal que las columnas de $\begin{bmatrix} A_2^* & F^* \end{bmatrix}$ forman una base de $\mathcal{R}(B^*)$, es decir, F tiene rango completo por filas y las filas de $\begin{bmatrix} A_2 \\ F \end{bmatrix}$ forman una base del espacio fila de B.

  Por ser

  $$\mathcal{R}(B_1) = \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A_1 & E \end{bmatrix}\right),$$

  se puede escribir $B_1 = \begin{bmatrix} A_1 & E \end{bmatrix} R_1$, para alguna matriz invertible $R_1 \in \mathbb{C}^{b\times b}$. Análogamente, de

  $$\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A_2^* & F^* \end{bmatrix}\right) = \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(B_2^*)$$

  se puede escribir $B_2 = R_2 \begin{bmatrix} A_2 \\ F \end{bmatrix}$, para alguna matriz invertible $R_2 \in \mathbb{C}^{b\times b}$. Por lo tanto,

  $$B = B_1B_2 = \begin{bmatrix} A_1 & E \end{bmatrix} R_1R_2 \begin{bmatrix} A_2 \\ F \end{bmatrix},$$

  y se obtiene la representación buscada tomando la matriz invertible $R = R_1R_2 \in \mathbb{C}^{b\times b}$.

(c) $\implies$ (a) De nuevo, la condición (c) carece de sentido para el caso $A = O$. Sea entonces $A \neq O$ y sea (A_1, A_2) una factorización (fija) de rango completo de A. Entonces $A = A_1A_2$ con A, A_1 y A_2 de rango a y $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_1)$. Por (c),

- si $a = b$ entonces $B = A_1 R A_2$ para alguna matriz invertible $R \in \mathbb{C}^{a\times a}$. En este caso, $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A_1) = \mathcal{R}(A)$ y de $a = b$ se tiene $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A)$. También, $\mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(A_2^* R^* A_1^*) \subseteq \mathcal{R}(A_2^*) = \mathcal{R}(A^*)$ y por tanto $\mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(A^*)$ dado que $a = b$. Se llega a $A \preceq^s B$.

- si $a < b$ entonces
$$B = \begin{bmatrix} A_1 & E \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} A_2 \\ F \end{bmatrix},$$
donde las matrices por bloques tienen rango completo. En este caso, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_1) \subseteq \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A_1 & E \end{bmatrix}\right) = \mathcal{R}(B)$ (¿Por qué es válida la última igualdad?). De forma similar, $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A_2^*) \subseteq \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A_2^* & F^* \end{bmatrix}\right) = \mathcal{R}(B^*)$. De nuevo, se llega a $A \preceq^s B$.

$\blacksquare$

Corolario 2.1 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $\mathrm{rg}(A) = a$ y $\mathrm{rg}(B) = b > 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $A \preceq^s B$.

(b) Si existen matrices invertibles $P_B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q_B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que
$$B = P_B \begin{bmatrix} I_b & O \\ O & O \end{bmatrix} Q_B$$
entonces
$$A = P_B \begin{bmatrix} T_A & O \\ O & O \end{bmatrix} Q_B$$
para alguna matriz $T_A \in \mathbb{C}^{b\times b}$.

(c) Si
$$A = P_A \begin{bmatrix} I_a & O & O \\ O & O_{b-a} & O \\ O & O & O \end{bmatrix} Q_A$$

para matrices invertibles $P_A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ entonces si $b \geq a$ se tiene que

$$B = P_A \begin{bmatrix} T_B & O \\ O & O \end{bmatrix} Q_A$$

para alguna matriz invertible $T_A \in \mathbb{C}^{b\times b}$.

Demostración. Es un ejercicio sencillo. ■

2.2. El orden parcial menos

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Puesto que $B = A + (B - A)$, se cumple que

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A + (B - A)) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B - A),$$

con lo que siempre es válida la desigualdad

$$\mathrm{rg}(B - A) \geq \mathrm{rg}(B) - \mathrm{rg}(A).$$

La cuestión a estudiar en esta sección es cuándo se verifica la igualdad.

Nota 2.2 *Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tiene rango completo por columnas entonces admite inversa a izquierda y si tiene rango completo por filas admite inversa a derecha. (Si $\mathrm{rg}(A) = n$, basta probar que A^*A es invertible y usar $(A^*A)^{-1}A^*$ como candidata a inversa a izquierda.)*

Lema 2.3 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dos matrices no nulas. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) AC^-B es invariante bajo la elección de $C^- \in \mathcal{G}_1(C)$, es decir, de la $\{1\}$-inversa C^- de C.

(b) $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(C)$ y $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(C^*)$.

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) Por hipótesis se supone que el producto AC^-B es invariante bajo la elección de la $\{1\}$-inversa C^- de C. Ahora se supone, por el absurdo, que $\mathcal{R}(B) \nsubseteq \mathcal{R}(C)$. Entonces para cualquier $\{1\}$-inversa C^- de C, la matriz

$$D := (I - CC^-)B \neq O,$$

pues si fuese $D = O$ sería $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{N}(I - CC^-) = \mathcal{R}(CC^-) \subseteq \mathcal{R}(C)$, y esto es una contradicción.

Fijando una matriz C^-, se tiene que D (que depende C^-) también está fija. Sean (A_1, A_2) y (D_1, D_2) factorizaciones de rango completo de A y de D, respectivamente y sea

$$C^= := C^- + (A_2)^{(D)}(D_1)^{(I)}(I - CC^-)$$

donde $(A_2)^{(D)}$ es una inversa a derecha de A_2 y $(D_1)^{(I)}$ es una inversa a izquierda de D_1. Entonces $C^=$ es una $\{1\}$-inversa de C (verificarlo) y

$$AC^=B = AC^-B + A(A_2)^{(D)}(D_1)^{(I)}\underbrace{(I - CC^-)B}_{=D} = AC^-B + A_1D_2.$$

Como A_1 admite inversa a izquierda, se tiene que $A_1D_2 \neq O$ (comprobarlo), lo que lleva a una contradicción (¿por qué?). Por lo tanto, $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(C)$. De forma análoga se prueba que $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(C^*)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) De $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(C)$ se tiene que $B = CX$ para alguna matriz X y de $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(C^*)$ que $A = YC$ para alguna matriz Y. Luego,

$$AC^-B = YCC^-CX = YCX,$$

para cualquier elección de la $\{1\}$-inversa C^- de C. ■

Antes de proceder con caracterizaciones del orden parcial menos, serán de utilidad los siguientes resultados.

Proposición 2.2 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y sea $B^- \in \mathcal{G}_1(B)$ una $\{1\}$-inversa fija de B tal que $BB^-A = AB^-B = AB^-A = A$. Entonces existe una $\{1,2\}$-inversa $B^=$ de B tal que $BB^=A = AB^=B = AB^=A = A$.*

Demostración. Por hipótesis, $BB^-A = AB^-B = AB^-A = A$ para $B^- \in \mathcal{G}_1(B)$. Sea $B^= := B^-BB^-$. Es fácil probar que

$$BB^=B = B \qquad \text{y} \qquad B^=BB^= = B^=,$$

y además que

$$BB^=A = AB^=B = AB^=A = A.$$

■

Proposición 2.3 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y sea $A^- \in \mathcal{G}_1(A)$ una $\{1\}$-inversa fija de A tal que $AA^-B = BA^-A = A$. Entonces existe una $\{1,2\}$-inversa $A^=$ de A tal que $AA^=B = BA^=A = A$.*

Demostración. Es similar a la de la Proposición 2.2. ∎

Teorema 2.2 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dos matrices distintas no nulas de rangos a y b, respectivamente. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B - A)$.

(b) $\mathcal{G}_1(B) \subseteq \mathcal{G}_1(A)$.

(c) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B - A) = \{0\}$ *y* $\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}((B - A)^*) = \{0\}$.

(d) $BB^-A = AB^-B = AB^-A = A$ *para toda* $B^- \in \mathcal{G}_1(B)$.

(e) existe una matriz $A^- \in \mathcal{G}_1(A)$ tal que $A^-A = A^-B$ y $AA^- = BA^-$.

(f) existe una matriz $A^- \in \mathcal{G}_1(A)$ tal que $AA^-B = BA^-A = A$.

(g) Existen matrices invertibles $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$A = P\begin{bmatrix} I_a & O \\ O & O \end{bmatrix}Q \qquad y \qquad B - A = P\begin{bmatrix} O & O \\ O & Y \end{bmatrix}Q$$

para alguna matriz $Y \in \mathbb{C}^{(m-a)\times(n-a)}$.

Demostración. Al ser $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dos matrices distintas no nulas se evitan los casos triviales (pero en estos casos también es cierto el resultado).

Sean (A_1, A_2) y (D_1, D_2) dos factorizaciones de rango completo de A y de la diferencia $B - A$, respectivamente. Es conocido que:

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_1) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}(B - A) = \mathcal{R}(D_1). \tag{2.1}$$

Así, si d denota el rango de $B - A$, se tiene que

$$B = A + (B - A) = A_1A_2 + D_1D_2 = \begin{bmatrix} A_1 & D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

con

$$\begin{bmatrix} A_1 & D_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times(a+d)} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} A_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(a+d)\times n}.$$

<u>(a) $\Longrightarrow$ (b) y (d)</u> Si se supone que $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B - A) = a + d$, se tiene que (2.2) es una factorización de rango completo de B puesto que

$$a + d = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} A_1 & D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 \\ D_2 \end{bmatrix}\right) \le \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} A_1 & D_1 \end{bmatrix}\right) \le a + d,$$

y de forma semejante

$$\mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} A_2 \\ D_2 \end{bmatrix}\right) = a + d.$$

Por otro lado es conocido que $BB^-B = B$ para cualquier $B^- \in \mathcal{G}_1(B)$. Luego,

$$\begin{bmatrix} A_1 & D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 \\ D_2 \end{bmatrix} B^- \begin{bmatrix} A_1 & D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 \\ D_2 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $\begin{bmatrix} A_1 & D_1 \end{bmatrix}$ admite inversa a izquierda y $\begin{bmatrix} A_2 \\ D_2 \end{bmatrix}$ admite inversa a derecha, la igualdad anterior se puede simplificar, quedando

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ D_2 \end{bmatrix} B^- \begin{bmatrix} A_1 & D_1 \end{bmatrix} = I_{a+d}$$

y, multiplicando por bloques,

$$\begin{bmatrix} A_2B^-A_1 & A_2B^-D_1 \\ D_2B^-A_1 & D_2B^-D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a & O \\ O & I_d \end{bmatrix}$$

e igualando se tiene

$$A_2B^-A_1 = I_a, \qquad A_2B^-D_1 = O, \qquad D_2B^-A_1 = O, \qquad D_2B^-D_1 = I_d.$$

Multiplicando la primera igualdad a izquierda por A_1 y a derecha por A_2 se llega a

$$AB^-A = A_1A_2B^-A_1A_2 = A_1A_2 = A,$$

es decir $B^- \in \mathcal{G}_1(A)$, que es (b). Procediendo de la misma forma con las otras igualdades se llega a:

$$AB^-(B - A) = O, \qquad (B - A)B^-A = O, \qquad (B - A)B^-(B - A) = B - A.$$

Operando se llega a las tres igualdades de (d).

(b) $\Longrightarrow$ (c) Por hipótesis, para cada $B^- \in \mathcal{G}_1(B)$ se tiene que $AB^-A = A$, es decir AB^-A es invariante para cualquier elección de $B^- \in \mathcal{G}_1(B)$. Del Lema 2.3 se deduce que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$. Se tiene entonces garantizada la existencia de una matriz X tal que $A = XB$. Así,

$$AB^-B = XBB^-B = XB = A.$$

Se debe probar que $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B - A) = \{0\}$. Sea $y \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B - A)$. Entonces $y = Ax = (B - A)z$ para algunos vectores x y z. Entonces

$$y = Ax = AB^-(Ax) = AB^-(B - A)z = AB^-Bz - AB^-Az = Az - Az = 0.$$

De forma similar se prueba que $\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}((B - A)^*) = \{0\}$.

(d) $\Longrightarrow$ (b) Es inmediato.

(d) $\Longrightarrow$ (e) Por hipótesis, para cada $B^- \in \mathcal{G}_1(B)$ se tiene que $BB^-A = AB^-B = AB^-A = A$.

Como $A^- := B^-AB^-$ también es una $\{1\}$-inversa de A (comprobarlo), de $AB^-(B - A) = O$ se cumple que

$$A^-(B - A) = B^-AB^-(B - A) = O,$$

es decir, $A^-A = A^-B$ con $A^- \in \mathcal{G}_1(A)$. Similarmente, de $(B - A)B^-A = O$ se llega a

$$(B - A)A^- = (B - A)B^-AB^- = O,$$

es decir, $AA^- = BA^-$. Por lo tanto, se ha demostrado (e).

(e) $\Longrightarrow$ (f) Es inmediato.

(f) $\Longrightarrow$ (e) Sea $A^- \in \mathcal{G}_1(A)$ una matriz tal que $AA^-B = BA^-A = A$. La Proposición 2.3 asegura que existe una $\{1,2\}$-inversa $A^=$ de A tal que $AA^=B = BA^=A = A$. Luego, multiplicando $AA^=B = A$ a izquierda por $A^=$ se tiene $A^=A = A^=B$ y multiplicando a derecha $BA^=A = A$ por $A^=$ se llega a $AA^= = BA^=$. Luego, se cumple (e).

(f) $\Longrightarrow$ (c) Sea $y \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B - A)$. Entonces $y = Ax = (B - A)z$ para algunos vectores x y z. Sea $A^- \in A\{1\}$ una matriz fija tal que $AA^-B = BA^-A = A$. Luego,

$$y = Ax = AA^-(Ax) = AA^-(B - A)z = AA^-Bz - AA^-Az = Az - Az = 0,$$

de donde se tiene que $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B-A) = \{0\}$. De forma semejante se demuestra que $\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}((B-A)^*) = \{0\}$.

(c) $\Longrightarrow$ (g) Siempre es posible (¿por qué?) considerar una factorización de la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rango $a > 0$ dada por su forma normal de rango a partir de

$$A = P_A \begin{bmatrix} I_a & O \\ O & O \end{bmatrix} Q_A,$$

donde $P_A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son invertibles.

Sea $B - A = P_A Z Q_A$, con Z a determinar. Es claro que las condiciones de la hipótesis pueden reescribirse como (comprobarlo):

$$\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B-A) = \{0\} \iff \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} I_a & O \\ O & O \end{bmatrix}\right) \cap \mathcal{R}(Z) = \{0\} \tag{2.3}$$

y que

$$\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}((B-A)^*) = \{0\} \iff \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} I_a & O \\ O & O \end{bmatrix}\right) \cap \mathcal{R}(Z^*) = \{0\}. \tag{2.4}$$

Ahora se considera una factorización de rango completo de la matriz Z, de rango $z > 0$, dada por

$$Z = Z_1 Z_2 = \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix},$$

donde las particiones se realizan de acuerdo a los tamaños de (2.3) y (2.4), es decir con

$$Z_{11} \in \mathbb{C}^{a\times z},\ Z_{12} \in \mathbb{C}^{(m-a)\times z},\ Z_{21} \in \mathbb{C}^{z\times a} \ \text{ y } \ Z_{22} \in \mathbb{C}^{z\times (n-a)}.$$

En esta situación se tiene que $\mathcal{R}(Z) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \end{bmatrix}\right)$.

Ahora se probará que $\mathrm{rg}(Z_{12}) = z$. En efecto, si fuese $\mathrm{rg}(Z_{12}) < z$, como $\dim(\mathcal{N}(Z_{12})) + \dim(\mathcal{R}(Z_{12})) = z$, se tendría que $\mathcal{N}(Z_{12}) \neq \{0\}$. Sea entonces $x \neq 0$ tal que $Z_{12}x = 0$. Luego,

$$\begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} Z_{11}x \\ Z_{12}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} I_a & O \\ O & O \end{bmatrix}\right) \cap \mathcal{R}(Z) = \{0\}.$$

Por lo tanto, $Z_{11}x = 0$ con lo que $Z_1 x = 0$ para algún $x \neq 0$. Esto implica que $\mathcal{N}(Z_1) \neq \{0\}$ lo que contradice que $\mathrm{rg}(Z_1) = z$ por el teorema de la dimensión. Se ha probado entonces que $\mathrm{rg}(Z_{12}) = z$.

Observando ahora que tanto la matriz $\begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times z}$ como la submatriz Z_{12} tienen rango z, las filas de Z_{11} deben ser combinación lineal de las filas de Z_{12}. Luego, debe existir una matriz M tal que $Z_{11} = MZ_{12}$.

De forma semejante se demuestra que $Z_{21} = Z_{22}N$ para alguna matriz N. Luego,

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 Z_2 \\ &= \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} MZ_{12} \\ Z_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{22}N & Z_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} MZ_{12}Z_{22}N & MZ_{12}Z_{22} \\ Z_{12}Z_{22}N & Z_{12}Z_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para eliminar las dependencias lineales en los bloques fila y columna de Z y llegar así a la forma canónica requerida es necesario utilizar matrices elementales por filas y columnas. Considerando para ello

$$P := P_A \begin{bmatrix} I_a & M \\ O & I \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad Q := \begin{bmatrix} I_a & O \\ N & I \end{bmatrix} Q_A$$

es fácil comprobar (hacerlo como ejercicio) que

$$A = P \begin{bmatrix} I_a & O \\ O & O \end{bmatrix} Q \qquad \text{y} \qquad B - A = P \begin{bmatrix} O & O \\ O & Y \end{bmatrix} Q.$$

(g) $\Longrightarrow$ (a) Si

$$A = P \begin{bmatrix} I_a & O \\ O & O \end{bmatrix} Q \qquad \text{y} \qquad B - A = P \begin{bmatrix} O & O \\ O & Y \end{bmatrix} Q$$

con $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibles se tiene que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(I_a) = a \qquad \text{y} \qquad \mathrm{rg}(B - A) = \mathrm{rg}(Y).$$

Como

$$B = A + (B - A) = P \begin{bmatrix} I_a & O \\ O & Y \end{bmatrix} Q,$$

entonces $\mathrm{rg}(B) = a + \mathrm{rg}(Y) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B - A)$. ■

Definición 2.2 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que $A \leq^- B$ si existe una $\{1\}$-inversa A^- de A tal que*

$$A^-A = A^-B \qquad y \qquad AA^- = BA^-.$$

Es evidente que cualquiera de las condiciones del Teorema 2.2 sirve para realizar la definición anterior por ser todas ellas equivalentes.

Ejemplo 2.4 *Es fácil comprobar que $A \leq^- B$ para las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

utilizando todas las condiciones equivalentes del teorema que las caracteriza.

Se recuerda que un orden parcial sobre un conjunto (no vacío) es una relación binaria que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Teorema 2.3 *La relación binaria $\leq^-$ define un orden parcial sobre $\mathbb{C}^{m\times n}$.*

Demostración. La reflexividad es una consecuencia directa de la condición (a) del Teorema 2.2 (que, como se ha indicado, es trivialmente válido para matrices A y B iguales).

Para probar la antisimetría se supone que $A \leq^- B$ y que $B \leq^- A$ para dos matrices $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Por la condición (a) del Teorema 2.2 se tiene que

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B - A) \geq \mathrm{rg}(A)$$

y

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) + \mathrm{rg}(A - B) \geq \mathrm{rg}(B).$$

Luego, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ con lo que $\mathrm{rg}(A - B) = 0$, es decir, $A = B$.

La transitividad es una consecuencia directa de la condición (b) del Teorema 2.2. ■

El orden parcial definido por la relación binaria $\leq^-$ se denomina **orden parcial menos**.

2.3. El orden parcial estrella

Si en la definición de orden parcial menos, en lugar de utilizar una $\{1\}$-inversa generalizada de A, se utiliza su inversa de Moore-Penrose, es posible considerar otra relación binaria. Sin embargo, por cuestiones de sencillez en las demostraciones, se dará la siguiente definición.

Definición 2.3 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se define la relación binaria*

$$A \leq^* B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^*A = A^*B \qquad y \qquad AA^* = BA^*.$$

Ejemplo 2.5 *Es fácil comprobar que $A \leq^* B$ para las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lema 2.4 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Si $A \leq^* B$ entonces $UAV \leq^* UBV$ para todo par de matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

Demostración. Comprobarlo. ■

Lema 2.5 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces:*

(a) $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*)$.

(b) $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^*)$.

Demostración. Se deduce utilizando las propiedades (d) y (f) de la inversa de Moore-Penrose demostradas en la Proposición 1.1. ■

El siguiente resultado da caracterizaciones para la relación binaria $\leq^*$. En parte de la demostración se utiliza la siguiente propiedad:

$$AB = O \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{N}(A),$$

para cualquier par de matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$.

Teorema 2.4 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $A \leq^* B$.

(b) $A^\dagger A = A^\dagger B$ *y* $AA^\dagger = BA^\dagger$.

(c) $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{R}(B - A)$ *y* $\mathcal{R}(A^*) \perp \mathcal{R}((B - A)^*)$.

(d) Existen matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$A = U \begin{bmatrix} D_a & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} V \qquad y \qquad B = U \begin{bmatrix} D_a & O & O \\ O & D_{b-a} & O \\ O & O & O \end{bmatrix} V,$$

donde $D_a \in \mathbb{C}^{a\times a}$ y $D_{b-a} \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ son matrices diagonales definidas positivas.

Demostración. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) Se cumple que $A^*A = A^*B$ y $AA^* = BA^*$ si y sólo si

$$A^*(B - A) = O \qquad \text{y} \qquad (B - A)A^* = O.$$

Aplicando el Lema 2.5 se tiene que

$$A^*(B - A) = O \Longleftrightarrow \mathcal{R}(B - A) \subseteq \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A^\dagger) \Longleftrightarrow A^\dagger(B - A) = O$$

y

$$(B - A)A^* = O \Longleftrightarrow \mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(B - A) \Longleftrightarrow (B - A)A^\dagger = O.$$

Por lo tanto, $A^*A = A^*B$ y $AA^* = BA^*$ es equivalente a $A^\dagger A = A^\dagger B$ y $AA^\dagger = BA^\dagger$.

(a) $\Longleftrightarrow$ (c) Se deduce de la propiedad $M^*N = O \Longleftrightarrow \mathcal{R}(M) \perp \mathcal{R}(N)$.

(a) $\Longrightarrow$ (d) Si $A^*A = A^*B$ y $AA^* = BA^*$ es claro que A^*B y BA^* son matrices hermíticas y definidas no negativas. Por el teorema 3 del Apéndice, existen matrices unitarias $U_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$A = U_1 D_1 V_1 \qquad \text{y} \qquad B = U_1 D_2 V_1$$

donde D_1 y D_2 son matrices diagonales con elementos no negativos en la diagonal (es decir, D_1 y D_2 sólo tienen elementos no nulos en algunas de sus posiciones (i,i) aunque no son necesariamente matrices cuadradas). Por el Lema 2.4, $D_1 \leq^* D_2$. Es posible demostrar (véanse ejercicios) que existen dos matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$A = UD_3V \qquad \text{y} \qquad B = UD_4V$$

donde $D_3 = \operatorname{diag}(D_a, O, O)$ y $D_4 = \operatorname{diag}(D_a, D_{b-a}, O)$ donde $D_a \in \mathbb{C}^{a\times a}$ y $D_{b-a} \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$, lo que demuestra (d).

(d) $\Longrightarrow$ (a) Es una sencilla comprobación. ■

El siguiente resultado muestra la relación existente entre las tres relaciones binarias definidas.

Teorema 2.5 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces*

$$A \leq^* B \qquad \Longrightarrow \qquad A \leq^- B \qquad \Longrightarrow \qquad A \preceq^s B.$$

Demostración. Si se cumple $A \leq^* B$, por el Teorema 2.4 se tiene $A^\dagger A = A^\dagger B$ y $AA^\dagger = BA^\dagger$. Tomando $A^- = A^\dagger$ se tiene $A^-A = A^-B$ y $AA^- = BA^-$ con $A^- \in \mathcal{G}_1(A)$. Luego, $A \leq^- B$.

Si $A \leq^- B$ entonces el Teorema 2.2 asegura que $AB^-A = A$ para toda $B^- \in \mathcal{G}_1(B)$. Luego, AB^-A es invariante bajo la elección de $B^- \in \mathcal{G}_1(B)$. El Lema 2.3 permite afirmar que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$ (si bien en ese Lema se descartan los casos triviales, también son válidas estas inclusiones para esos casos). Por lo tanto, $A \preceq^s B$. ■

Las recíprocas de las implicaciones anteriores no son ciertas. La primera se puede comprobar con las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la segunda con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.6 *La relación binaria $\leq^*$ define un orden parcial sobre $\mathbb{C}^{m\times n}$.*

Demostración. La reflexividad es evidente.

Si $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ son tales que $A \leq^* B$ y $B \leq^* A$, el Teorema 2.5 asegura que $A \leq^- B$ y $B \leq^- A$. Puesto que $\leq^-$ es un orden parcial, $A = B$, con lo que se prueba la antisimetría.

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $A \leq^* B$ y $B \leq^* C$. Por el Teorema 2.4 se tiene que

$$A = U \begin{bmatrix} D_a & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} V \qquad \text{y} \qquad B = U \begin{bmatrix} D_a & O & O \\ O & D_{b-a} & O \\ O & O & O \end{bmatrix} V,$$

con D_a y D_{b-a} matrices diagonales definidas positivas. Sea

$$C = U \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} V,$$

particionada de modo que las multiplicaciones implicadas puedan realizarse. Usando que $B \leq^* C$, y realizando las multiplicaciones de la definición, se llega a

$$C = U \begin{bmatrix} D_a & O & O \\ O & D_{b-a} & O \\ O & O & C_{33} \end{bmatrix} V.$$

Ahora es fácil comprobar que $A \leq^* C$. Por lo tanto, $\leq^*$ es transitiva.

■

El orden parcial definido por la relación binaria $\leq^*$ se denomina **orden parcial estrella**. Ahora queda clara la relación entre el nombre del orden parcial en relación a la inversa generalizada utilizada (véase Teorema 2.4).

2.4. Ejercicios

(1) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Si $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ demostrar que existe una matriz $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = BC$. ¿Es cierta la recíproca?

(2) Demostrar que si $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ son tales que $A \preceq^s B$ entonces $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(B)$. ¿Es posible encontrar un par de matrices distintas $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $A \preceq^s B$ y $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$? Justificar.

(3) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Demostrar que $A \preceq^s B$ implica $PAQ \preceq^s PBQ$ para todo par de matrices invertibles $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(4) Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz de rango $a > 0$. Demostrar que si (A_1, A_2) es una factorización de rango completo de A entonces (A_2^*, A_1^*) es una factorización de rango completo de A^*.

(5) Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Encontrar todas las matrices $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tales que $A \preceq^s B$.

(6) Hallar $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ tales que
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \preceq^s \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = B.$$

(7) Sea
$$A = \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} W,$$
con $W \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ una matriz unitaria. Hallar todas las matrices $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tales que $A \preceq^s B$.

(8) Sea $A \in \mathbb{C}_a^{m\times n}$, $a > 0$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) (A_1, A_2) es una factorización de rango completo de A.

(b) Existen matrices invertibles $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$A = P \begin{bmatrix} I_a & O \\ O & O \end{bmatrix} Q.$$

(9) (a) ¿Cuáles son todas las matrices $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tales que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \leq^- B?$$

(b) Demostrar que si $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ son tales que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ y cumplen la desigualdad $A \leq^- B$ entonces $A = B$.

(c) A partir de los apartados anteriores conjeturar qué otras matrices serán elementos maximales en $\mathbb{C}^{n\times n}$.

(10) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos proyectores. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $B - A$ es un proyector.

(b) $AB = BA = A$.

(c) $\mathrm{rg}(B - A) = \mathrm{rg}(B) - \mathrm{rg}(A)$, es decir $A \leq^- B$.

(d) $A \preceq^s B$.

(11) Sean $D_1, D_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices diagonales

$$D_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad D_2 = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

tales que $D_1 \leq^* D_2$. Demostrar que:

(a) Si $\beta_i = 0$ para algún i entonces $\alpha_i = 0$.

(b) Si $\alpha_i \neq 0$ para algún i entonces $\beta_i = \alpha_i$.

Concluir que si D_1 tiene todos sus elementos no nulos en las primeras posiciones diagonales y D_2 tiene todos sus elementos nulos en las últimas posiciones diagonales entonces D_1 y D_2 tienen la siguiente forma:

$$D_1 = \mathrm{diag}(D_3, O, O) \qquad \text{y} \qquad D_2 = \mathrm{diag}(D_3, D_4, O),$$

donde D_3 y D_4 son matrices diagonales con elementos no nulos en su diagonal.

(12) Sean $U_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $V_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ dos matrices unitarias y $D_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz con elementos no negativos en la diagonal principal de forma que

$$A = U_1 D_1 V_1.$$

Demostrar que existen dos matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y una matriz diagonal por bloques $D \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $D = \operatorname{diag}(\Sigma, O)$ con Σ diagonal con todos sus elementos positivos y

$$A = UDV.$$

(13) Comprobar que $A \leq^* B$ para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

utilizando todas las condiciones equivalentes del teorema que las caracteriza.

(14) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Demostrar que

(a) $A \leq^* B \Longrightarrow A^* \leq^* B^*$.

(b) $A \leq^* B \Longrightarrow B - A \leq^* B$.

¿Son válidas las implicaciones recíprocas?

Capítulo 3

Orden parcial estrella y matrices EP

3.1. Introducción

Uno de los resultados fundamentales del Álgebra Lineal es el Teorema de Descomposición Ortogonal, el cual asegura que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ proporciona una descomposición para cada uno de los espacios $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$ como suma directa de subespacios complementarios y ortogonales:

$$\mathbb{C}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*) \quad \text{y} \quad \mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A).$$

De aquí puede verse que dada una matriz A existe un único proyector ortogonal $P_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A^*)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ que proyecta sobre $\mathcal{R}(A)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A^*)$, así como también existe un único proyector ortogonal $Q_{\mathcal{R}(A^*),\mathcal{N}(A)} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que proyecta sobre $\mathcal{R}(A^*)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A)$.

Las matrices cuadradas $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ cuyos proyectores $P_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A^*)}$ y $Q_{\mathcal{R}(A^*),\mathcal{N}(A)}$ coinciden se denominan matrices EP, abreviación de *Equal Projectors*. Recordando que para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la matriz $AA^\dagger$ es un proyector ortogonal sobre $\mathcal{R}(A)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A^*)$, y $A^\dagger A$ proyecta sobre $\mathcal{R}(A^*)$ paralelamente a $\mathcal{N}(A)$, se tiene que A es EP si $AA^\dagger = A^\dagger A$. Este tipo de matrices satisface que $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$ y es por ello que algunos autores también las llaman RPN, *Range Perpendicular to Nullspace* [12].

Definición 3.1 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es EP si se satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

(EP1) $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$.

(EP2) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$.

(EP3) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$.

(EP4) $A = O$ *o existe una matriz unitaria* $U_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y una matriz no singular* $C_A \in \mathbb{C}^{a\times a}$ *tales que*

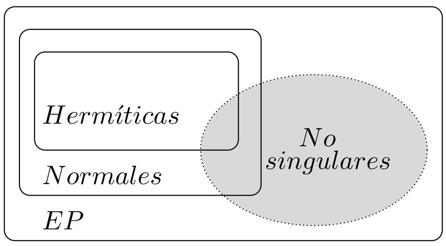
$$A = U_A(C_A \oplus O)U_A^*.$$

(EP5) $AA^\dagger = A^\dagger A$.

Cabe aclarar que en (EP4) los bloques nulos que aparecen pueden estar ausentes. Notar también que una matriz no nula $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es EP si y sólo si existe una matriz unitaria $V_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz no singular $C_A \in \mathbb{C}^{a\times a}$ tales que $A = V_A(O \oplus C_A)V_A^*$.

Estas son sólo algunas de las condiciones equivalentes que permiten caracterizar las matrices EP y pueden encontrarse en la literatura.

Con $\mathcal{EP}$ se denota el conjunto de todas las matrices cuadradas complejas EP de tamaño $n \times n$. Este conjunto extiende al conjunto de matrices normales (por lo tanto al de hermíticas también) y al conjunto las matrices no singulares.



En la figura anterior se puede ver que toda matriz normal es EP pero la afirmación recíproca no es verdadera como lo muestra la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(comprobarlo).

En la sección que sigue se presentan algunas propiedades y descomposiciones de matrices EP que serán utilizadas más adelante.

3.2. Propiedades de las matrices EP

Como se mencionó en la sección anterior, si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices EP no nulas, de rangos a y b respectivamente, se puede asumir que ellas están dadas como

$$A = U_A(C_A \oplus O)U_A^* \tag{3.1}$$

y

$$B = U_B(C_B \oplus O)U_B^* \tag{3.2}$$

donde $U_A, U_B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias y $C_A \in \mathbb{C}^{a\times a}$, $C_B \in \mathbb{C}^{b\times b}$ son no singulares. Cabe aclarar que si las matrices A o B son no singulares, esto es, $a = n$ o $b = n$, entonces el bloque nulo está ausente. Generalmente estos casos no se consideran en las demostraciones de este capítulo.

Los primeros resultados de esta sección muestran algunas propiedades que satisfacen las matrices EP. En particular, el primer teorema caracteriza a las matrices que conmutan con una matriz EP dada.

Teorema 3.1 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A es una matriz EP no nula representada como en* (3.1)*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $AB = BA$.

(b) *Existen matrices $X \in \mathbb{C}^{a\times a}$ y $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ tales que $B = U_A(X \oplus T)U_A^*$, con $C_AX = XC_A$.*

Demostración. Se considera la siguiente descomposición de B:

$$B = U_A \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*$$

donde la partición ha sido realizada de acuerdo al tamaño de los bloques de A. La igualdad $AB = BA$ es equivalente a

$$\begin{pmatrix} C_AX & C_AY \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XC_A & O \\ ZC_A & O \end{pmatrix},$$

que a su vez equivale a $C_AX = XC_A$, $Y = O$ y $Z = O$. ■

Cuando ambas matrices A y B son EP se obtiene el siguiente resultado sobre su conmutatividad.

Teorema 3.2 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices EP no nulas expresadas como en* (3.1) *y* (3.2)*, respectivamente. Si $U_A^*U_B = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, con $X \in \mathbb{C}^{a\times b}$, $Y \in \mathbb{C}^{a\times(n-b)}$, $Z \in \mathbb{C}^{(n-a)\times b}$ y $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-b)}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $AB = BA$.

(b) $(X^*C_AX)\,C_B = C_B\,(X^*C_AX)$, $X^*C_AY = O$, $Y^*C_AX = O$.

(c) $C_A(XC_BX^*) = (XC_BX^*)C_A$, $ZC_BX^* = O$, $XC_BZ^* = O$.

Demostración. (a) $\Leftrightarrow$ (b) Sustituyendo las respectivas descomposiciones de A y B en (a) y reemplazando $U_A^*U_B$ por

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

se obtiene $U_A(C_AXC_B \oplus O)U_B^* = U_B(C_BX^*C_A \oplus O)U_A^*$. Multiplicando a izquierda por U_B^* y a derecha por U_B ambos miembros de la igualdad y reemplazando nuevamente $U_A^*U_B$ por su descomposición en bloques se tiene

$$\begin{pmatrix} X^*C_AXC_B & O \\ Y^*C_AXC_B & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_BX^*C_AX & C_BX^*C_AY \\ O & O \end{pmatrix},$$

que es equivalente a

$$X^*C_AXC_B = C_BX^*C_AX,\ X^*C_AY = O \text{ y } Y^*C_AX = O$$

por ser C_A y C_B matrices no singulares.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) Sustituyendo $U_B = U_A \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ en la descomposición de B se obtiene

$$B = U_A \begin{pmatrix} XC_BX^* & XC_BZ^* \\ ZC_BX^* & ZC_BZ^* \end{pmatrix} U_A^*.$$

Reemplazando en $AB = BA$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} C_AXC_BX^* & C_AXC_BZ^* \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XC_BX^*C_A & O \\ ZC_BX^*C_A & O \end{pmatrix}$$

que es claramente equivalente a la condición (c). ■

Teorema 3.3 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no nula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A es EP (expresada como en (3.1)).*

(b) *Existen una matriz no singular $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ y una matriz arbitraria $Z \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ tales que $A = A^*Q$, donde*

$$Q = U_A \begin{pmatrix} (C_A^*)^{-1}C_A & O \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*.$$

(c) *Existen una matriz no singular $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ y una matriz arbitraria $Z \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ tales que $A = A^\dagger Q$, donde*

$$Q = U_A \begin{pmatrix} C_A^2 & O \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*.$$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Como A es una matriz EP, por (EP2) existe una matriz no singular $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = A^*Q$. Se considera la siguiente descomposición de Q:

$$Q = U_A \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*,$$

donde la partición se realiza de acuerdo al tamaño de los bloques de A. Reemplazando en $A = A^*Q$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} C_A^*X & C_A^*Y \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_A & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

es decir, $X = (C_A^*)^{-1}C_A$ e $Y = O$. Luego

$$Q = U_A \begin{pmatrix} (C_A^*)^{-1}C_A & O \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*.$$

La no singularidad de T se deriva de la no singularidad de Q.

(b) $\Rightarrow$ (a) Si existe una matriz no singular Q tal que $A = A^*Q$ entonces A y A^* son equivalentes por columnas, esto es, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$, por lo tanto A es EP por (EP2).

(a) $\Leftrightarrow$ (c) La demostración es similar a la prueba de la equivalencia anterior teniendo en cuenta que $\mathcal{R}(A^{\dagger}) = \mathcal{R}(A^*)$. ■

El siguiente resultado es similar al del Teorema 3.3 y se puede demostrar en forma análoga al mismo.

Teorema 3.4 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no nula. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A es EP (expresada como en (3.1)).*

(b) *Existen una matriz no singular $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ y una matriz arbitraria $Y \in \mathbb{C}^{a\times(n-a)}$ tales que $A = PA^*$, donde*

$$P = U_A \begin{pmatrix} C_A(C_A^*)^{-1} & Y \\ O & T \end{pmatrix} U_A^*.$$

(c) *Existen una matriz no singular $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ y una matriz arbitraria $Y \in \mathbb{C}^{a\times(n-a)}$ tales que $A = PA^{\dagger}$, donde*

$$P = U_A \begin{pmatrix} C_A^2 & Y \\ O & T \end{pmatrix} U_A^*$$

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema 3.3 considerando que A y B son equivalentes por filas si y sólo si $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$ y usando la propiedad $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A^{\dagger})$. ■

3.3. Orden parcial estrella en el conjunto de matrices EP

En la primera parte de esta sección se muestran algunas caracterizaciones del orden parcial estrella sobre el conjunto de matrices EP. Recordar que dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se tiene que $A \leq^* B$ si y sólo si se satisface alguna de las siguientes afirmaciones equivalentes:

(OE1) $A^*A = A^*B$ y $AA^* = BA^*$.

(OE2) $A^\dagger A = A^\dagger B$ y $AA^\dagger = BA^\dagger$.

(OE3) $A^\dagger A = B^\dagger A$ y $AA^\dagger = AB^\dagger$.

(Demostrar la equivalencia con la última afirmación). En este caso, las matrices A^*B, BA^*, $A^\dagger B$ y $BA^\dagger$ son hermíticas. Además, si $B = O$ entonces $A = O$.

En el resto de esta sección se caracterizan los predecesores y sucesores de una matriz EP dada y se muestran descomposiciones de dichas matrices cuando ambas son EP.

De los Teoremas 3.3 y 3.4 se deriva la siguiente observación.

Observación 3.1 Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A es una matriz EP no nula y $A \leq^* B$. Entonces existen matrices no singulares $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que las siguientes afirmaciones son válidas:

(a) $A^*(A^*Q - B) = O$.

(b) $(A^*Q - B)A^* = O$.

(c) $A^*(PA^* - B) = O$.

(d) $(PA^* - B)A^* = O$.

Notar que bajo las mismas hipótesis los apartados (a)-(d) también se satisfacen si se reemplaza $*$ por $\dagger$.

En el siguiente resultado se caracterizan los predecesores de una matriz EP considerando el orden parcial estrella.

Teorema 3.5 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que B es una matriz EP no nula. Si B se representa como en* (3.2) *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^* B$.

(b) *Existe $X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tal que*
$$A = U_B(X \oplus O)U_B^*, \tag{3.3}$$
con $X \leq^* C_B$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $B = U_B(C_B \oplus O)U_B^*$, donde $U_B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria, $C_B \in \mathbb{C}^{b\times b}$ es no singular y se considera la siguiente descomposición de A:

$$A = U_B \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} U_B^*$$

donde la partición se ha realizado conforme al tamaño de los bloques de B. Entonces

$$A^*A = U_B \begin{pmatrix} X^*X + Z^*Z & X^*Y + Z^*T \\ Y^*X + T^*Z & Y^*Y + T^*T \end{pmatrix} U_B^*$$

y

$$A^*B = U_B \begin{pmatrix} X^*C_B & O \\ Y^*C_B & O \end{pmatrix} U_B^*.$$

La igualdad $A^*A = A^*B$ es equivalente a la validez de las siguientes cuatro condiciones $X^*X + Z^*Z = X^*C_B$, $X^*Y + Z^*T = O$, $Y^*X + T^*Z = Y^*C_B$ e $Y^*Y + T^*T = O$. La última igualdad puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} Y \\ T \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} Y \\ T \end{pmatrix} = O$$

que es equivalente a $\begin{pmatrix} Y & T \end{pmatrix} = O$, es decir, $Y = O$ y $T = O$. Realizando un cálculo similar, de $AA^* = BA^*$ se obtiene $XX^* = C_BX^*$ y $Z = O$. Por lo tanto, $A = U_B(X \oplus O)U_B^*$ con $X \leq^* C_B$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se puede demostrar fácilmente realizando los productos correspondientes. ■

En general, si B es una matriz EP y $A \leq^* B$, entonces A no es necesariamente una matriz EP (ver los ejercicios).

El siguiente resultado caracteriza los predecesores EP de una matriz EP dada.

Teorema 3.6 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que B es una matriz EP no nula y $A \leq^* B$. Bajo las descomposiciones de A y B dadas en* (3.3) *y* (3.2)*, respectivamente, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A es una matriz EP.*

(b) $XC_B = C_BX$.

(c) $X^\dagger C_B = C_BX^\dagger$.

(d) $X(X^* - C_B) = C_B(X^* - X)$.

(e) $(X^* - C_B)X = (X^* - X)C_B$.

(f) X *es una matriz* EP.

Demostración. Considerando B expresada como en (3.2), por el Teorema 3.5, existe $X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tal que $A = U_B(X \oplus O)U_B^*$, con $X \leq^* C_B$.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) Como $A \leq^* B$, por (OE3) y (EP5) se tiene que A es EP si y sólo si A y $B^\dagger$ conmutan. Así, reemplazando las respectivas descomposiciones de A y B en $AB^\dagger = B^\dagger A$, usando que U_B es unitaria y que $C_B^\dagger = C_B^{-1}$, se obtiene que $XC_B = C_BX$.

De forma similar, las equivalencias (a) $\Leftrightarrow$ (c), (b) $\Leftrightarrow$ (d), (b) $\Leftrightarrow$ (e) y (c) $\Leftrightarrow$ (f) se pueden demostrar usando (OE1) y (OE2). ■

Observación 3.2 Si se satisface alguna de las afirmaciones equivalentes (a)-(f) del Teorema 3.6, entonces:

$$X = XC_BX^\dagger \quad \text{y} \quad X^* = X^*C_BX^\dagger = C_B^*XX^\dagger = C_B^*X^\dagger C_B = C_B^*C_BX^\dagger.$$

Corolario 3.1 *Sean* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tales que* B *es una matriz* EP *y* $A \leq^* B$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) A *es una matriz* EP.

(b) $AB = BA$.

(c) $A(A^* - B) = B(A^* - A)$.

(d) $(A^* - B)A = (A^* - A)B$.

El siguiente teorema muestra un resultado similar al del Teorema 3.5, pero ahora cuando el predecesor es una matriz EP.

Teorema 3.7 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A es una matriz EP no nula expresada como en* (3.1)*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^* B$.

(b) *Existe $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ tal que*

$$B = U_A(C_A \oplus T)U_A^*. \tag{3.4}$$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Se considera $A = U_A(C_A \oplus O)U_A^*$ como en (3.1) y la siguiente descomposición de B:

$$B = U_A \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*$$

donde la partición se realiza de acuerdo al tamaño de los bloques de A.
Reemplazando las respectivas descomposiciones de A y B en $AA^* = BA^*$ y $A^*A = A^*B$ se obtiene que $X = C_A$, $Y = O$ y $Z = O$. Es decir, $B = U_A(C_A \oplus T)U_A^*$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Utilizando las descomposiciones mencionadas para A y B y realizando los cálculos correspondientes se puede comprobar que $AA^* = BA^*$ y $A^*A = A^*B$. ■

De forma similar a lo expresado anteriormente, si A es una matriz EP y $A \leq^* B$, entonces B no necesariamente es EP (ver los ejercicios).

En el siguiente teorema se caracterizan los sucesores EP de una matriz EP dada.

Teorema 3.8 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no nulas tales que $A \leq^* B$, A es una matriz EP representada como en* (3.1) *y se considera a B expresada como en* (3.4)*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *B es una matriz EP.*

(b) *T es una matriz EP.*

(c) $B(A^\dagger - B^\dagger) = (A^\dagger - B^\dagger)B$.

(d) $B^\dagger(A - B) = (A - B)B^\dagger$.

Demostración. Recordar que si $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $T \in \mathbb{C}^{s\times s}$ y $U, V \in \mathbb{C}^{(n+s)\times(n+s)}$, con U y V matrices unitarias, entonces

$$(U(W \oplus T)V)^{\dagger} = V^{*}(W^{\dagger} \oplus T^{\dagger})U^{*}. \tag{3.5}$$

Sean $A = U_A(C_A \oplus O)U_A^{*}$ y $B = U_A(C_A \oplus T)U_A^{*}$ como en (3.1) y (3.4), respectivamente.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) Utilizando la propiedad 3.5 se tiene que $B^{\dagger} = U_A(C_A^{-1} \oplus T^{\dagger})U_A^{*}$. Por (EP5), B es una matriz EP si y sólo si T también es EP.

(a) $\Rightarrow$ (c) Usando (OE2) y (EP5) se obtiene $B(A^{\dagger} - B^{\dagger}) = BA^{\dagger} - BB^{\dagger} = A^{\dagger}B - B^{\dagger}B = (A^{\dagger} - B^{\dagger})B$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Como $A \leq^{*} B$ y A es una matriz EP, por (OE2) resulta que $A^{\dagger}$ y B conmutan, entonces de (c) se obtiene $BB^{\dagger} = B^{\dagger}B$, esto es, B es una matriz EP.

(a) $\Leftrightarrow$ (d) Como $A \leq^{*} B$ y A es una matriz EP, por (OE3) resulta que A y $B^{\dagger}$ conmutan. Luego, usando (EP5) se obtiene que el apartado (d) es equivalente a la condición $BB^{\dagger} = B^{\dagger}B$. ■

Observación 3.3 Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $AB = BA$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $A \leq^{*} B$.

(b) $A(A^{*} - B) = B(A^{*} - A)$ y $(A^{*} - B)A = (A^{*} - A)B$.

Observación 3.4 Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A \leq^{*} B$ y A es una matriz EP. Por el Teorema 3.1 se obtiene que A y B conmutan (verificarlo). De esta manera, se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $A(A^{*} - B) = B(A^{*} - A)$.

(b) $(A^{*} - B)A = (A^{*} - A)B$.

(c) $BA^{\dagger} = A^{\dagger}A$.

(d) $A(A^{\dagger} - B^{\dagger}) = (A^{\dagger} - B^{\dagger})A$.

(e) $A^{\dagger}(A - B) = (A - B)A^{\dagger}$.

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.1 de Merikoski y Liu dado en [13].

Teorema 3.9 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices EP no nulas. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^* B$.

(b) *Existe una matriz unitaria $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$A = V(C \oplus O \oplus O)V^*, \quad B = V(C \oplus T \oplus O)V^*,$$

donde $C \in \mathbb{C}^{a\times a}$ es no singular y $T \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ es no singular o no está presente.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) Sea $B = U_B(C_B \oplus O)U_B^*$ como en (3.2). Por el Teorema 3.5, existe $X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tal que $A = U_B(X \oplus O)U_B^*$ con $X \leq^* C_B$. Como A es no nula es claro que X también lo es. Por el Teorema 3.6, X es una matriz EP, entonces se puede considerar $X = U_X(C_X \oplus O)U_X^*$, donde $U_X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ es unitaria y $C_X \in \mathbb{C}^{a\times a}$ es una matriz no singular. Como $X \leq^* C_B$, por el Teorema 3.7 existe $T \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ tal que $C_B = U_X(C_X \oplus T)U_X^*$. Por lo tanto, T es una matriz no singular cuando $b > a$. Tomando $C = C_X$, se obtiene $B = V(C \oplus T \oplus O)V^*$, donde $V = U_B(U_X \oplus I)$ es una matriz unitaria. Mediante un cálculo similar se obtiene $A = V(C \oplus O \oplus O)V^*$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se puede demostrar fácilmente que se satisface (OE2). ■

Observación 3.5 Cuando el Teorema 3.9 se restringe a matrices normales (respectivamente, hermíticas), los bloques C y T son matrices normales (respectivamente, hermíticas), obteniéndose de esta manera los resultados de Merikoski y Liu de [13].

3.4. Proyector espectral asociado al valor propio nulo de matrices EP

Se recuerda que el índice de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, denotado por $\text{índ}(A)$, es el menor entero no negativo k tal que satisface alguna de las afirmaciones equivalentes: $rg(A^{k+1}) = rg(A^k)$, $\mathcal{R}(A^{k+1}) = \mathcal{R}(A^k)$, o $\mathcal{N}(A^{k+1}) = \mathcal{N}(A^k)$. Las matrices no singulares tienen índice igual a cero y la matriz nula tiene índice igual a uno.

Se sabe que para toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^n$ de índice k, los subespacios $\mathcal{R}(A^k)$ y $\mathcal{N}(A^k)$ son complementarios. El proyector espectral correspondiente al valor propio nulo, A^π, es la única matriz idempotente que verifica

$$\mathcal{R}(A^\pi) = N(A^k) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(A^\pi) = R(A^k).$$

Como AA^D es un proyector tal que $\mathcal{R}(AA^D) = \mathcal{R}(A^k)$ y $\mathcal{N}(AA^D) = \mathcal{N}(A^k)$ entonces se tiene que $I - AA^D = A^\pi$. En particular, si la matriz A es EP entonces A^π se puede calcular reemplazando la inversa de Drazin por la inversa de grupo o la inversa de Moore-Penrose: $A^\pi = I - AA^\# = I - AA^\dagger$.

Recordar que para toda matriz $A \in \mathbb{C}^n$ de índice k, la inversa de Drazin, A^D, es la única matriz que satisface las condiciones $A^DAA^D = A^D$, $AA^D = A^DA$ y $A^{k+1}A^D = A^k$. En particular, si A tiene índice a lo sumo 1, la inversa de Drazin coincide con la inversa de grupo de A, denotada por $A^\#$, que es la única matriz que satisface $AA^\#A = A$, $A^\#AA^\# = A^\#$ y $AA^\# = A^\#A$.

El propósito de esta sección es comenzar a estudiar el proyector espectral correspondiente al valor propio nulo de una matriz EP y su relación con el orden parcial estrella.

En el siguiente lema se listan algunos resultados conocidos en la literatura necesarios para lo que sigue.

Lema 3.1 [5, 4] *Sea $A \in \mathbb{C}^n$, $\text{índ}(A) \leq 1$. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

(a) A^π *es idempotente.*

(b) $AA^\pi = A^\pi A = A^\# A^\pi = A^\pi A^\# = O$.

(c) $A^{\pi} = O$ *si y sólo si* A *es no singular.*

(d) *Si* $\text{índ}(A) = 1$ *y* $\text{rg}(A) = a > 0$ *entonces existen matrices no singulares* $C \in \mathbb{C}^{a\times a}$ *y* $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tales que*

$$A = P(C \oplus O)P^{-1}. \tag{3.6}$$

En este caso, $A^{\#} = P(C^{-1} \oplus O)P^{-1}$ *y* $A^{\pi} = P(O \oplus I_{n-a})P^{-1}$.

(e) *Si* A^{π} *es no singular entonces* $A = O$. *Recíprocamente, si* $A = O$ *entonces* $A^{\pi} = I_n$.

(f) A^{π} *tiene índice a lo sumo* 1.

(g) $(A^{\pi})^{\pi} = O$ *si y sólo si* $A = O$.

(h) $\text{rg}(A^{\pi}) = n - \text{rg}(A)$.

Sea $\mathcal{EP}$ el conjunto de todas las matrices cuadradas complejas EP de tamaño $n \times n$. Se sabe que si $A \in \mathcal{EP}$ entonces $\text{índ}(A) \leq 1$.

Lema 3.2 *Sea* $A \in \mathbb{C}^n$, $\text{índ}(A) \leq 1$.

(a) *Si* $A \in \mathcal{EP}$ *entonces* A^{π} *es hermítica.*

(b) *Si* $A^{\pi} \in \mathcal{EP}$ *entonces* $A \in \mathcal{EP}$.

Demostración. (a) Sigue directamente de la propiedad $(AA^{\dagger})^* = AA^{\dagger}$.

(b) Por el apartado (c) del Lema 3.1, si $A^{\pi} = O$ entonces A es no singular, por lo tanto, $A \in \mathcal{EP}$. Si A^{π} es una matriz EP no nula, por (EP4) existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz no singular $C \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ tales que $A^{\pi} = U(C \oplus O)U^*$. Como A^{π} es idempotente, se obtiene $C^2 = C$, esto es $C = I_{n-a}$. De $A^{\#}A = AA^{\#} = I_n - A^{\pi}$ se tiene que $AA^{\#} = U(O \oplus I_a)U^*$. Considerando la siguiente descomposición de A:

$$A = U \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} U^*,$$

donde las particiones se han realizado conforme al tamaño de los bloques de A^{π}, de $A = (AA^{\#})A$ se obtiene $X = O$, $Y = O$. De forma similar, de $A = A(A^{\#}A)$ se obtiene $Z = O$. Por lo tanto $A = U(O \oplus T)U^*$ y así $AA^{\#} = U(O \oplus TT^{\#})U^*$, de donde resulta $TT^{\#} = I_a$. Luego, T es no singular y A es EP. ■

Notar que si A^π es EP entonces A puede no ser hermítica (es suficiente considerar una matriz A, no singular y no hermítica).

Sea f la función matricial en el conjunto de matrices cuadradas de índice a lo sumo 1 definida por $f(A) = A^\pi$ para cada $A \in \mathbb{C}^n$, $\text{índ}(A) \leq 1$. Por el Lema 3.1, f está bien definida y $f(f(O)) = O$. Sin embargo, en general, $f(f(A)) \neq A$. Por ejemplo, si se considera la matriz $A = \text{diag}(2, 0)$, entonces $A^{\#} = \text{diag}(1/2, 0)$, $A^\pi = \text{diag}(0, 1) = (A^\pi)^{\#}$ y $f(f(A)) = \text{diag}(1, 0)$.

Por el Lema 3.1, se tiene que $f(f(A)) = O$ si y sólo si $A = O$. Además, $f(f(A)) = I_n$ si y sólo si A es no singular.

Lema 3.3 *Sea f la función previamente definida y $A \in \mathbb{C}^n$, $\text{índ}(A) = 1$, una matriz no nula representada como en* (3.6). *Entonces $f(f(A)) = A$ si y sólo si $C = I_a$.*

Demostración. Por el Lema 3.1 (d), se tiene que $AA^{\#} = P(I_a \oplus O)P^{-1}$ y $f(A) = P(O \oplus I_{n-a})P^{-1}$. Como $f(A)^{\#} = f(A)$ entonces $f(f(A)) = P(I_a \oplus O)P^{-1}$. Luego, se satisface que $f(f(A)) = A$ si y sólo si $C = I_a$. ■

Recordar que una matriz cuadrada $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es un proyector si y sólo si es idempotente, es decir, $P^2 = P$; y es un proyector ortogonal si también satisface $P^* = P$. Además, una caracterización que se utiliza en este trabajo es la siguiente: P es un proyector ortogonal si y sólo si existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$P = U(I_r \oplus O)U^*,$$

con $r = \text{rg}(P)$. Con $\mathcal{PO}_n$ se denota el conjunto de todos los proyectores ortogonales de tamaño $n \times n$.

Observación 3.6 Sea $A \in \mathcal{EP}$. Entonces $f(f(A)) = A$ si y sólo si A es un proyector ortogonal.

Por el Lema 3.2 (a), es claro que $f(\mathcal{EP}) \subseteq \mathcal{EP}$, pero en general no se cumple la igualdad como se puede mostrar mediante la matriz $A = \mathrm{diag}(2,0)$. Se supone que existe $M \in \mathbb{C}^{2\times 2} \cap \mathcal{EP}$ tal que $A = f(M)$. Por el Lema 3.1 (h), $\mathrm{rg}(M) = 1$. Si $M = U\mathrm{diag}(c,0)U^*$, con $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ una matriz unitaria y c un número complejo no nulo, es fácil ver que $f(M) = U\mathrm{diag}(0,1)U^*$, lo cual es una contradicción porque $2 \in \sigma(A)$ y $2 \notin \sigma(f(M))$. Por lo tanto, $\mathcal{EP} \not\subseteq f(\mathcal{EP})$.

Sea $g : \mathcal{EP} \longrightarrow \mathcal{EP}$ la restricción de la función f al conjunto $\mathcal{EP}$. Por el Lema 3.2 (a), g está bien definida. Es claro que g no es sobreyectiva; además, g no es inyectiva como lo muestran las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A = \mathrm{diag}(2,0,...,0)$ y $B = \mathrm{diag}(3,0,...,0)$).

El siguiente lema caracteriza el intervalo

$$[O, g(A)] = \{B \in \mathbb{C}^n, \mathrm{índ}(B) \leq 1 : O \leq^* B \leq^* g(A)\},$$

donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz EP.

Lema 3.4 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz EP. Entonces*

$$[O, g(A)] = \{U(O \oplus T)U^* : U \text{ es unitaria y } T \in \mathcal{PO}_{n-a}\} \subseteq \mathcal{PO}_n.$$

Demostración. Sea $A = O$. Por el Lema 3.1 (e) se tiene que $g(A) = I_n$. Si $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es tal que $B \leq^* g(A)$, entonces tomando $U = I_n$ y $T = B$ se tiene que $B \in \mathcal{PO}_n$ pues $B = B^* = B^2$.

Sea $A \neq O$. Por ser A una matriz EP se puede expresar como en (3.1), $A = U_A(C_A \oplus O)U_A^*$, con $U_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria y $C_A \in \mathbb{C}^{a\times a}$ no singular, entonces $f(A) = U_A(O \oplus I_{n-a})U_A^*$. Sea $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $B \leq^* g(A)$. Luego, $B = U_A(O \oplus T)U_A^*$, donde $T \leq^* I_{n-a}$, esto es, $T = T^* = T^2$. ■

Teorema 3.10 *La función g definida arriba es monótona decreciente.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices EP tales que $A \leq^* B$. Entonces se tiene que

$$AA^\dagger BB^\dagger = ABA^\dagger B^\dagger = BAA^\dagger B^\dagger = BA^\dagger AB^\dagger = BB^\dagger AB^\dagger = BB^\dagger AA^\dagger$$

y

$$BB^{\dagger}AA^{\dagger} = BA^{\dagger}AA^{\dagger} = BA^{\dagger} = AA^{\dagger}.$$

Estas últimas igualdades son equivalentes a $g(B) = g(B)g(A)$ y $g(B) = g(A)g(B)$. Por lo tanto, $g(B) \leq^* g(A)$. ■

Las matrices $A = \text{diag}(1, 0, ..., 0)$ y $B = \text{diag}(2, 0, ..., 0)$ son matrices EP que satisfacen $g(A) \leq^* g(B)$ pero $B \nleq^* A$. Se puede establecer el siguiente resultado para una subclase importante de matrices.

Teorema 3.11 *Sean $A, B \in \mathcal{PO}_n$. Si $g(B) \leq^* g(A)$ entonces $A \leq^* B$.*

Demostración. El teorema se puede demostrar aplicando el Teorema 3.10 y la Observación 3.6. ■

3.5. Ejercicios

(1) Demostrar que toda matriz normal es EP. Comprobar que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

es EP pero no es normal.

(2) Hallar todas las matrices $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ que sean EP y tales que $A \leq^* B$ para

$$B = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

hallar todas las matrices $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tales que $A \leq^* B$.

(4) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $A \leq^* B$. Probar que $A^\dagger \leq^* B^\dagger$.

(5) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A \leq^* B$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A es EP.

(b) $A^\dagger$ y B conmutan.

(c) A y $B^\dagger$ conmutan.

(6) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A \leq^* B$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A es normal.

(b) A^* y B conmutan.

(c) A y B^* conmutan.

(7) Mostrar que las siguientes matrices satisfacen que $A \leq^* B$ y B es EP pero que A no es EP.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(8) Mostrar que las siguientes matrices satisfacen que $A \leq^* B$ y A es una matriz EP pero B no lo es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(9) Sea $C = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Encontrar todas las matrices A que sean EP y satisfagan $A \leq^* C$.

(b) Encontrar todas las matrices B tales que $C \leq^* B$.

Apéndice

El siguiente resultado proporciona la condición necesaria y suficiente para que dos matrices hermíticas sean unitariamente diagonalizables de forma simultánea.

Teorema 1 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices hermíticas. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Existen una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y dos matrices diagonales $D_A, D_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que

$$A = UD_AU^* \qquad y \qquad B = UD_BU^*.$$

(b) $AB = BA$.

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) Reemplazando A y B por las expresiones de la hipótesis se tiene que:

$$AB = (UD_AU^*)(UD_BU^*) = UD_AD_BU^* = UD_BD_AU^* = (UD_BU^*)(UD_AU^*) = BA.$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) Como $A^* = A$, existe una matriz unitaria $U_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$A = U_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 I_s & O \\ O & D \end{bmatrix} U_1^*,$$

con $\lambda_1 \in \sigma(A) - \sigma(D)$ y $D \in \mathbb{R}^{(n-s)\times(n-s)}$ una matriz diagonal.

Se particiona

$$B = U_1 \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} U_1^*,$$

con $W \in \mathbb{C}^{s\times s}$ y $Z \in \mathbb{C}^{(n-s)\times(n-s)}$. Suponiendo que $AB = BA$ se tiene

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I_s & O \\ O & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 I_s & O \\ O & D \end{bmatrix}$$

lo que equivale a

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 W & \lambda_1 X \\ DY & DZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 W & XD \\ \lambda_1 Y & ZD \end{bmatrix},$$

es decir

$$(1)\ \lambda_1 X = XD, \qquad (2)\ DY = \lambda_1 Y \qquad \text{y} \qquad (3)\ DZ = ZD.$$

De (2) y teniendo en cuenta que $\lambda_1 \notin \sigma(D)$ debe ser $Y = O$. De manera similar, de (1) y puesto que $\lambda_1 \notin \sigma(D)$ debe ser $X = O$. Luego,

$$B = U_1 \begin{bmatrix} W & O \\ O & Z \end{bmatrix} U_1^*,$$

con $DZ = ZD$.

Como B es hermítica, se tiene que

$$B_1 := U_1^* B U_1 = \begin{bmatrix} W & O \\ O & Z \end{bmatrix}$$

también lo es. En consecuencia, $W^* = W$ y $Z^* = Z$. Por lo tanto, W y Z son unitariamente diagonalizables, es decir existen matrices unitarias $Q \in \mathbb{C}^{s\times s}$ y $T \in \mathbb{C}^{(n-s)\times(n-s)}$ y matrices diagonales $D_W \in \mathbb{C}^{s\times s}$ y $D_Z \in \mathbb{C}^{(n-s)\times(n-s)}$ tales que

$$W = QD_WQ^* \qquad \text{y} \qquad Z = TD_ZT^*.$$

Entonces

$$B = U_1 \begin{bmatrix} QD_WQ^* & O \\ O & TD_ZT^* \end{bmatrix} U_1^* = U_1 \begin{bmatrix} Q & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_W & O \\ O & D_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & O \\ O & T \end{bmatrix}^* U_1^*.$$

Denotando

$$R := U_1 \begin{bmatrix} Q & O \\ O & T \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$B = R \begin{bmatrix} D_W & O \\ O & D_Z \end{bmatrix} R^*$$

y

$$A \;=\; U_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 I_s & O \\ O & D \end{bmatrix} U_1^*$$

$$
\begin{aligned}
&= U_1 \begin{bmatrix} Q & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^*(\lambda_1 I_s)Q & O \\ O & T^*DT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & O \\ O & T \end{bmatrix}^* U_1^* \\
&= R \begin{bmatrix} \lambda_1 I_s & O \\ O & T^*DT \end{bmatrix} R^*.
\end{aligned}
$$

De este modo, el problema se ha deflaccionado, es decir se ha reducido a uno similar de tamaño menor. Ahora $A_2 := T^*DT$ y $B_2 := D_Z$ son matrices hermiíticas de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ que conmutan pues $DZ = ZD$. Tras realizar un razonamiento similar para todos los valores propios de A se obtiene el resultado. ■

El siguiente resultado es semejante al anterior, extendido ahora al caso de matrices rectangulares, es decir, permite realizar una transformación de ejes principales para matrices no hermíticas.

Teorema 2 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Existen dos matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$A = UD_AV^* \qquad y \qquad B = UD_BV^*.$$

con $D_A, D_B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrices (rectangulares) diagonales y D_A con elementos no negativos en la diagonal.

(b) AB^* y B^*A son hermíticas.

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) Reemplazando las expresiones de A y B por las de la hipótesis se tiene que:

$$AB^* = (UD_AV^*)(UD_BV^*)^* = (UD_AV^*)(VD_B^*U^*) = UD_AD_B^*U^*$$

que es hermítica puesto $(AB^*)^* = U(D_AD_B^*)^*U^*$ y $D_AD_B^*$ lo es (Comprobarlo como ejercicio). De forma semejante se demuestra que B^*A es hermítica. Se observa que $AB^* \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B^*A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $D_AD_B^* \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $D_B^*D_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Se considera una descomposición en valores singulares de A, es decir,

$$U_1^*AV_1 = \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

con $U_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarias y $D \in \mathbb{R}^{r\times r}$ una matriz diagonal definida positiva.

Sea

$$U_1^* B V_1 = \begin{bmatrix} G & K \\ L & H \end{bmatrix}$$

una partición acorde a los tamaños de los bloques de $U_1^* A V_1$. Ahora, de

$$AB^* = U_1 \begin{bmatrix} DG^* & DL^* \\ O & O \end{bmatrix} U_1^*$$

y del hecho que AB^* es hermítica se tiene que DG^* es hermítica y $L = O$ pues D es invertible. Análogamente, usando que B^*A es hermítica se llega a que G^*D es hermítica y $K = O$.

Sean $G = [g_{ij}]_{i,j=1}^r$ y $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r)$. Usando que DG^* es hermítica se obtiene

$$d_i \overline{g_{ji}} = d_j g_{ij}.$$

Del hecho que G^*D es hermítica se llega a

$$d_j \overline{g_{ji}} = d_i g_{ij}.$$

(Comprobar los cálculos anteriores como ejercicio). Operando se consigue

$$(d_j^2 - d_i^2) g_{ij} = 0, \forall i, j.$$

Si $d_i = d_j$, se llega a $\overline{g_{ji}} = g_{ij}$. Si $d_i \neq d_j$, se llega a $g_{ij} = 0$. En ambos casos, $\overline{g_{ji}} = g_{ij}$, para todo i, j, con lo cual G es hermítica.

Por lo tanto, como G y D son dos matrices hermíticas que conmutan, se tiene que existe una matriz unitaria $P \in \mathbb{C}^{r\times r}$ tal que

$$P^*DP = D_1 \qquad \text{y} \qquad P^*GP = M,$$

con D_1 y M matrices diagonales con elementos reales en la diagonal.

Realizando una descomposición en valores singulares a H se llega a

$$Q^*HR = N$$

con N diagonal con elementos diagonales reales y Q y R unitarias.

Definiendo ahora,

$$U_2 := \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}, \qquad V_2 := \begin{bmatrix} P & O \\ O & R \end{bmatrix}, \qquad U := U_1U_2 \qquad \text{y} \qquad V := V_1V_2$$

se obtiene

$$U^*AV = \begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad U^*BV = \begin{bmatrix} M & O \\ O & N \end{bmatrix}.$$

(Comprobarlo como ejercicio). ■

Por último, el resultado que sigue caracteriza el hecho de que dos matrices del mismo tamaño tengan una descomposición en valores singulares de forma simultánea.

Teorema 3 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Existen dos matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$A = UD_1V^* \qquad y \qquad B = UD_2V^*$$

con $D_1, D_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrices (rectangulares) diagonales con elementos no negativos en la diagonal.

(b) AB^* y B^*A son hermíticas y al menos una de ellas definida no negativa.

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) Esta implicación se prueba con un razonamiento parecido al utilizado en la demostración de (a) $\Longrightarrow$ (b) del Teorema 2. En realidad, se puede probar no sólo que AB^* y B^*A son hermíticas y al menos una de ellas es definida no negativa sino que las dos lo son.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Como AB^* y A^*B son hermíticas, del Teorema 2 se tiene que existen dos matrices unitarias $W \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$A = WD_AV^* \qquad \text{y} \qquad B = WD_BV^*.$$

con $D_A, D_B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrices (rectangulares) diagonales y D_A con elementos no negativos en la diagonal. Por ser, por ejemplo, AB^* definida no negativa, se tiene que

$$AB^* = WD_AV^*(WD_BV^*)^* = WD_AD_B^*W^*$$

y por tanto $D_A D_B^T$ es hermítica y definida no negativa. Por ser D_A y D_B matrices diagonales, claramente también se cumple que $D_B^T D_A$ es hermítica y definida no negativa. Luego, un elemento diagonal de D_A es negativo si y sólo si el corresponidente elemento de la diagonal de D_B es negativo. Si el i-ésimo elemento de la diagonal de D_A fuese no negativo, reemplazar la i-ésima columna de W denotada por w_i por el vector $-w_i$ y los elementos diagonales de D_A y D_B por sus respectivos opuestos. Se repite este razonamiento para todos los elementos diagonales negativos de D_A y se llaman U, D_1 y D_2 a las matrices obtenidas de W, D_A y D_B, rrespectivamente. Entonces

$$A = UD_1V^* \qquad \text{y} \qquad B = UD_2V^*,$$

con U y V unitarias y D_1 y D_2 diagonales no negativas. ■

Índice alfabético

Bibliografía

[1] O.M. Baksalary, G.P.H. Styan, G. Trenkler. On a matrix decomposition of Hartwig and Spindelböck. *Linear Algebra and its Applications*, 430, 2798–2812, 2009.

[2] R.B. Bapat. *Linear Algebra and Linear Models.* 2da Edición, Springer, 2000.

[3] A. Ben-Israel, T. Greville. *Generalized inverses: theory and applications.* Segunda edición, Springer, Nueva York, 2003.

[4] N. Castro-González, J.J. Koliha, Y. Wei. *Perturbation of the Drazin inverse for matrices with equal eigenprojections at zero.* Linear Algebra and its Applications, 312, 335-347, 2000.

[5] S.L. Campbell, C.D. Meyer. *Generalized Inverse of Linear Transformations.* Dover, Nueva York, Segunda Edición, 1991.

[6] C. Eckart, G. Young. *A principal axis transformation for non-hermitian matrices.* Bulletin of the American Mathematical Society, 45, 2, 118-121, 1939.

[7] R.A. Horn, C.R. Johnson. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[8] A. Hernández. *Órdenes parciales y pre-órdenes definidos a partir de matrices inverses generalizadas.* Tesis doctoral, Universitat Politècnica de València, marzo de 2016.

[9] A. Hernández, M. Lattanzi, N. Thome. *On a partial order defined by the weighted Moore-Penrose inverse.* Applied Mathematics and Computation, 219.14, 7310-7318, 2013.

[10] A. Hernández, M. Lattanzi, N. Thome. *Weighted binary relations involving the Drazin inverse.* Applied Mathematics and Computation, 253, 215-223, 2015.

[11] A. Hernández, M. Lattanzi, N. Thome, F. Urquiza. *The star partial order and the eigenprojection at 0 on EP matrices.* Applied Mathematics and Computation, 218, 21, 10669-10678, 2012.

[12] C.D. Meyer. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Filadelfia, 2000.

[13] J. K. Merikoski, X. Liu. *On the star partial ordering of normales matrices.* Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7, 1, Art. 17, 2006.

[14] S.K. Mitra, P. Bhimasankaram, S.B. Malik, *Matrix partial orders, shorted operators and applications.* World Scientific Publishing Company, 2010.

[15] S. Puntanen, G.P.H. Styan, J. Isotalo. *Matrix tricks for linear statistical models*, Ed. Springer, Londres, 2011.

[16] C.R. Rao, S.K. Mitra. *Generalized inverse of matrices and its applications.* John Wiley & Sons, Nueva York, 1971.

[17] G. Wang, Y. Wei, S. Qiao, *Generalized Inverses: Theory and Computations*, Science Press, 2003.

[18] H. Yanai, K. Takeuchi, Y. Takane. *Projection matrices, generalized inverses, and singular value decomposition*, Ed. Springer, Londres, 2011.