

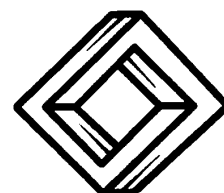
**Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana**

El Selenoide Diádico

**Joel Pérez Guerrero
Patricia Pellicer Covarrubias**

www.sociedadmatematicamexicana.org.mx

Serie: Divulgación. Vol. 3 (2010)



EL SOLENOIDE DIÁDICO

Joel Pérez Guerrero

Dirigido por: Dra. Patricia Pellicer Covarrubias

Facultad de Ciencias

UNAM

Agosto 2009

Resumen.

Los solenoides han sido objeto de interés en varias áreas de la matemática, desde los sistemas dinámicos y la geometría algebraica hasta la topología. En este artículo presentamos una introducción geométrica elemental del solenoide diádico.

1. Introducción.

La teoría de los continuos es una de las grandes ramas de la topología, la cual se encarga de estudiar las propiedades de los espacios métricos, compactos y conexos; a un espacio no vacío que tiene estas tres propiedades se le conoce como un *continuo*. Una familia de espacios que se ha estudiado de manera importante en la teoría de los continuos es la de los *solenoides*.

El objeto de estudio de este artículo es un solenoide particular, llamado *solenoides diádico*. Este solenoide fue el primero en ser descubierto, y fue el austriaco Leopold Vietoris el primer matemático que lo estudió. Cabe mencionar que la construcción analítica que aquí se presenta es esencialmente la misma que dio Leopold Vietoris en su artículo de 1927 [Vi]. A partir de entonces varios autores han estudiado a los solenoides; uno de los más conocidos es el matemático holandés David van Dantzig quien, en 1930, dio una conocida construcción geométrica de los solenoides como intersección anidada de toros sólidos ([Da]). Posteriormente, desde un punto de vista completamente distinto H. Freudenthal estudió a los solenoides, esta vez como límites inversos de circunferencias ([Fr]). Independientemente, A. van Heemert y A.D. Wallace estudiaron a los solenoides como grupos topológicos ([He] y [Wa]).

El estudio de los solenoides ha cobrado gran importancia en las últimas décadas por su aparición en diversas ramas de la matemática; por ejemplo, en la teoría de sistemas dinámicos se estudian los atractores, de los cuales algunos resultan ser solenoides [De, Sección 2.5, págs. 201-211]. También se tiene que en el estudio de la topología algebraica

los solenoides son de gran importancia para la teoría de espacios foliados [Mo, Capítulo 2, págs. 38-39], entre otros.

Es importante mencionar que el solenoide diádico tiene muchas y muy interesantes propiedades; por ejemplo, el solenoide diádico es un grupo topológico, es decir, se le puede dar una operación (¡continua!) con la que resulte ser un grupo, de tal manera que enviar cada elemento a su inverso también resulte ser una función continua. Una vez establecido que el solenoide diádico se puede ver como grupo topológico, no es difícil probar que es *homogéneo* (es decir, para cada par de puntos p y q existe un homeomorfismo que envía uno en el otro).

Otra propiedad peculiar de los solenoides es que ¡todos sus subcontinuos propios son arcos! Más aún, C. Hagopian caracterizó a los solenoides en el sentido de que si un continuo tiene esta propiedad y es homogéneo, entonces es un solenoide ([Ha, Theorem 2, pág. 434]).

Una propiedad más de los solenoides tiene que ver con el concepto de *indescomponibilidad*: Decimos que un continuo es *descomponible* si se puede expresar como la unión de dos de sus subcontinuos propios, y es *indescomponible* si éste no es el caso. Como el lector podrá fácilmente verificar, un arco y una curva cerrada simple son descomponibles, sin embargo, no todos los continuos lo son. Resulta ser que los solenoides son continuos indescomponibles; más precisamente, según probó A. van Heemert, los solenoides coinciden con la clase de los grupos topológicos abelianos que son continuos indescomponibles ([He]).

Finalmente, mencionaremos una última propiedad muy interesante: el solenoide diádico no puede ser la imagen continua de ningún subcontinuo del plano. Esto fue demostrado por M. K. Fort, Jr. ([F, Theorem 2, pág. 541]; esta última propiedad en realidad la comparten todos los solenoides, pero la demostración fue dada por el matemático M. C. McCord ([Mc, pág. 82])). Como consecuencia de este resultado, se tiene el hecho de que ningún solenoide se puede encajar en el plano.

En este artículo estudiaremos un ejemplo de solenoide en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 , al cual llamaremos *solenoide diádico*. Empezaremos por construirlo geoméricamente, después analizaremos cómo es posible visualizarlo, finalmente daremos una descripción del solenoide diádico como espacio cociente.

2. Construcción geométrica del solenoide diádico.

Considérese una dona o toro sólido T_1 en el espacio \mathbb{R}^3 . El toro sólido T_1 es un espacio métrico, ya que $T_1 \subset \mathbb{R}^3$ y \mathbb{R}^3 es un espacio métrico; es decir, si podemos medir la distancia entre dos puntos en \mathbb{R}^3 , en particular podemos medir la distancia entre dos puntos de T_1 . Por otra parte podemos observar que T_1 está hecho de una sola pieza y esto coincide con nuestra noción de conexidad en \mathbb{R}^3 ; así, T_1 es conexo.

Finalmente, es fácil ver que T_1 puede ser encerrado en una esfera, lo cual nos dice que T_1

es acotado; añadiendo el hecho de que T_1 es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^3 se tiene que T_1 es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^3 . Con esto tenemos que T_1 cumple las tres propiedades requeridas para ser un continuo (Figura 1).

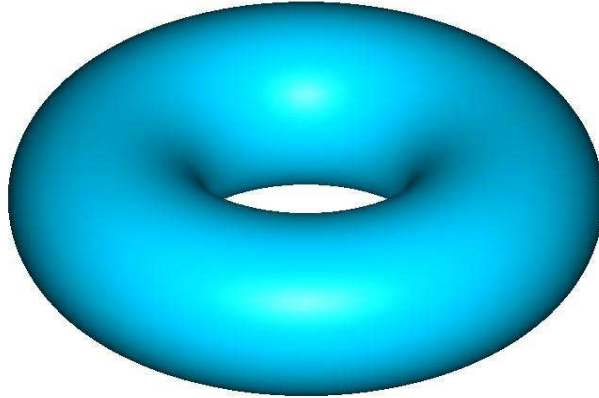


Figura 1: Continuo T_1 .

Ya que hemos observado que T_1 es un continuo, consideremos ahora un toro sólido T_2 , que esté contenido en T_1 , y que dé dos vueltas dentro de T_1 ; es decir, T_2 dará dos vueltas alrededor del “hoyo” que determina T_1 , de manera que quede como se ilustra en la Figura 3. Notemos que T_2 es de nuevo un continuo, el cual, además, está contenido en otro continuo, es decir, $T_2 \subset T_1$ (Figura 3).

De manera análoga a como hicimos con T_2 , consideremos un toro sólido T_3 , que esté contenido en T_2 , y que dé dos vueltas dentro de T_2 como se muestra en la Figura 5; es fácil notar que ahora tenemos que T_3 le está dando cuatro vueltas a nuestro primer toro sólido T_1 (Figura 6). Por otra parte, todos los toros sólidos son continuos con la propiedad de estar *anidados*, en otras palabras: $T_3 \subset T_2 \subset T_1$.

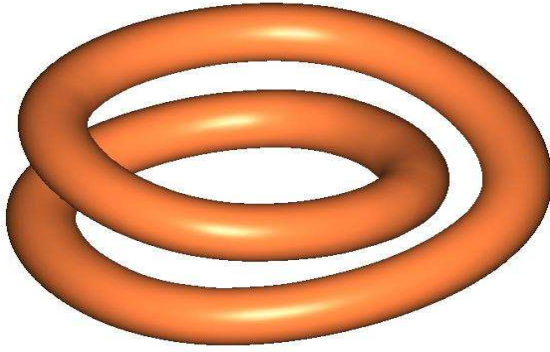


Figura 2: Continuo T_2 .

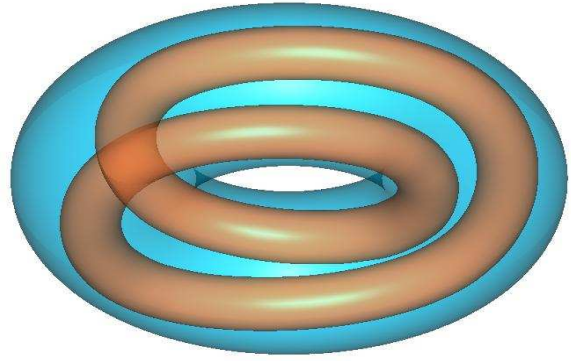


Figura 3: $T_2 \subset T_1$.

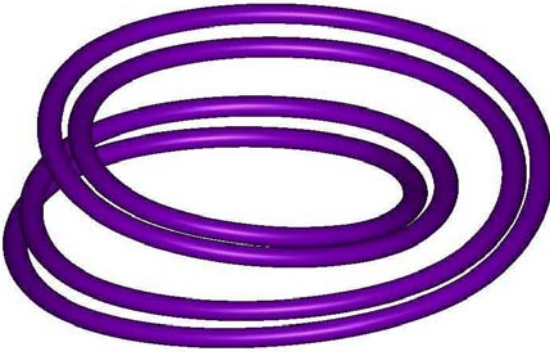


Figura 4: Continuo T_3 .



Figura 5: $T_3 \subset T_2$.

Repitamos esta construcción de manera indefinida, es decir, ya que tenemos construido nuestro toro sólido T_n , construimos un toro sólido T_{n+1} , que esté contenido en T_n , y que dé dos vueltas dentro de T_n , obteniendo así una sucesión de continuos anidados; recordemos que esto no es más que decir que todos nuestros toros sólidos son continuos y que:

$$\dots \subset T_{n+1} \subset T_n \subset \dots \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_1.$$

En este momento es conveniente precisar algo sobre el grosor de los toros sólidos; si el grosor de T_1 mide 1 entonces la construcción puede ser hecha de manera que el grosor de T_2 mida $\frac{1}{3}$, después que el grosor de T_3 mida $\frac{1}{9}$ y así sucesivamente, de manera que el grosor del toro sólido T_n mida $\frac{1}{3^{n-1}}$. Así podemos decir que, en la construcción anterior, el grosor de los toros sólidos tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Con todas estas ideas en mente estamos listos para definir el *solenoides diádico*.

Definición: Sea $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$. Al continuo S se le llama *solenoides diádico*.

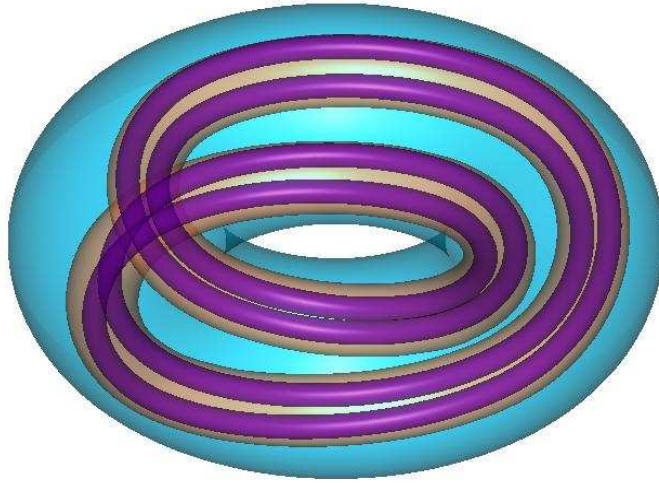


Figura 6: $T_3 \subset T_2 \subset T_1$.

Haremos algunos comentarios sobre esta definición. En primer lugar el nombre “*diádico*” se refiere a la construcción misma del solenoide, ya que cada toro sólido nuevo que se construye le da *dos* vueltas al toro sólido anterior. Este comentario nos lleva a pensar que puede haber solenoides de otros órdenes, es decir, en vez de que los toros sólidos den dos vueltas en cada paso de la construcción, podría ser que los toros sólidos den tres, o cuatro, o el número de vueltas que queramos; sin embargo, para nuestro propósito, sólo analizaremos el caso en que dan dos vueltas.

En segundo lugar, cabe destacar tres hechos importantes que dan sentido a la definición del *solenoide diádico*.

1. La intersección de todos los toros sólidos $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ es un espacio métrico, pues está contenido en \mathbb{R}^3 .
2. La intersección anidada de espacios cerrados en un espacio compacto es no vacía. [Mu, Teorema 26.9, págs. 193 y 194]
3. La intersección anidada de continuos es un continuo. [N, Teorema 1.8, pág. 6]

De acuerdo a estos tres hechos, podemos concluir que el solenoide diádico S es un continuo.

3. ¿Cómo podemos ver a S ?

Ya que hemos definido el solenoide $S \subset \mathbb{R}^3$, nuestro siguiente paso es preguntarnos ¿Cómo se ve dicho solenoide? La respuesta no es fácil, es por esto que dedicaremos esta sección a empezar a visualizar el solenoide. Para poder ver cómo es S , vamos a recurrir a una técnica muy útil; dicha técnica consiste en cortar el solenoide con un plano P de manera transversal (Figura 7) y ver cómo es la intersección de este plano con el solenoide.

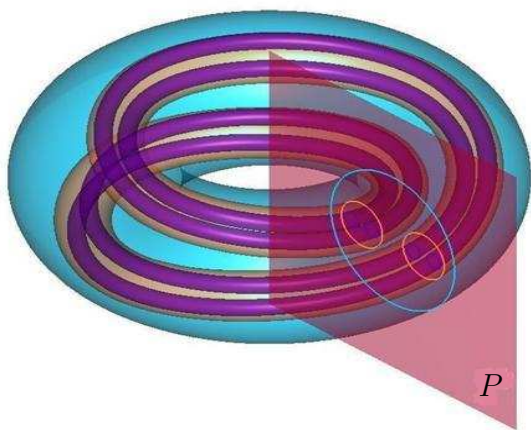


Figura 7: Plano transversal P .

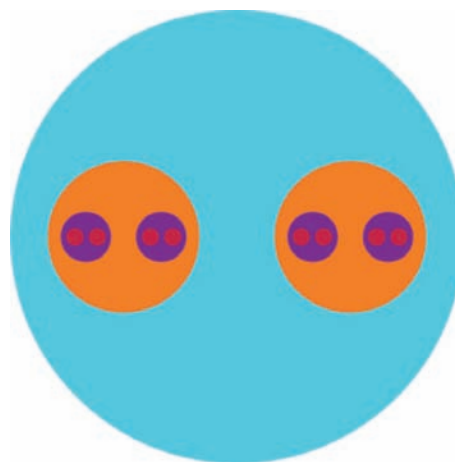


Figura 8: Vista en el plano P .

Ahora que hemos cortado al solenoide con un plano transversal, notemos que en el plano P nos quedan discos que representan la construcción del solenoide (Figura 8); el disco azul representa el corte del plano P con T_1 , los dos discos naranjas representan el corte del plano P con T_2 y así sucesivamente.

Para entender mejor cómo es el solenoide, es preciso hacer un pequeño reacomodo de los discos que representan los cortes de los distintos toros sólidos en el plano P . Este reacomodo consiste sólo en mover los discos de la siguiente forma: los discos que representan el corte del plano P con T_2 (los discos naranjas) las movemos de modo que queden pegadas con el disco que representa el corte del plano P con T_1 (el disco azul); ahora, los discos que representan el corte del plano P con T_3 (los discos morados) las movemos de modo que queden pegadas con los discos que representan el corte del plano P con T_2 (los discos naranjas); este proceso se continúa hasta obtener una representación reacomodada del corte del solenoide con el plano P (Figura 9).

Es fácil ver que la representación de la Figura 8 y la representación de la Figura 9 son esencialmente la misma, ya que sólo estamos moviendo los discos de manera que queden pegados unos a otros.

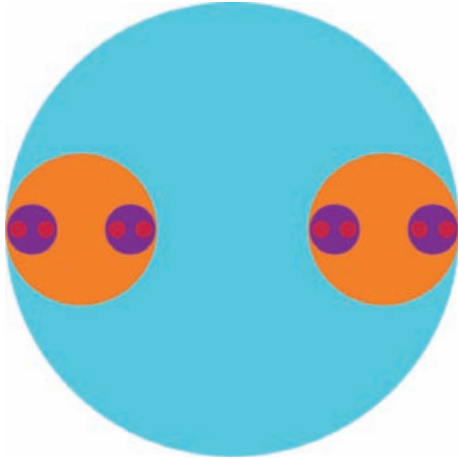


Figura 9: Vista reacomodada.

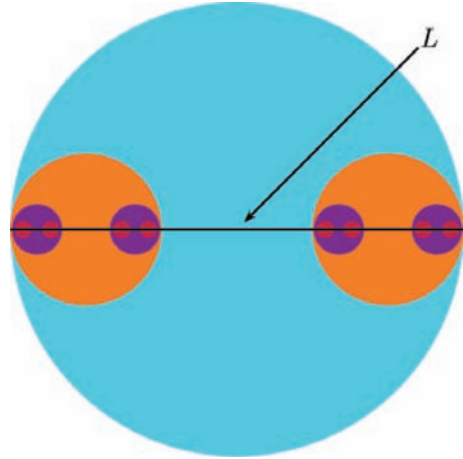


Figura 10: Línea L .

Observemos ahora que la intersección de todos los toros sólidos con el plano P está sobre la línea horizontal L , que divide a los discos por la mitad (Figura 10); entonces, la intersección del solenoide con el plano P está sobre esta línea y dentro del disco azul. Notemos que esto no es más que la intersección de la línea L con los discos que representan el corte del plano P con los toros sólidos, pero ¿Quién es tal intersección?

3.1. La intersección de los toros en el plano P .

El objetivo de esta sección es determinar quién es la intersección del solenoide con el plano P ; para esto explicaremos la construcción del *Conjunto de Cantor* y después veremos qué tan parecido es este conjunto a la intersección que tenemos sobre el plano P .

Consideremos el intervalo cerrado $[0, 1]$ en \mathbb{R} , al cual denotaremos por L_1 . Dividamos L_1 en tres intervalos, de igual longitud, y llamemos L_2 a lo que quede cuando quitamos el intervalo abierto central $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, es decir,

$$L_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

Dividamos ahora cada subintervalo cerrado de L_2 en tres intervalos, de igual longitud, y llamemos L_3 a lo que queda cuando a cada subintervalo cerrado de L_2 le quitamos su respectivo intervalo abierto central, es decir,

$$L_3 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

De manera similar, si ya tenemos construido un conjunto L_n , obtenemos un nuevo conjunto L_{n+1} al dividir cada subintervalo cerrado de L_n en tres intervalos, de igual longitud, y quitar el intervalo abierto central de cada subintervalo (Figura 11). El conjunto de Cantor, al cual denotamos por C , está determinado por la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$.

Notemos ahora que si intersectamos la línea L de la Figura 10 con el disco azul tenemos un intervalo como L_1 de la Figura 11; análogamente, si intersectamos la línea L con los discos naranjas obtenemos dos subintervalos como L_2 y, así sucesivamente, tenemos asociado cada L_n de la construcción del conjunto de Cantor con la intersección de la línea L y el toro sólido T_n en el plano P .



Figura 11: Conjunto de Cantor.

Con el comentario del párrafo anterior podemos concluir que la intersección del solenoide con el plano P es un conjunto de Cantor. Entonces es claro que cada vez que hacemos un corte al solenoide con un plano transversal, tenemos determinado un conjunto de Cantor.

3.2. El Conjunto de Cantor

Ahora bien, como vamos a trabajar con el conjunto de Cantor, lo primero que debemos hacer es identificar de manera precisa cada punto de este conjunto. Para ello, notemos que los puntos del conjunto de Cantor pueden ser divididos en dos subconjuntos: los de la “izquierda” y los de la “derecha” (Figura 12); la línea amarilla sólo hace notar la división del conjunto en dos partes.



Figura 12: División.

Asociemos a la parte izquierda el número *cero* y a la parte derecha el número *uno*. Entonces los puntos que estén a la izquierda los expresaremos con un *cero* como primera cifra después de un punto: $.0\dots$, mientras que a los puntos de la derecha los expresaremos con un *uno* como primera cifra después de un punto: $.1\dots$. Ahora bien, este mismo proceso lo podemos hacer para la parte izquierda (y para la parte derecha) del conjunto de Cantor, es decir, podemos dividir la parte izquierda en izquierda y derecha otra vez (Figura 13). Nuevamente, si un punto está en la parte izquierda de la parte izquierda entonces determinamos su expresión como $.00\dots$; si por el contrario, está en la parte derecha de la parte izquierda, entonces agregamos un *uno* al *cero* que ya tenía y determinamos su expresión como $.01\dots$.



Figura 13: Subdivisión.

Podemos seguir haciendo este proceso indefinidamente, es decir, en cada subdivisión podemos seguir dividiendo en partes izquierda y derecha nuevamente, agregando un *cero* si el punto resulta estar en una parte izquierda y un *uno* si está en una parte derecha.

Para hacer este proceso más claro, daremos un ejemplo. El punto $.0110\dots$ en esta representación binaria (ceros y unos) nos indica su posición en el conjunto de Cantor, pues como su primera cifra después del punto es *cero*, entonces se encuentra en el intervalo de la izquierda de L_2 .

Ahora sólo nos fijamos en la parte izquierda del conjunto L_2 y la subdividimos en partes izquierda y derecha; como la segunda cifra después del punto es *uno*, entonces está en la parte derecha de L_3 que corresponde al primer intervalo de L_2 . Si sólo nos fijamos en esta parte derecha y la subdividimos en dos partes (de nuevo izquierda y derecha en L_4) como la tercera cifra después del punto es *uno*, entonces está en la parte derecha de L_4 que corresponde al segundo intervalo de L_3 . El proceso continúa indefinidamente al considerar todos los *ceros* y *unos* de la representación del punto (Figura 14).



Figura 14: Localización del punto $.0110\dots$ en el conjunto de Cantor

De esta manera, hemos determinado una expresión para cada punto del conjunto de Cantor que nos será muy útil más adelante.

3.3. Rebanada de la dona.

Regresamos ahora al solenoide. Para expresar y visualizar el solenoide en \mathbb{R}^3 ya hemos observado que cada vez que cortamos con un plano transversal, tenemos determinado un conjunto de Cantor (Subsección 3.1); así pues, es natural pensar en cortar con otro plano transversal para formar una rebanada de la dona (Figura 15). Lo que nos queda en esta rebanada, debido a que en cada plano tenemos un conjunto de Cantor, es algo que tiene *esencialmente* la misma forma que $C \times [0, 1]$, recordando que C denota al conjunto de Cantor (Figura 16).

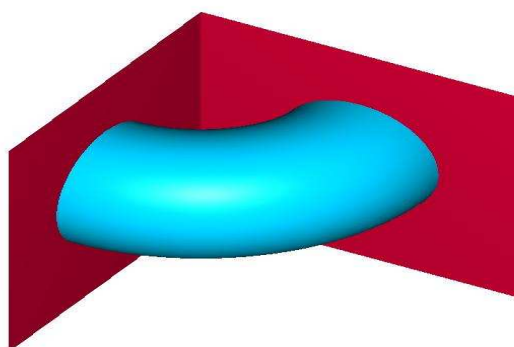


Figura 15: Rebanada de la dona.

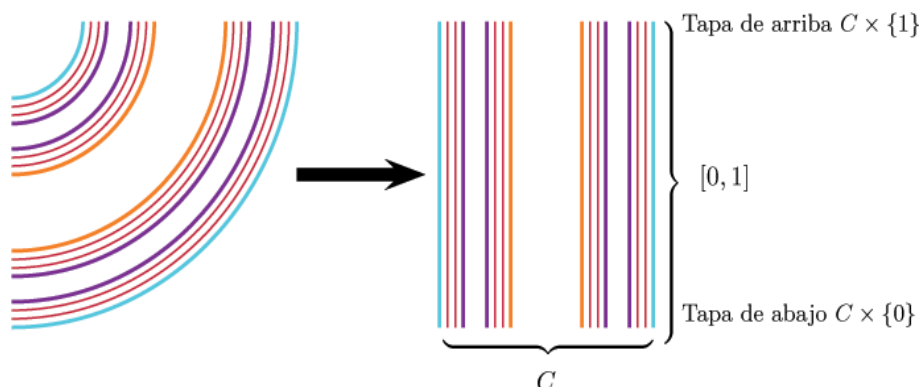


Figura 16: $C \times [0, 1]$.

Hasta aquí lo que hemos logrado es saber cómo es el solenoide entre dos planos, a saber, los planos que nos determinaron la rebanada; lo que nos resta por hacer para obtener el solenoide completo es hallar una manera de pegar de forma adecuada los “extremos” de la rebanada. En otras palabras, hay que pegar la parte superior con la parte inferior de $C \times [0, 1]$, es decir, debemos pegar la tapa de arriba: $C \times \{1\}$, con la tapa de abajo: $C \times \{0\}$. Sin embargo, para poder pegar las tapas de este espacio es necesario introducir un concepto muy utilizado en varias ramas de la matemática. Introducimos este concepto en la siguiente subsección.

3.4. Un poco de espacios cociente.

En matemáticas el concepto de espacio cociente es muy importante [Mu, págs. 154-164]; en realidad todos estamos familiarizados desde la educación básica con algunos ejemplos de espacios cociente, pero no sabíamos que lo fueran. Un ejemplo muy sencillo es el cilindro, que está contenido en \mathbb{R}^3 , y que explicaremos a continuación.

Imaginemos que tenemos en nuestras manos una hoja de papel y pegamento; si utilizamos el pegamento y pegamos dos lados paralelos de la hoja, lo que nos queda es un cilindro. Como mencionamos anteriormente, para visualizar el solenoide vamos a necesitar hacer un cierto pegado, pero tenemos que decir qué significa esto de manera precisa. Para ello, analizaremos primero el ejemplo del cilindro.

Consideremos $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ (Figura 17). Ahora que ya tenemos nuestra región (hoja de papel), es necesario pegar los puntos de la orilla izquierda con los puntos de la orilla derecha, pero necesitamos pegar un punto de la orilla izquierda con un punto de la orilla derecha con la condición de que tengan la misma altura, es decir, diremos que: (x_1, y_1) se pegará con (x_2, y_2) si $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $y_1 = y_2$; esto es lo mismo que decir que (x_1, y_1) está relacionado con (x_2, y_2) . O bien podemos definir la siguiente relación en $[0, 1] \times [0, 1]$: decimos que $(x_1, y_1) \sim_c (x_2, y_2)$ si y sólo si $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ o $(x_1, y_1) = (0, y_2)$ y $(x_2, y_2) = (1, y_1)$. Es fácil ver que esta relación lo que hace es pegar los puntos de las orillas con la condición que tengan la misma altura, y los puntos que no están en las orillas se quedan igual.

Este tipo de relación se conoce con el nombre de relación de equivalencia [Mu, p. 24], y al espacio que nos resulta al hacer el pegado, en este caso el cilindro (Figura 18), se le conoce como espacio cociente y se denota por $[0, 1] \times [0, 1] / \sim_c$.

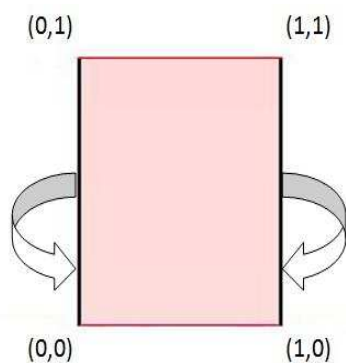


Figura 17: Región.

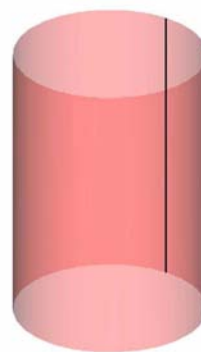


Figura 18: $[0, 1] \times [0, 1] / \sim_c$.

Así como hicimos uso de una relación de equivalencia para poder pegar los dos lados de la región de la Figura 17, tenemos que definir una relación de equivalencia que pegue de manera adecuada las tapas de $C \times [0, 1]$ en la Figura 16. Entonces tendremos una representación del solenoide S como un espacio cociente, y lo denotaremos como $S = C \times [0, 1] / \sim_f$.

3.5. Pegado en el solenoide.

En esta subsección se presenta geoméricamente cómo deben ser pegadas las tapas de $C \times [0, 1]$ para obtener un solenoide. Hay que notar que debemos de tener mucho cuidado cuando realicemos el pegado de las tapas, ya que de otro modo podríamos obtener algo que no fuera conexo. Por ejemplo, ¿Qué pasa si pegamos cada punto de la forma $(x, 0)$ de la tapa de abajo con el punto $(x, 1)$ correspondiente de la tapa de arriba? Entonces obtenemos un conjunto de circunferencias ajenas y este espacio no es conexo (Figura 19), así que lo que obtenemos ¡no es un solenoide!

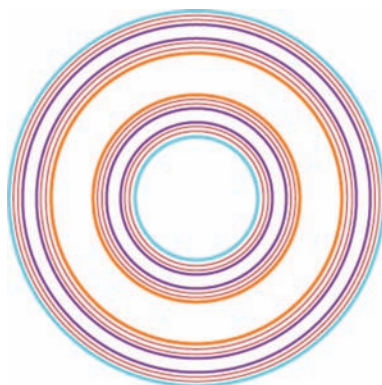


Figura 19: Espacio no conexo.

A continuación daremos una explicación geométrica de cómo debe de ser el pegado que necesitamos, de manera que este pegado en realidad refleje las torceduras que hicimos cuando construimos el solenoide en la Sección 2.

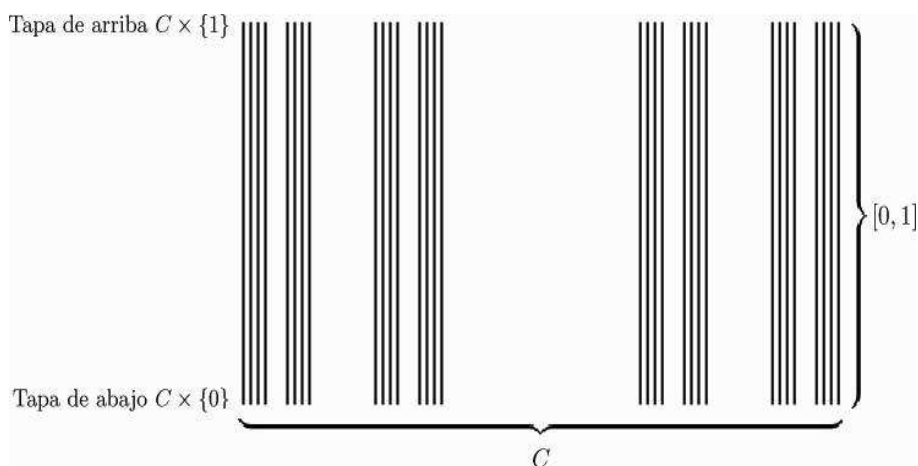


Figura 20: $C \times [0, 1]$.

- Primero dividimos el conjunto $C \times [0, 1]$ en parte izquierda y derecha.
- Los puntos de la parte inferior izquierda (indicados con una llave azul) se pegarán con los puntos de la parte superior derecha (indicados con otra llave azul), haciendo primero un traslado hacia la derecha y luego hacia arriba, quedando los puntos pegados (Figura 21).

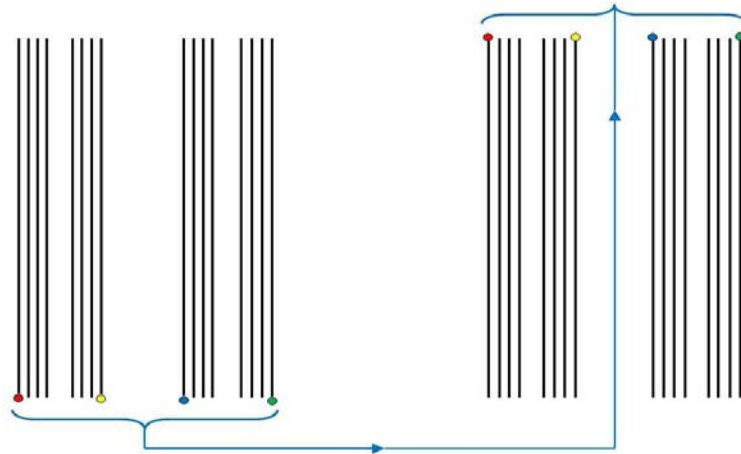


Figura 21: $C \times [0, 1]$.

- Ahora sólo nos fijamos en la parte derecha de $C \times [0, 1]$; de esta parte tomamos nuevamente la parte inferior izquierda, de modo que los puntos que indica la llave roja se peguen como muestra la flecha, es decir, trasladando hacia la izquierda y luego hacia arriba (Figura 22).

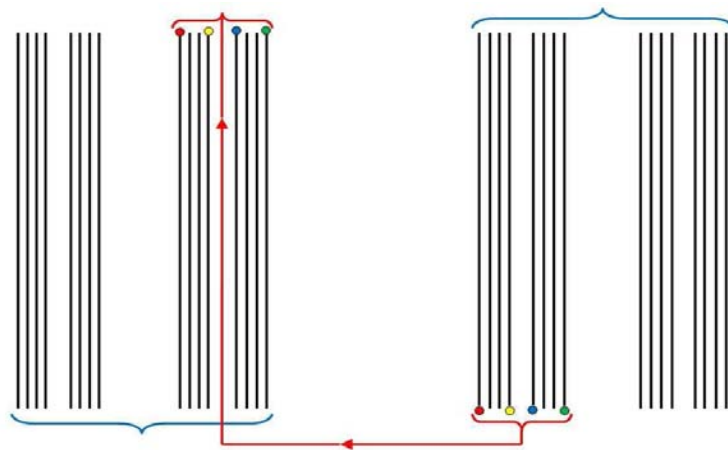


Figura 22: $C \times [0, 1]$.

- Después sólo tomamos los puntos que indica la llave verde y los pegamos como indica la flecha, es decir, trasladando hacia la izquierda y luego hacia arriba (Figura 23).

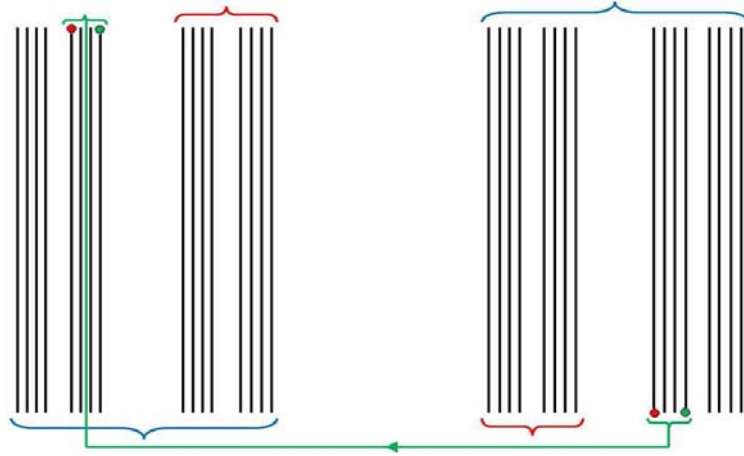


Figura 23: $C \times [0, 1]$.

- Notemos que los pasos que estamos siguiendo nos indican qué es lo siguiente que se tiene que hacer; ahora tomamos los puntos a la derecha de los puntos que indica la llave verde (llave gris) en la parte inferior derecha de $C \times [0, 1]$, pero reducimos a la tercera parte la longitud de la llave, tal como ocurrió con las llaves anteriores; el pegado es similar al que se hizo con los puntos de las llaves rojas y verdes, es decir, trasladamos a la izquierda y luego hacia arriba hasta pegarlos con la otra llave gris (Figura 24).

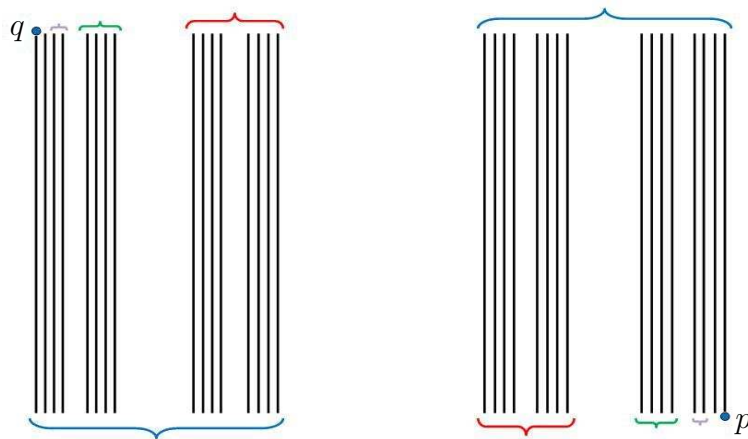
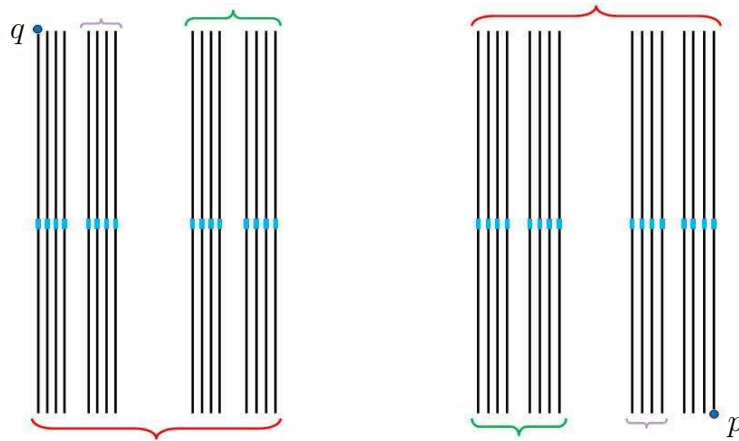


Figura 24: $C \times [0, 1]$.

Continuamos con este proceso indefinidamente y, finalmente, pegamos los puntos azules p y q para obtener el solenoide en \mathbb{R}^3 .



Primer paso en el pegado.

En la siguiente página mostramos una visualización del solenoide, una vez hechos los pegados que mencionamos en los pasos anteriores.

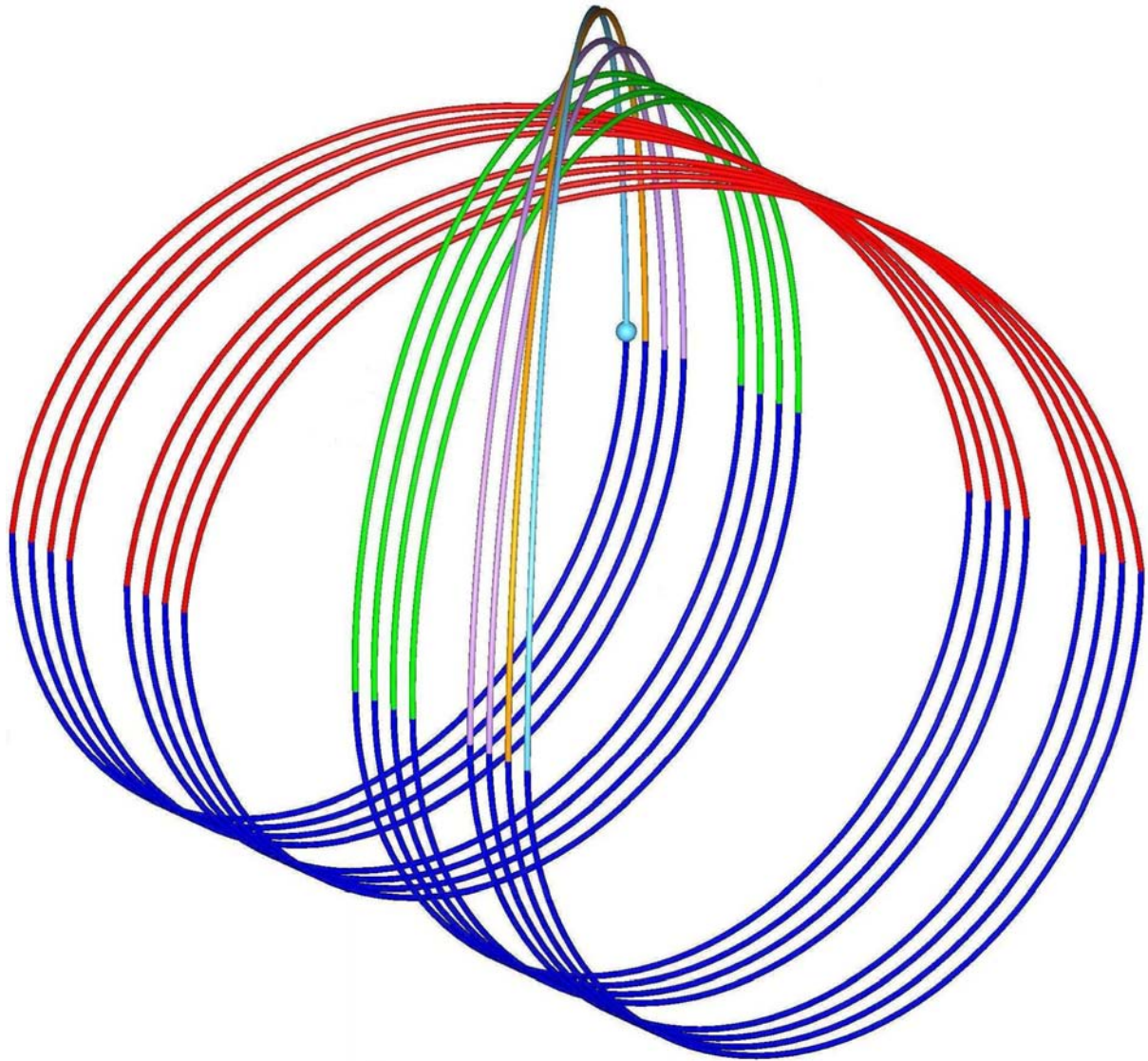


Figura 25: Pegado final.

El siguiente paso para construir el solenoide (como espacio cociente) es definir explícitamente una relación de equivalencia que nos ayude a pegar los puntos de las tapas de $C \times [0, 1]$ tal y como lo acabamos de describir. Esto lo haremos en la siguiente sección.

4. La relación de pegado.

Recordando un poco de lo que se ha hecho hasta aquí, se tiene que debemos de pegar las tapas de $C \times [0, 1]$ a fin de obtener el solenoide; Para ello, a cada punto de la forma $(x, 0)$ debemos asignarle un punto de la forma $(y, 1)$, y esto lo haremos por medio de una función; es decir, necesitamos una función $f : C \rightarrow C$ biyectiva que determine el punto $(f(x), 1)$ con el cual se va a pegar cada punto $(x, 0)$. En la Subsección 4.1 damos explícitamente una función f adecuada; en este momento definiremos explícitamente la relación que pegue cada punto $(x, 0)$ con un punto de la forma $(f(x), 1)$.

Definición 4.1 Dada una función biyectiva $f : C \rightarrow C$ definimos una relación " \sim_f " en $C \times [0, 1]$: diremos que $(x, y) \sim_f (z, w)$ si y sólo si:

$$\begin{cases} (x, y) = (z, w) & \text{o} \\ y = 0, z = f(x), w = 1 & \text{o} \\ y = 1, x = f(z), w = 0. & \end{cases}$$

Veamos que esta relación en verdad es de equivalencia:

1. **Reflexividad:** Sea $(x, y) \in C \times [0, 1]$. Como $(x, y) = (x, y)$ entonces $(x, y) \sim_f (x, y)$, por lo tanto, la relación es reflexiva.
2. **Simetría:** Sean $(x, y), (z, w) \in C \times [0, 1]$ tales que $(x, y) \sim_f (z, w)$. Si $(x, y) = (z, w)$, es claro que $(z, w) \sim_f (x, y)$. Por otra parte si $y = 1, x = f(z)$ y $w = 0$, entonces $(x, y) = (f(z), 1)$ y $(z, w) = (z, 0)$; de la definición se concluye que $(z, w) \sim_f (x, y)$. El caso en el que $y = 0, z = f(x)$ y $w = 1$ es análogo al caso anterior, por lo tanto, en cualquier caso se concluye que $(z, w) \sim_f (x, y)$.
3. **Transitividad:** Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ y $(x_3, y_3) \in C \times [0, 1]$ tales que $(x_1, y_1) \sim_f (x_2, y_2)$ y $(x_2, y_2) \sim_f (x_3, y_3)$. Si $y_1 = 0, x_2 = f(x_1)$ y $y_2 = 1$, como $(x_2, y_2) \sim_f (x_3, y_3)$ entonces por definición se tiene que: $x_2 = f(x_3)$ y $y_3 = 0$. Entonces $f(x_1) = x_2 = f(x_3)$, así, usando la inyectividad de f obtenemos que $(x_1, y_1) = (x_3, y_3)$ y deducimos que $(x_1, y_1) \sim_f (x_3, y_3)$. Los demás casos son análogos, por lo tanto, concluimos que la relación es transitiva.

Notemos que lo único que está haciendo esta relación de equivalencia es pegar la tapa $C \times \{0\}$ con la tapa $C \times \{1\}$ y a todos los puntos de $C \times (0, 1)$ los está dejando igual. Entonces, una vez que hayamos definido explícitamente la función f , tendremos que el solenoide S estará representado como un espacio cociente de la forma $C \times [0, 1] / \sim_f$, de manera similar a como se hizo con el cilindro.

Por otra parte, notemos que en la definición anterior se tomó cualquier función biyectiva $f : C \rightarrow C$, pero para que el pegado que determina la relación de equivalencia anterior sea el mismo que describe el método geométrico de la Subsección 3.5, necesitamos una función específica, que describamos a continuación.

4.1. La función “sumar uno”.

El objetivo de este apartado es definir una función $f : C \rightarrow C$ apropiada para nuestros propósitos, utilizando el hecho de que ya tenemos una forma de expresar cada punto del conjunto de Cantor (Subsección 3.2). La idea sería pegar cada punto de la forma $(x, 0)$ con un punto de la forma $(f(x), 1)$ tal y como lo indica la relación de equivalencia que definimos al principio de la esta sección, y de manera que el pegado que esta relación determina, coincida con el que describimos geoméricamente en la Subsección 3.5.

Como vimos al final de la Subsección 3.2, cada $x \in C$ tiene una representación de *ceros y unos*, entonces $x = .a_1a_2a_3a_4\dots$ con $a_i \in \{0, 1\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así pues, será conveniente que nos familiaricemos un poco con el sistema binario. Para ello, analicemos cómo es que sumamos en el sistema decimal, para luego comparar con la manera de sumar en el sistema binario. Por ejemplo, sumando en el sistema decimal tenemos:

$$\begin{array}{r}
 111 \\
 1525996 \\
 + \quad 9 \\
 \hline
 1526005
 \end{array}$$

¿Cuál es la razón de escribir un *uno* en la parte superior?, la respuesta es que cuando trabajamos en el sistema decimal, cada vez que excedemos por cierta cantidad las diez unidades, hay que sumarlas después. Pues algo muy similar sucede cuando trabajamos con el sistema binario; es decir, si sumamos en el sistema binario se tiene que: $0 + 0 = 0$ y “no se lleva nada”, $0 + 1 = 1$ y “no se lleva nada” y $1 + 0 = 1$ y “no se lleva nada”. Notemos que siempre que sumamos cero el número queda igual y “no se lleva nada”, pero si sumamos $1 + 1$ es como sumar $9 + 1$ en el sistema decimal, es decir, $1 + 1 = 0$ y “llevamos uno”.

Una vez establecido cómo sumaremos en el sistema binario, procedemos a definir la función $f : C \rightarrow C$ que estamos buscando. Para ilustrar cómo funciona f , empezaremos definiendo $f(x)$ en el caso particular en que $x = .11010101\dots$

- Primero escribimos al revés a $x = .11010101\dots$, es decir, lo ponemos así: $\dots 10101011$.
- Sumamos 1 (¡en el sistema binario!), de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r}
 11 \\
 \dots 10101011. \\
 + \quad 1 \\
 \hline
 \dots 10101100.
 \end{array}$$

donde los números en la parte superior son los números que debemos sumar después, (como lo hacíamos con la suma en el sistema decimal).

- Finalmente ponemos al revés el número obtenido para tenerlo empezando por el punto, es decir, ponemos al número obtenido ...10101100. como: .00110101...
Concluimos que si $x = .11010101\dots$ entonces $f(x) = .00110101\dots$

Haremos otro ejemplo siguiendo los pasos anteriores con el número $y = .1111101010\dots$, es decir, escribimos a y al revés, le “sumamos 1” en el sistema binario y, finalmente, escribimos el resultado nuevamente al revés:

$$\begin{array}{r}
 11111 \\
 ...010101011111. \\
 + 1 \\
 \hline
 ...010101100000.
 \end{array}$$

Por lo tanto, se tiene que $f(y) = .000001101010\dots$

Notemos que hay una forma más rápida de evaluar la función f en los puntos del conjunto de Cantor sin hacer todo lo anterior, excepto para $x = .11111111\dots$, pero en este caso sabemos que $f(x) = .00000000\dots$ aplicando el método anterior.

- Fijémonos en el primer cero que aparece en la representación de *ceros* y *unos* del número y .

$$y = .11111]0[101010\dots$$

- Cambiamos los *unos* por *ceros* hasta donde está ese primer *cero*.

$$.00000]0[101010\dots$$

- Cambiamos ese primer *cero* por *uno*.

$$.00000]1[101010\dots$$

- El resto de las cifras se quedan sin cambios, y por lo tanto:

$$f(y) = .000001101010\dots$$

Con este método más rápido para evaluar la función f en los puntos del conjunto de Cantor es fácil checar que:

$$\text{Si } w = .1111010101\dots, \text{ entonces } f(w) = .0000110101\dots$$

$$\text{Si } z = .1000111101\dots, \text{ entonces } f(z) = .0100111101\dots$$

Cabe mencionar que la primera forma para evaluar la función f en los puntos del conjunto de Cantor y la segunda forma más simplificada son equivalentes, ya que si nos fijamos en el primer *cero* que aparece en la expresión de x , entonces las cifras anteriores deben ser *unos*, y si a estos *unos* les sumamos *uno*, siempre obtendremos *cero* ya que $1 + 1 = 0$ y siempre se “lleva uno”. Este último *uno* que se “lleva” se sumará con el primer *cero* que tenemos en la expresión y es por esto que ese *cero* se cambia por *uno*. Finalmente sumamos *cero* a las demás cifras y es por ello que éstas no cambian.

Después de haber definido la función f y haber visto cómo trabaja dicha función, debemos hacer notar que el pegado que f induce en $C \times [0, 1]$ está pegando los puntos de la tapa $C \times \{1\}$, con los puntos de la tapa $C \times \{0\}$, tal y como lo hicimos geoméricamente en la Subsección 3.5. Haremos esto a continuación.

Tomemos primero un punto de la forma $x = .0a_2a_3a_4... \in C$. Como la primera cifra de x es cero, el punto $(x, 0)$ justamente es como los que se encuentran indicados por la llave azul en la parte inferior izquierda de la Figura 21; entonces, si evaluamos $f(x)$, con $x = .0a_2a_3a_4...$ obtenemos que $f(x) = .1a_2a_3a_4...$. Como la primera cifra de $f(x)$ es uno, deducimos que $(f(x), 1)$ está en la parte superior derecha de $C \times [0, 1]$. Más aún, como todas las cifras de x y $f(x)$ -salvo la primera- coinciden, podemos deducir que $(f(x), 1)$ se obtiene trasladando $(x, 0)$ hacia la derecha y luego hacia arriba. Notemos que esto es justamente lo que se hacía con los puntos determinados por la llave azul de la Figura 21.

Ahora, tomemos un punto de la forma $x = .10a_3a_4a_5... \in C$. Como la primera cifra de x es uno, y la segunda es cero, el punto $(x, 0)$ justamente es como los que se encuentran indicados por la llave roja en la parte inferior derecha de la Figura 22; entonces, si evaluamos $f(x)$, con $x = .10a_3a_4a_5...$ obtenemos que $f(x) = .01a_3a_4a_5...$. Como la primera cifra de $f(x)$ es cero, deducimos que $(f(x), 1)$ está en la parte superior izquierda de $C \times [0, 1]$; además la segunda cifra de $f(x)$ es uno, entonces $(f(x), 1)$ está en la parte derecha de la parte superior izquierda de $C \times [0, 1]$. Más aún, como todas las cifras de x y $f(x)$ -salvo la primera y segunda- coinciden, podemos deducir que $(f(x), 1)$ se obtiene trasladando $(x, 0)$ hacia la izquierda y luego hacia arriba. Notemos que esto es justamente lo que se hacía con los puntos determinados por la llave roja de la Figura 22.

De manera similar, notemos que un punto de la forma $(x, 0) = (.110a_4a_5..., 0)$ se pega con el punto $(f(x), 1) = (.001a_4a_5..., 1)$, y como todas las cifras de x y $f(x)$ -salvo la primera, segunda y tercera- coinciden, podemos deducir que $(f(x), 1)$ se obtiene trasladando $(x, 0)$ hacia la izquierda y luego hacia arriba. Notemos también que esto es justamente lo que se hacía con los puntos determinados por la llave verde de la Figura 23. Finalmente el punto $p = (.11111..., 0)$ se pega con el punto $q = (.00000..., 1)$, como indicaba la Figura 24.

Deducimos entonces que con esta función f , y con la relación \sim_f que describimos en la Definición 4.1, obtenemos un espacio equivalente al que construimos geoméricamente en la Subsección 3.5. Notemos que esta manera de pegar refleja las torceduras que hicimos al construir el solenoide. Así pues, hemos visto que el procedimiento geométrico y el procedimiento analítico para pegar las tapas de $C \times [0, 1]$ son el mismo.

Concluimos esta sección haciendo algunos comentarios sobre la función f . Notemos primero que ningún par de puntos distintos de C van a dar a un mismo punto cuando se aplica la función f , así que la función f es inyectiva; más aún notemos que todo punto en C viene de algún punto en C , lo cual nos dice que la función f es suprayectiva. De esta manera obtenemos que la función f que utilizamos es una biyección del conjunto de Cantor en sí mismo; además la función f es continua, ya que manda puntos cercanos en puntos cercanos.

Estos hechos se visualizan fácilmente en la manera de pegar las tapas de $C \times [0, 1]$ en las figuras de la Subsección 3.5.

5. Conclusiones.

Como mencionamos en la introducción de este trabajo, el estudio de los solenoides aparece en varias áreas de la matemática; sin embargo, muchas veces se utilizan para su estudio herramientas que requieren de un grado fuerte de abstracción. En el desarrollo de este trabajo la intención es presentar una construcción analítica del solenoide diádico haciendo uso de ideas geométricas que sean accesibles para los estudiantes de licenciatura o de los primeros semestres del posgrado.

Con estas ideas en mente, hemos preferido dar una construcción del solenoide diádico como un espacio cociente en vez de representarlo por medio de un *límite inverso* [N, págs. 17-34], herramienta muy utilizada en topología la cual requiere un mayor grado de abstracción que la que muchas veces se tiene en la licenciatura; de manera alternativa, los estudiantes pueden visualizar al solenoide diádico en un espacio ambiente familiar para ellos como lo es \mathbb{R}^3 .

Finalmente, cabe mencionar que el material expuesto en este artículo está basado principalmente en el artículo [G3]; un lector interesado en argumentos más formales puede consultar esta última referencia, aunque el lector que guste adentrarse más en el estudio de las técnicas usadas en este trabajo puede consultar además las referencias [G1] y [G2].

Agradecemos al árbitro la cuidadosa revisión que hizo de este trabajo, así como sus valiosas sugerencias, que sin duda mejoraron el resultado del mismo.

Referencias

- [Da] van Dantzig, David. *Über topologischhomogene Kontinua*. Fund. Math., **15** (1930), 102–125.
- [De] Devaney, Robert L. *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, 1989.
- [F] Fort, Marion K., Jr. *Images of plane continua*. Amer. J. Math., **81**, (1959), 541–546.
- [Fr] Freudenthal, Hans. *Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen*. Comp. Math., **4** (1937), 145–234.
- [G1] Gutek, Andrzej. *A generalization of solenoids*. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai (Proc. Fourth Colloq, Budapest 1978), **23**, North-Holland, Amsterdam-New York, (1978), 547–554.
- [G2] Gutek, Andrzej. *On Compact spaces which are locally Cantor bundles*. Fund. Math., **108** (1980), n°1, 27–31.

- [G3] Gutek, Andrzej. *Solenoids and homeomorphisms on the Cantor set*. Comment. Math. Prace Mat., **21** (1980), n°2, 299–302.
- [Ha] Hagopian, Charles L. *A characterization of solenoids*. Pacific Journal of Math., **68** (1977), 425–435.
- [He] van Heemert, Anthonie. *Topologische Gruppen und Unzerlegbare Kontinua*. Comp. Math., **5** (1938), 319–326.
- [Mc] McCord, Michael C. *Inverse Systems*. Ph. D. Dissertation, Yale University (1963).
- [Mo] Moore, Calvin C.; Schochet, Claude. *Global Analysis on Foliated Spaces*. Springer-Verlag, 1988.
- [Mu] Munkres, James R. *Topología*, 2ª edición. Prentice Hall, Inc. Madrid, 2002.
- [N] Nadler, Sam B., Jr. *Continuum Theory An Introduction*. Marcel Dekker, Inc. New York-Basel-Hong Kong, 1992.
- [Vi] Vietoris, Leopold. *Über den Höheren Zusammenhang Kompakter Räume und eine Klasse von Zusammenhangstreuen Abbildungen.*, Math. Ann., **97** (1927), 454–472.
- [Wa] Wallace, Alexander D. *The structure of topological semi-groups*. Bull. Amer. Math. Soc., **61** (1955), 95–112.