Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

# Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica

Emilio Lluis-Puebla

www.sociedadmatematicamexicana.org.mx

Serie: Textos. Vol. 5 (2005)
ISBN 968-9161-04-0

# ÁLGEBRA HOMOLÓGICA, COHOMOLOGÍA DE GRUPOS Y K-TEORÍA ALGEBRAICA CLÁSICA

Emilio Lluis-Puebla

Sociedad Matemática Mexicana

Obra compuesta y formada en TEX por Flor de María Aceff Sánchez

Hecho en México.

ISBN 0-201-62917-8
Addison-Wesley Iberoamericana

ISBN 968-6394-05-2
Sistemas Técnicos de Edición

ABCDEFGHIJ-M 99876543210

# PREFACIO

El Algebra Homológica es una de las principales creaciones de la matemática del presente siglo, utilizada prácticamente en todas sus ramas, así como otras disciplinas de la ciencia. Este libro expone temas que antes habían sido reservados para los estudios de posgrado, y viene a llenar un hueco en la escasa literatura sobre estos temas, pues mientras unos textos presuponen cierta madurez del estudiante, otros son muy elementales. También es el único texto que introduce en nivel de licenciatura la Cohomología de Grupos –que dio origen al Álgebra Homológica– y la $K$-Teoría Algebraica –la rama más reciente de la Matemática–, así como su estrecha relación.

Cada sección de los cinco capítulos que conforman la obra contiene una serie de ejercicios que son una parte fundamental del texto, le permiten al lector adquirir destreza y le brindan la oportunidad de crear matemáticas. En algunos de ellos se definen conceptos que se utilizan posteriormente. A lo largo del texto se incluyen ejercicios conducentes a establecer una interpretación de los grupos de cohomología de dimensión $n$ en términos de cierto tipo de extensiones de grupos, la cual se da en IV.5. Las referencias sin números romanos se refieren a resultados del capítulo en consideración.

En la introducción se presenta el material que contiene el libro de manera que el lector pueda obtener brevemente una idea global.

Este libro está diseñado para un curso de un año (dos semestres estudiando los capítulos I, II y III en el primero y los capítulos IV y V en el segundo) al nivel de licenciatura o de un semenstre (omitiendo quizá el capítulo V) para estudios de posgrado. Se presupone que el lector ya posee los conocimientos del Algebra Moderna (Teoría de Grupos, Anillos y Campos).

Durante varios años he impartido cursos basados en el material aquí incluido tanto a alumnos de licenciatura y de posgrado como a colegas en seminarios y cursos de actualización. A todos ellos les agradezco su atención y sus oportunos comentarios.

Deseo agradecer a mis alumnos Flor de María Aceff y Raúl Mayoral el haber transcrito en TEX el manuscrito. En forma muy especial mi más grande reconocimiento a Flor de María Aceff por haber puesto su talento matemático y artístico en éste, también, su libro.

También deseo agradecer a mi padre Emilio Lluis Riera; a mis exalumnos y ahora colegas, F. Zaldívar y A. Adem; el haber utilizado versiones preliminares en sus cursos o leido y hecho interesantes sugerencias. Sin embargo cualquier falta u omisión es exclusivamente mía.

Finalmente, mi reconociemiento al Departamento de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la UNAM por las facilidades prestadas para trabajar las versiones preliminares utilizando el equipo TEX. Así mismo agradezco las atenciones y facilidades proporcionadas por Addison-Wesley Iberoamericana S.A.

Octubre de 1989 Emilio Lluis–Puebla

## PREFACIO (SEGUNDA EDICIÓN)

Este libro (primer texto matemático publicado en el sistema TEX en México) cumple ya quince años de ser utilizado exitosamente como texto sobre la materia en diversas universidades de España y el Continente Americano, incluyendo algunas universidades de Estados Unidos de Norteamérica y, desde luego, en México.

He tenido el gusto de ofrecer conferencias en muchas universidades de Centroamérica y Sudamérica donde me he encontrado con colegas, que llevan mi libro como texto. Me han solicitado una nueva edición pues la anterior es imposible de conseguir. Esta nueva edición, donde he corregido algunos errores tipográficos y atendido nuevas ideas o sugerencias que al través de los años me he hecho y han hecho mis propios alumnos (a quienes mucho agradezco), la he incluido dentro de las Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana mostrando (como matemático y Editor Ejecutivo de las mismas) la confianza en este tipo de publicación. Éste tiene una excelente accesibilidad, así como un nulo costo, que de no ser así, resultaría elevado para los estudiantes y colegas de muchos lugares. Las Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana tienen acceso libre en línea, pueden copiarse en el ordenador o imprimirse en papel para uso personal. Además, a partir de esta nueva edición, el lector podrá adquirir las publicaciones en CD o impresas en papel empastado.

Otoño de 2005 Emilio Lluis-Puebla

# ÍNDICE GENERAL

# INTRODUCCIÓN

## TEORÍA DE MÓDULOS

El Algebra Homológica, totalmente inexistente hace 55 años, está invadiendo la totalidad de la Matemática de la misma manera en que la Teoría de Grupos y el Algebra Lineal lo hicieron a principios del presente siglo.

Siempre que se habla de alguna rama de las matemáticas se establecen los objetos de estudio. Así, los grupos son los objetos de estudio de la Teoría de Grupos, los anillos de la Teoría de Anillos, etc. Los objetos que estudiaremos serán los módulos. El concepto de módulo proporciona una generalización adecuada de los conceptos de espacio vectorial y de grupo abeliano. Estos objetos no son tan especiales, ya que (en lenguaje categórico) toda categoría abeliana pequeña puede considerarse dentro de una categoría de módulos sobre un anillo adecuado [F].

Sea $\Lambda$ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. No es necesario considerar el caso particular en que $\Lambda$ sea conmutativo (se puede considerar el caso no conmutativo) pero, por razones de sencillez, así lo haremos por el momento. Entonces diremos que una pareja $(M, \mu)$ es un *$\Lambda$-módulo o módulo sobre el anillo* $\Lambda$ si $M$ es un grupo abeliano aditivo y $\mu$ es un homomorfismo de anillos $\mu\colon \Lambda \longrightarrow End(M, M)$, dado por $\mu(\alpha)(x) = \alpha x$.

Si $\Lambda = \mathbb{Z}$, entonces cualquier grupo abeliano puede considerarse como un $\mathbb{Z}$-módulo, y si $\Lambda$ es un campo $K$, entonces un $K$-módulo es un espacio vectorial sobre $K$.

¿Cómo relacionamos dos $\Lambda$-módulos? Así como a los conjuntos los podemos relacionar mediante funciones, a los grupos mediante funciones que preservan estructura de grupo, etc., a los $\Lambda$-módulos los relacionaremos mediante funciones que preservan la estructura de $\Lambda$-módulo llamadas *homomorfismos.* Entonces, si $M$ y $N$ son $\Lambda$-módulos, $f\colon M \longrightarrow N$ es un *homomorfismo de $\Lambda$-módulos* si f preserva la estructura de grupo abeliano, i.e. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y además $f(\alpha x) = \alpha f(x); \alpha \in \Lambda;\ x, y \in M$. Dado un homomorfismo $f\colon M \longrightarrow N$ de $\Lambda$-módulos podemos hablar de su *núcleo* e *imagen*, denotados por *ker* $f$ e *im* $f$, respectivamente. También podemos hablar de *submódulos* de un $\Lambda$-módulo.

Sucede lo esperado: la composición de homomorfismos resulta ser un homomorfismo; la imagen bajo un homomorfismo de un submódulo es un submódulo; la imagen inversa de un submódulo bajo un homomorfismo es un submódulo; en particular, el núcleo y la imagen de un homomorfismo son submódulos (de donde deben serlo).

También existe el concepto de *módulo cociente* cuyos elementos son las distintas clases laterales de un submódulo en un módulo.

Relacionaremos varios $\Lambda$-módulos mediante una colección de homomorfismos que cumplan lo siguiente: diremos que una sucesión de $\Lambda$-módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

es semiexacta en $M_i$ si $im\ f_{i-1} \subset ker\ f_i$, es decir, si el núcleo del homomorfismo saliente contiene a la imagen del homomorfismo entrante. Si es semiexacta en cada $\Lambda$-módulo $M_i$, la llamaremos *sucesión semiexacta.* Esto equivale a decir que la composición $f_i \circ f_{i-1}$ es el homomorfismo trivial, denotado por 0, i.e., $f_i \circ f_{i-1} = 0$. También diremos que una sucesión es *exacta* en $M_i$ si es semiexacta e $im\ f_{i-1} \supset ker\ f_i$. Esto es, la sucesión es exacta en $M_i$ si, y sólo si, $im\ f_{i-1} = ker\ f_i$. Si es exacta en cada $\Lambda$- módulo $M_i$, la llamaremos *sucesión exacta.* Toda sucesión exacta es semiexacta, pero no es cierto que toda sucesión semiexacta sea exacta.

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

se llama *sucesión exacta corta.* Es fácil comprobar que, en una sucesión exacta corta, $f$ es un homomorfismo inyectivo llamado *monomorfismo* y que $g$ es un homomorfismo suprayectivo llamado *epimorfismo.* Utilizaremos la siguiente notación para una sucesión exacta corta:

$$M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''.$$

Es inmediato comprobar que una sucesión exacta corta no es otra cosa que un disfraz de un submódulo y el módulo cociente de un $\Lambda$-módulo de la sucesión exacta corta

$$N \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M/N$$

El concepto de sucesión exacta corta fue notado por Hurewicz en 1941. La notación de flechas surgió de las investigaciones topológicas de los años cuarenta.

La categoría de $\Lambda$-módulos se estudia examinando el comportamiento de ciertos funtores. Los más importantes son $Hom$, $\otimes$ y otros funtores relacionados y derivados de éstos.

Denotemos por $Hom_\Lambda(M,N)$ al conjunto de homomorfismos del $\Lambda$-módulo $M$ en el $\Lambda$-módulo $N$.

Los siguientes teoremas pueden considerarse como el comienzo del Algebra Homológica.

**TEOREMA**. Si $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \xrightarrow{\psi'} N''$ es una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos, entonces la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N') \xrightarrow{\psi_*} Hom_\Lambda(M,N) \xrightarrow{\psi'_*} Hom_\Lambda(M,N'')$$

es exacta.

**TEOREMA**. Si $M' \xrightarrow{\varphi} M \overset{\varphi'}{\twoheadrightarrow} M''$ es una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos, entonces la sucesión inducida

$$Hom_\Lambda(M',N) \xleftarrow{\varphi^*} Hom_\Lambda(M,N) \xleftarrow{\varphi'^*} Hom_\Lambda(M'',N) \longleftarrow 0$$

es exacta.

Es de esperar que el caso en que $\psi'_*$ sea suprayectiva resulte interesante. Los $\Lambda$-módulos que cumplen el hecho de que $\psi_*$ sea epimorfismo siempre que $\psi$ lo sea, se llaman *$\Lambda$-módulos proyectivos*.

Imitando el caso de los $K$-módulos o espacios vectoriales sobre un campo $K$, decimos que un $\Lambda$-módulo es *libre* si posee una base. Resulta ser que todo módulo libre es proyectivo y que todo $\Lambda$-módulo es cociente de un módulo libre.

De una manera dual se define un $\Lambda$-módulo *inyectivo* como aquel que, al ser $\varphi$ monomorfismo, implique que $\varphi^*$ sea epimorfismo. Resulta ser cierto que todo módulo es isomorfo a un submódulo de un módulo inyectivo.

El concepto de módulo se debe a Kronecker, quien utilizó módulos sobre anillos de polinomios, pero solamente en los últimos 40 años se ha reconocido su importancia en el Algebra. Los módulos proyectivos fueron utilizados por vez primera y de una manera efectiva por Cartan y Eilenberg en 1956. Fue Noether, en los años veinte, quien enfatizó la importancia de los homomorfismos.

El funtor *Hom* se conocía desde hace mucho tiempo, pero apareció por primera vez bajo ese nombre en los trabajos de Eilenberg y Mac Lane en 1942.

## ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

El Algebra Homológica surgió como lo hacen los grandes desarrollos matemáticos: como un entrelazamiento de diferentes áreas y de diferentes ideas de muchos matemáticos. La presentación que haremos es simplemente la purificación de la interacción entre la Topología y el Algebra.

Sea $\{C_n\}_{n\in Z}$ una familia de $\Lambda$-módulos y $\{\partial_n: C_n \longrightarrow C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de homomorfismos de $\Lambda$-módulos tales que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Un *complejo de cadenas o cadena sobre* $\Lambda$ es una pareja $C = \{C_n, \partial_n\}$ y la escribimos como sigue:

$$C: \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

Esto significa que una cadena no es otra cosa que una sucesión semiexacta descendente de $\Lambda$-módulos.

El concepto central del Álgebra Homológica es el siguiente: consideremos una cadena $C: \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$. El *módulo de homología de grado* $n$ de $C$, denotado con $H_n(C)$ es el cociente $H_n(C) = ker\ \partial_n / im\ \partial_{n+1}$. Lo que $H_n(C)$ hace es medir la inexactitud de la cadena $C$, pues por ejemplo, si $C$ es exacta, entonces $im\ \partial_{n+1} = ker\ \partial_n$ y, por lo tanto, $H_n(C) = 0$. Lo que hemos hecho es asociarle a una cadena $C$ un módulo graduado $H_*(C) = \{H_n(C)\}$ que llamaremos *homología de la cadena* $C$. Sucede que un morfismo de cadenas $\varphi: C \longrightarrow D$ induce un morfismo (bien definido, de grado 0) $\varphi_*: H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$ de módulos graduados. Luego, $H_*(\_\_)$ es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas a la categoría de $\Lambda$-módulos graduados.

Si consideramos familias semiexactas con índices en orden creciente $\{C^n\}_{n\in Z}$, obtendremos conceptos duales; hablaremos de *cocadenas, de cohomología de una cocadena* etc.

Consideremos una cadena positiva (i.e. $P_n = 0$ para $n < 0$) exacta de $\Lambda$-módulos proyectivos $P = \{P_n, \partial_n\}$, es decir, tal que $H_n(P) = 0$ para $n \geq 1$ y pidamos que $H_0(P) \cong M$. La escribiremos así:

$$P: \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

y la llamaremos *resolución proyectiva* de $M$. Se sabe que todo $\Lambda$-módulo posee una resolución proyectiva. Dada una resolución proyectiva de un $\Lambda$-módulo $M$ podemos considerar la *resolución proyectiva reducida de* $M$.

$$P_M\colon \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

No se pierde ninguna información acerca de $P$ (pues $M = coker\ \partial_1$), y tenemos la ventaja de que $P_M$ consta exclusivamente de $\Lambda$-módulos proyectivos. La idea central del Algebra Homológica es la de funtor derivado. Sea $\mathbf{Mod}_\Lambda$ la categoría de $\Lambda$-módulos izquierdos o derechos y $\mathbf{Ab}$ la de grupos abelianos. Sea $T$ un funtor covariante aditivo de $\mathbf{Mod}_\Lambda$ en $\mathbf{Ab}$. Entonces existe una sucesión de funtores de $\mathbf{Mod}_\Lambda$ en $\mathbf{Ab}$

$$L_nT\colon \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Ab} \quad n = 0, 1, \ldots$$

que se llama *funtor derivado izquierdo de grado* $n$ de $T$. $L_nT(M)$ se obtiene primero tomando una resolución proyectiva reducida $P_M$ del $\Lambda$-módulo $M$, luego formando el complejo $TP_M$ y finalmente obteniendo su homología, i.e., $L_nT(M) = H_n(TP_M)$.

Análogamente, sea $S$ un funtor contravariante de $\mathbf{Mod}_\Lambda$ en $\mathbf{Ab}$. El *funtor derivado derecho* de $S$, $R^nS(M)$, se obtiene tomando una resolución proyectiva reducida $P_M$ de $M$, luego formando el complejo $SP_M$ y finalmente obteniendo su cohomología, i.e., $R^nS(M) = H^n(SP_M)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Por ejemplo, el funtor derivado izquierdo del funtor covariante $N \otimes_\Lambda \_$, $L_n(N \otimes_\Lambda \_)$, $n \geq 0$, se denota con $Tor_n^\Lambda(N, \_\,)$.

Asimismo, el funtor derivado derecho del funtor contravariante $Hom_\Lambda(\_\,, M)$, $R^n(Hom_\Lambda(\_\,, M))$, $n \geq 0$, se denota con $Ext_\Lambda^n(\_\,, M)$.

Fue $Ext_\Lambda^1(\_\,, N)$ el que condujo a Eilenberg y Mac Lane en 1943 a introducir el concepto de categoría y funtor. Consideraremos un caso muy importante que dio origen al Algebra Homológica, a saber, la (Co)Homología de Grupos.

## COHOMOLOGÍA DE GRUPOS

Un $G$-módulo izquierdo consiste en un grupo abeliano $M$ junto con un homomorfismo $k\colon G \longrightarrow Aut(M)$.

Consideremos el anillo entero $\mathbb{Z}G$ de un grupo $G$, $P$ una $G$-resolución proyectiva del $G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ y $N$ un $G$-módulo. Entonces

$$P_{\mathbb{Z}}\colon \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

es una $G$-resolución proyectiva reducida de $\mathbb{Z}$ (cada $P_i$ es un $G$-módulo proyectivo). Hagamos el producto tensorial de $P_{\mathbb{Z}}$ con $N$ sobre el anillo $\Lambda = \mathbb{Z}G$:

$$P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} N\colon \cdots \longrightarrow P_n \otimes_{\mathbb{Z}G} N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} N \longrightarrow 0$$

que es una cadena y, por lo tanto, podemos medir su inexactitud mediante $H_n(P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} N)$ para cada dimensión. Denotaremos $H_n(P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} N)$ con $H_n(G;N)$ y lo llamaremos *grupo de homología de grado $n$ de un grupo $G$ con coeficientes en un $G$-módulo derecho $N$*.

Podemos también considerar el caso dual: aplicamos el funtor $Hom_{\mathbb{Z}G}(\_\,, N)$ a $P_{\mathbb{Z}}$ y obtenemos

$$Hom_{\mathbb{Z}G}(P_{\mathbb{Z}}, N)\colon \cdots \longleftarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(P_n, N) \longleftarrow \cdots \longleftarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(P_0, N) \longleftarrow 0$$

que es una cocadena y, por lo tanto, podemos medir su inexactitud mediante $H^n(Hom_{ZG}(P_Z, N))$ en cada grado. Denotaremos $H^n(Hom_{ZG}(P_Z, N))$ con $H^n(G,N)$ y lo llamaremos *grupo de cohomología de grado $n$ de un grupo $G$ con coeficientes en un $G$-módulo izquierdo $N$*.

La homología y cohomología de un grupo $G$ presentan las siguientes propiedades principales:

(i) $H_n(G;P) = 0$ para $n \geq 1$ si $P$ es $\mathbb{Z}G$-módulo proyectivo.

(ii) $H^n(G;I) = 0$ para $n \geq 1$ si $I$ es $\mathbb{Z}G$-módulo inyectivo.

(iii) $H_0(G;N) = N_G = N/\{gy - y\}$, $g \in G$, $y \in N$ es el más grande de los cocientes de $N$ en los cuales $G$ actúa trivialmente.

(iv) $H^0(G;N) = N^G$, donde $N^G$ es el submódulo más grande de $G$ en el cual $G$ actúa trivialmente, i.e., $N^G$ denota a *los invariantes de $N$ bajo la acción de $G$*.

(v) $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong G/[G,G]$ y $H^1(G;\mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(G/[G,G],\mathbb{Z})$. Por ejemplo: $H_1(\mathbb{Z}/n,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n$ y $H^1(\mathbb{Z}/n;\mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n,\mathbb{Z}) = 0$.

(vi) Si $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ es una presentación libre del grupo $G$ entonces $H_2(G,\mathbb{Z}) \cong (R \cap [F,F])/[F,R]$ y es el núcleo de la extensión central universal siguiente:

$$1 \longrightarrow H_2(G;\mathbb{Z}) \longrightarrow [F,F]/[R,F] \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

(vii) Existe una correspondencia biyectiva entre $H^2(G,N)$ y el conjunto de clases de equivalencia de extensiones de $N$ por $G$.

Recientemente se encontró una interpretación para los grupos de cohomología $H^{n+1}(G;N)$ en términos de $n$-extensiones cruzadas. Véase [G] para una exposición detallada de esta interpretación.

La (Co)homología de grupos surgió de la extensa algebraización de la Topología Combinatoria que tuvo lugar en los últimos años veinte. Alexandroff y Hopf señalaron que los grupos de homología aparecieron en 1926 cuando discutían la demostración del teorema del punto fijo de Lefschetz con Emmy Noether. Ella sugirió que se entendería mejor si se usaran los grupos de homología. El estudio de las Extensiones de Grupos y de la Teoría de Campos de Clases en 1930 preparó el terreno para el desarrollo de la Homología de Grupos. Durante la Segunda Guerra Mundial aparecieron cuatro contribuciones independientes que describían grupos de homología $H_n(G;Z)$ y $H^n(G;Z)$ de grado superior; se debieron a Hopf, Freudenthal, Eilenberg-Mac Lane y Eckmann y se inspiraron en el trabajo de 1942 desarrollado por Hopf. Más tarde, la cohomología de grupos fue una de las motivaciones para el desenvolvimiento del Algebra Homológica. Así, creada como una herramienta se convirtió después en una teoría y estableció un enlace entre la Topología y el Algebra. No es posible comentar aquí las aplicaciones de la homología de grupos: baste mencionar su estrecha relación con la $K$-Teoría Algebraica, la cual le ha dado un nuevo impulso.

## K-TEORÍA ALGEBRAICA

Así como el Algebra Homológica empieza por el hecho "lamentable" de que no todos los módulos son proyectivos, la $K$-Teoría Algebraica empieza por el hecho "lamentable" de que no todos los módulos proyectivos son libres.

La $K$-Teoría Algebraica comenzó a finales de la década de los cincuentas con la analogía de Serre entre haces vectoriales y módulos proyectivos: existe una correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo de haces vectoriales reales sobre $X$ y clases de isomorfismo de módulos finitamente generados sobre el anillo de funciones reales continuas sobre $X$. Por medio de esta correspondencia, el conocimiento de los haces vectoriales se utiliza para sugerir resultados, demostraciones y construcciones para los módulos proyectivos.

En geometría algebraica, los haces vectoriales sobre variedades algebraicas se definen como gavillas localmente libres. De hecho, existe una correspondencia biyectiva entre haces vectoriales y gavillas localmente libres de rango finito. El espacio afín $A_k^n$ sobre un campo $k$ es el espectro primo *Spec* $k[t_1, \cdots, t_n]$. Este es un esquema afín sobre $k[t_1, \cdots, t_n]$ y las gavillas localmente libres corresponden a módulos proyectivos finitamente generados sobre $k[t_1, \cdots, t_n]$. Así pues, los módulos proyectivos finitamente generados corresponden a haces vectoriales sobre $A_k^n$. La conjetura de Serre era la siguiente: ¿es todo haz vectorial sobre $A_k^n$ un haz trivial? o equivalentemente, ¿son libres todos los módulos proyectivos finitamente generados sobre $k[t_1, \cdots, t_n]$?

Una de las metas de la $K$-Teoría Algebraica fue en un principio, la de proveer nuevas técnicas para atacar el problema de Serre. Sin embargo, ninguna de las soluciones independientes de Suslin y Quillen en 1976 se basó en la $K$-Teoría Algebraica.

La $K$-Teoría Algebraica Clásica es una parte del Algebra Lineal General. Es, intuitivamente, una generalización del teorema que establece la existencia y unicidad de las bases para espacios vectoriales y también de la Teoría de Grupos del grupo lineal general sobre un campo.

La $K$-Teoría Algebraica tiene sus raíces en el trabajo de Grothendieck sobre el teorema de Riemann-Roch, donde introdujo el funtor $K_0$. Sea $\Lambda$ un anillo con unidad. Definimos $K_0(\Lambda)$ como el grupo abeliano con un generador $[P]$ para cada $\Lambda$-módulo proyectivo finitamente generado $P$, y una relación $[P] = [P'] + [P'']$ para cada sucesión exacta

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0.$$

Llamamos a $K_0(\Lambda)$ el *grupo de Grothendieck* de $\Lambda$, i.e., el grupo abeliano de clases de isomorfismo de $\Lambda$-módulos proyectivos finitamente generados. Decimos que dos $\Lambda$-módulos $P$ y $Q$ son isomorfos establemente si $P \oplus \Lambda^r \cong Q \oplus \Lambda^r$ para alguna $r \in Z$, $r \geq 0$. $K_0(\Lambda)$ goza de las siguientes propiedades:

(i) Dos elementos $[P]$ y $[Q]$ en $K_0(\Lambda)$ son iguales si, y sólo si, $P$ y $Q$ son isomorfos establemente.

(ii) $K_0(\_\_)$ es un funtor de la categoría de anillos en la categoría de grupos abelianos.

(iii) $K_0(\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n) \cong K_0\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus K_0\Lambda_n$.

Observamos que la operación aditiva en $K_0(\Lambda)$ proviene de la suma directa de módulos, i.e., $[P]+[Q]=[P\oplus Q]$ y que, si $\Lambda$ es conmutativo, entonces el producto tensorial de módulos hace de $K_0(\Lambda)$ un anillo conmutativo, i.e., $[P]+[Q]=[P\oplus Q]$.

Sea $GL_n\Lambda$ el grupo lineal general de matrices invertibles de $n\times n$ con coeficientes en $\Lambda$. Si identificamos a cada matriz $A\in GL_n\Lambda$ con la matriz $\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in GL_{n+1}(\Lambda)$ obtenemos inclusiones $GL_1(\Lambda)\subset GL_2(\Lambda)\subset GL_3(\Lambda)\cdots$. Denotaremos su límite directo con $GL(\Lambda)$. En 1939, Whitehead demostró que el subgrupo $E(\Lambda)\subset GL(\Lambda)$ generado por todas las matrices elementales era igual al subgrupo conmutador $[GL(\Lambda),GL(\Lambda)]$. Por lo tanto, $E(\Lambda)$ es un subgrupo normal de $GL(\Lambda)$ y el cociente $GL(\Lambda)/E(\Lambda)$ es un grupo abeliano bien definido. Este grupo se define como $K_1\Lambda$ y se llama el *grupo de Whitehead de* $\Lambda$. Es inmediato comprobar que $K_1$ es un funtor de la categoría de anillos en la categoría de grupos abelianos.

Si $\Lambda$ es conmutativo, definimos $SK_1(\Lambda)$ como $SL(\Lambda)/E(\Lambda)$ donde $SL(\Lambda)$ es el grupo lineal especial. Existe una descomposición en suma directa $K_1(\Lambda)\cong\Lambda^*\oplus SK_1(\Lambda)$, donde $\Lambda^*$ denota el grupo de unidades de $\Lambda$. Si $\Lambda$ es un campo, un anillo local, un anillo euclidiano o los enteros algebraicos en una extensión algebraica finita de $\mathbb{Q}$, entonces $SK_1(\Lambda)=0$ y, por tanto, $K_1(\Lambda)\cong\Lambda^*$.

Durante los últimos años de la década de los sesenta, uno de los problemas mayores de la $K$-Teoría Algebraica era el de definir funtores $K_n\Lambda$ para toda $n\in Z$. Esto fue sugerido por analogía con la $K$-Teoría Topológica.

En 1969, Milnor propuso una definición de $K_2(\Lambda)$ que poseía propiedades análogas a $K_0$ y $K_1$. El vio que, en el grupo $E_n(\Lambda)$, las matrices elementales $e_{ij}^{\lambda}$ satisfacían ciertas relaciones obvias. Siguiendo a Steinberg, Milnor introdujo un grupo abstracto $St_n(\Lambda)$ definido por generadores $x_{ij}^{\lambda}$ y relaciones que imitaban el comportamiento de esas matrices elementales. Definiendo el homomorfismo canónico

$$\phi_n\colon St_n(\Lambda)\longrightarrow E_n(\Lambda)\subset GL_n(\Lambda)$$

dado por $\phi_n(x_{ij}^{\lambda})=e_{ij}^{\lambda}$, y pasando al límite directo obtenemos $\phi\colon St(\Lambda)\longrightarrow GL(\Lambda)$ tal que $\phi(St(\Lambda))=E(\Lambda)$. Entonces Milnor definió $K_2(\Lambda)=ker\ \phi$. Por abuso de notación quitaremos los paréntesis.

$K_2\Lambda$ disfruta de las siguientes propiedades:

(i) $K_2\Lambda$ es igual al centro del grupo de Steinberg $Z(St\Lambda)$

(ii) $K_2\Lambda$ es un grupo abeliano tal que

$$1 \longrightarrow K_2\Lambda \longrightarrow St\Lambda \longrightarrow GL\Lambda \longrightarrow K_1\Lambda \longrightarrow 1$$

es exacta.

Veamos ahora cómo se relacionan la cohomología de grupos y la $K$-Teoría Algebraica Clásica.

Como hemos visto, $H_1(G;\mathbb{Z}) \cong G/[G,G]$ y $H_2(G;Z) \cong R \cap [F,F]/[F,R]$, y también definimos $K_1\Lambda$ como $GL\Lambda/E\Lambda = GL\Lambda/[GL\Lambda, GL\Lambda]$. Por lo tanto, $K_1\Lambda$ no es otra cosa que $H_1(GL\Lambda;\mathbb{Z})$.

Para relacionar $K_2$ y $H_2$ necesitamos el concepto de extensión central universal. Una *extensión central* de un grupo $G$ es un par $(X,\phi)$ donde $X$ es también un grupo, $\phi: X \longrightarrow G$ es suprayectivo y $ker\ \phi \subset Z(X)$.

Una extensión $(X,\phi)$ se llama *universal* si, para toda extensión central $(X',\phi')$ de $G$, existe un homomorfismo único $\psi: X \longrightarrow X'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & G \\ \downarrow\psi & & \| \\ X' & \longrightarrow & G \end{array}$$

El grupo de Steinberg $St\Lambda$ se puede describir, desde otro punto de vista, como la extensión central universal del grupo $E\Lambda$. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) Un grupo $G$ admite una extensión central universal si, y sólo si, $G$ es perfecto, i.e., $G = [G,G]$.

(ii) Si $F$ es un grupo libre y $R = ker\ \{F \longrightarrow G\}$, entonces el núcleo de la extensión central universal $[F,F]/[R,F] \longrightarrow G$ es canónicamente isomorfo al segundo grupo de homología $H_2(G,Z) = (R \cap [F,F])/[R,F]$.

Por su misma definición, $St\Lambda$ es un grupo perfecto. Como $ker\ \phi = Z(St\Lambda)$, $St\Lambda$ es una extensión central de $E\Lambda$, y es universal. Por lo tanto, el núcleo del homomorfismo canónico $\phi: St\Lambda \longrightarrow E\Lambda$ puede identificarse con $H_2(E\Lambda;Z)$. Luego $K_2\Lambda = H_2(E\Lambda;Z)$.

Las extensiones centrales universales fueron introducidas por Schur en 1904 para el caso de grupos finitos y el subgrupo central

$$(R \cap [F,F])/[R,F] \cong H_2(G;Z)$$

se llama *multiplicador de Schur de G*.

La $K$-Teoría Algebraica se convirtió en un tema importante porque relaciona dos áreas de las matemáticas. El desarrollo de la $K$-Teoría Algebraica superior de Quillen relaciona la Topología con el Algebra de una manera nueva y fundamental. La $K$-teoría Algebraica utiliza métodos topológicos para encontrar invariantes algebraicos, y también proporciona una manera de traducir conceptos algebraicos en conceptos topológicos. La $K$-Teoría Algebraica estudia las propiedades de ciertos grupos $K_i(\Lambda)$, construidos a partir de un anillo $\Lambda$. En el presente texto estudiaremos los grupos $K_0\Lambda$, $K_1\Lambda$ y $K_2\Lambda$.

Lo que resta de esta introducción no es material del texto. Sin embargo, lo incluimos aquí para presentar un panorama más amplio y para leerse requiere de conocimientos de Topología Algebraica.

Para definir los grupos de $K$-teoría superior se necesita la siguiente construcción famosa debida a Quillen:

**TEOREMA**: Sea $X$ un complejo CW conexo con punto base $p$. Sea $N$ un subgrupo normal perfecto de $\pi_1(X,p)$. Entonces existe un espacio $X^+$ y una transformación $f\colon X \longrightarrow X^+$ tal que

(i) $\pi_1(f)$ induce un isomorfismo

$$\pi_1(X^+,p) \cong \pi_1(X,p)/N$$

(ii) para cualquier $\pi_1(X^+,p)$-módulo $A$, $f$ induce un isomorfismo

$$H_*(X; f^{-1}A) \cong H_*(X^+, A)$$

(iii) $(X^+, f)$ está determinado, excepto por equivalencia homotópica por (i) y (ii).

Este teorema se conoce como *construcción* $+$ de Quillen, y fue inspirada por la necesidad de encontrar una interpretación topológica del funtor $K_2$ de Milnor. La idea de la demostración es la de adjuntar 2-células para aniquilar $N$ y 3-células para neutralizar el efecto de las 2-células en homología.

Tomemos $X = BGL\Lambda$ (el espacio clasificante de $GL\Lambda$) y $N = E\Lambda$, que es un subgrupo normal perfecto de $GL\Lambda \cong \pi_1(BGL\Lambda)$. Entonces, por la construcción $+$ de Quillen, existe un espacio $BGL\Lambda^+$ que satisface

$$\pi_1(BGL\Lambda^+) \cong \pi_1(BGL\Lambda)/E\Lambda \cong GL\Lambda/E\Lambda,$$

que es precisamente $K_1\Lambda$.

También podemos formar $BE\Lambda^+$ con respecto a $E\Lambda$. Por el teorema del isomorfismo de Hurewicz, $H_2(BE\Lambda^+; Z) \cong \pi_2(BE\Lambda^+)$. Además, puesto que $\pi_2(BE\Lambda^+) \cong \pi_2(BGL\Lambda^+)$ podemos concluir que $K_2\Lambda = H_2(E\Lambda; Z) \cong H_2(BE\Lambda; Z) \cong H_2(BE\Lambda^+; Z) \cong \pi_2(BE\Lambda^+) \cong \pi_2(BGL\Lambda^+)$.

Si consideramos la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow K_2\Lambda \longrightarrow St\Lambda \longrightarrow E\Lambda \longrightarrow 1,$$

sabemos que

$$BK_2\Lambda^+ \longrightarrow BSt\Lambda^+ \longrightarrow BE\Lambda^+$$

es una fibración. Su sucesión larga de homotopía asociada es

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_4(BK_2\Lambda^+) & \longrightarrow & \pi_4(BSt\Lambda^+) \longrightarrow & \pi_4(BE\Lambda^+) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_1(BK_2\Lambda^+) & \longrightarrow & \pi_1(BSt\Lambda^+) \longrightarrow & \pi_1(BE\Lambda^+). \end{array}$$

Como $BK_2\Lambda^+ \cong BK_2\Lambda$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane K$(K_2\Lambda, 1)$, $\pi_i(BK_2\Lambda) = 0$ para $i > 1$. Por lo tanto, $\pi_j(BSt\Lambda^+) \cong \pi_j(BE\Lambda^+)$ para $j \geq 3$, y podemos concluir que $H_3(St\Lambda) \cong H_3(BSt\Lambda) \cong H_3(BSt\Lambda^+) \overset{H}{\cong} \pi_3(BSt\Lambda^+) \cong \pi_3(BE\Lambda^+) \cong \pi_3(BGL\Lambda^+)$, donde $H$ es el isomorfismo de Hurewicz.

Quillen en los setentas definió, para $i \geq 1$, el *$i$-ésimo $K$-grupo algebraico de* $\Lambda$ como $K_i\Lambda = \pi_i(BGL\Lambda^+)$. Como en los casos $i = 1, 2$, $K_i$ es un funtor covariante de la categoría de anillos a la categoría de grupos.

Uno de los problemas más importantes en la $K$-Teoría Algebraica es el cálculo de los grupos $K_i$ para diversos anillos $\Lambda$, pero, a pesar de los esfuerzos de muchos matemáticos, únicamente se conoce un número muy reducido de ellos. Veamos algunos:

Bass demostró en 1968 que $K_1\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2$ y que $K_1(\mathbb{Z}/p^2) = \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p - 1$, $p$ primo diferente de 2.

Milnor demostró en 1971 que $K_2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2$ y que $K_2\mathbb{Z}/p^2 = 0$ para un primo $p$ diferente de 2.

En 1972 Quillen demostró que para un campo finito $\mathbb{F}_{p^\ell}$, $K_{2i}(\mathbb{F}_{p^\ell}) = 0$ y $K_{2i-1}(\mathbb{F}_{p^\ell}) \cong \mathbb{Z}/p^{\ell^i} - 1$ donde $p$ es primo, $i \geq 1$.

Lee y Szczarba encontraron en 1976 que $K_3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/48$.

Dennis, en 1977, encontró que $K_2(\mathbb{Z}/n) = 0$ si $n \not\equiv 0 \pmod 4$ y que $K_2(\mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/2$ si $n \equiv 0 \pmod 4$.

En 1971, Van der Kallen demostró que $K_2(\mathbb{F}_p^{\ell}[t]/(t^2)) = 0$.

En [E-F] se calculan $K_3(\mathbb{Z}/p^2) \cong \mathbb{Z}/p^2 \oplus \mathbb{Z}/(p^2-1)$ y $K_4(\mathbb{Z}/p^2) = 0$ para un primo $p \geq 5$. También se tiene que $K_3(\mathbb{F}_p[t]/(t^2)) \cong \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{Z}/(p^2-1)$ y $K_4(\mathbb{F}_p[t]/(t^2)) = 0$ para un primo $p \geq 5$.

Finalmente, en [ALSS], [LL-S] y [ALS] se calculan

$K_3(\mathbb{Z}/2^k) \cong \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2^{2(k-2)} \oplus \mathbb{Z}/3, \quad k > 1.$

$K_3(\mathbb{Z}/p^k) \cong \mathbb{Z}/p^{2(k-1)} \oplus \mathbb{Z}/(p^2-1)$, $p$ un primo diferente de 2 y $k > 1$.

$K_3(\mathbb{F}_{2^\ell}[t]/(t^2)) \cong \mathbb{F}_{2^\ell} \oplus \mathbb{F}_{2^\ell} \oplus K_3(\mathbb{F}_{2^\ell})$, $\ell \geq 1$.

$K_3(\mathbb{F}_{p^\ell}[t]/(t^2)) \cong \mathbb{F}_{p^\ell} \oplus \mathbb{F}_{p^\ell} \oplus K_3(\mathbb{F}_{p^\ell})$, $p$ un primo, $p \geq 5, \ell \geq 1$.

$K_3(\mathbb{F}_{p^\ell}[t]/(t^2)) \cong (1 + t\,\mathbb{F}_{p^\ell}/(t^4))^*/\langle 1 + at^2 \rangle \oplus K_3(\mathbb{F}_{p^\ell})$ y

$K_3(\mathbb{F}_{p^\ell}[t]/(t^3)) \cong (1 + t\,\mathbb{F}_{p^\ell}[t]/(t^6))^*/\langle 1 + at^3 \rangle \oplus K_3(\mathbb{F}_{p^\ell})$ para un primo $p \neq 2, \ell \geq 1, a \in \mathbb{F}_{p^\ell}$.

El lector interesado en adentrarse en temas recientes de la $K$-Teoría y Cohomología de Grupos podrá leer las Memorias del Primer Seminario de $K$-Teoría Algebraica en México [LL].

# Capítulo I

# TEORÍA DE MÓDULOS

En este capítulo se ofrece un estudio detallado de la Teoría de Módulos, así como de los funtores fundamentales del Algebra Homológica, $Hom$ y $\otimes$. Por razones pedagógicas y a fin de evitar complicaciones innecesarias para nuestros propósitos, nos restringiremos al caso en que el anillo $\Lambda$ sea conmutativo. Sin embargo, tanto en la exposición como en los ejercicios, hacemos hincapié en los resultados que se obtienen al considerar el caso no conmutativo.

En la sección 1 presentamos el concepto de $\Lambda$-módulo, que es una generalización adecuada de los conceptos de grupo abeliano y espacio vectorial. Análogos a los teoremas de isomorfismo para la Teoría de Grupos, tenemos los correspondientes para $\Lambda$-módulos en la sección 2. Las sucesiones exactas y diagramas conmutativos así como sus propiedades relevantes, se introducen en la sección 3. En la sección 4 definimos la suma y el producto directos de una familia de $\Lambda$-módulos y establecemos las propiedades universales que los caracterizan. En la sección 5 estudiamos el funtor $Hom$ y se analiza su covariancia y contravariancia en sus variables. En la sección 6 introducimos el concepto de $\Lambda$-módulo proyectivo y establecemos sus propiedades. De una manera dual, presentamos los $\Lambda$-módulos inyectivos en la sección 7. Finalmente, en la sección 8 introducimos el funtor $\otimes$ y establecemos su covariancia en ambas variables.

## I.1 MÓDULOS

Sea $\Lambda$ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

**1.1 DEFINICION.** Un $\Lambda$-*módulo* o *módulo sobre* $\Lambda$ es una pareja $(M, \mu)$ donde $M$ es un grupo abeliano aditivo y $\mu: \Lambda \times M \longrightarrow M$ es una función escrita $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ tal que los siguientes axiomas se cumplen:

(i) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

(ii) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

(iii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(iv) $1x = x \quad (\alpha, \beta \in \Lambda;\ x, y \in M)$

Entonces, un $\Lambda$-módulo es un sistema algebraico $M$ con una operación binaria $+: M \times M \longrightarrow M$ con un conjunto de operaciones unarias $M \longrightarrow M$, una para cada $\alpha \in \Lambda$. $\mu$ se llama *multiplicación escalar* de $M$ y los elementos de $\Lambda$ se llaman *escalares*. Se requiere que $M$ sea un grupo abeliano bajo la suma y que valgan ambas leyes distributivas (i) y (ii). Sin el axioma (iv), cualquier grupo abeliano $M$ se podría convertir en un $\Lambda$-módulo trivialmente definiendo $\alpha x = 0$ para toda $\alpha \in \Lambda$.

**1.2 EJEMPLO.** Tómese $\Lambda = \mathbb{Z}$ el anillo de números enteros. Para cualquier grupo abeliano $G$, la función $\mu: \mathbb{Z} \times G \longrightarrow G$, dada por $\mu(n, x) = nx$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y para toda $x \in G$, satisface los axiomas de 1.1. Luego, todo grupo abeliano puede considerarse como un $\mathbb{Z}$-módulo.

**1.3 EJEMPLO.** Si $\Lambda$ es un campo $K$, entonces un $K$-módulo es un espacio vectorial sobre $K$.

**Nota**. Con respecto al ejemplo 1.2, recuérdese que todo grupo abeliano $G$ da lugar a un grupo natural con operadores: Sea $\Omega$ un conjunto. Un grupo $G$ junto con una acción de $\Omega$ en $(G, \cdot)$

$$\Omega \times G \longrightarrow G$$
$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha \circ x = x^{\alpha}$$

que sea distributiva con respecto a la ley de composición de $(G, \cdot)$ se llama *grupo con operadores en* $\Omega$. La ley distributiva puede expresarse como

$$(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha},$$

i.e., $(\alpha, xy) \longmapsto \alpha \circ (xy) = (\alpha \circ x)(\alpha \circ y)$. En un grupo con operadores $G$, cada operador define un endomorfismo del grupo $G$.

Consideremos $\Omega = \mathbb{Z}$ y para $x \in G$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ definamos

$$\alpha \circ x = \alpha x = x^{\alpha}.$$

Como $G$ es abeliano, tenemos que $\alpha(xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha} = (\alpha x)(\alpha y)$. Luego, todo grupo abeliano $G$ puede verse como un grupo con operadores $\mathbb{Z}$.

**1.4 EJEMPLO.** Sea $\Gamma$ un subanillo conmutativo de un anillo $\Lambda$, $1 \in \Gamma$. Entonces $\mu: \Gamma \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$ dada por $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ para toda $\alpha \in \Gamma$ y para toda $x \in \Lambda$, satisface (i) – (iv) de 1.1. Por lo tanto, todo anillo conmutativo con 1 es un $\Gamma$-módulo, es decir, es un módulo sobre cualquiera de sus subanillos. En particular, todo anillo conmutativo con elemento unitario puede considerarse como un módulo sobre sí mismo.

**1.5 EJEMPLO.** Sea $S$ un conjunto y $M = \Lambda^S = \{g: S \longrightarrow \Lambda\}$. $M$ es un grupo abeliano con respecto a la suma definida por

$$(g + g')(s) = g(s) + g'(s).$$

Si definimos $\mu: \Lambda \times M \longrightarrow M$ mediante $(\alpha, g) \longmapsto \alpha g$ donde $(\alpha g)(s) = \alpha g(s)$, es claro que las condiciones (i) a (iv) se satisfacen. Luego, $M$ es un $\Lambda$-módulo.

**1.6 EJEMPLO.** Si $\mathbb{Z}/n$ es el anillo de los enteros módulo $n$, un $\mathbb{Z}/n$-módulo es un grupo abeliano en el cual todo elemento tiene por orden un divisor de $n$.

Veamos cómo relacionar dos módulos sobre un anillo $\Lambda$ mediante una función que preserve la estructura de $\Lambda$-módulo.

**1.7 DEFINICION.** Sean $M$ y $N$ dos $\Lambda$-módulos. Una función $f: M \longrightarrow N$ se llama *homomorfismo de $\Lambda$-módulos* o *$\Lambda$-lineal* si $f$ es un homomorfismo de grupos abelianos tal que $f(\alpha x) = \alpha(f(x))$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y para toda $x \in M$.

Esto es, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f$ conmuta con la acción de cada $\alpha \in \Lambda$. Estas dos condiciones son equivalentes a que

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad \forall \alpha, \beta \in \Lambda, \forall x, y \in M\ .$$

**1.8 PROPOSICION.** La composición de dos homomorfismos de $\Lambda$-módulos es un homomorfismo de $\Lambda$-módulos.

**Demostración.** Sean $f: M' \longrightarrow M$ y $g: M \longrightarrow M''$ dos homomorfismos de $\Lambda$-módulos. Luego

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+y) &= g(f(x+y)) \\ &= g(f(x)+f(y)) \\ &= g(f(x))+g(f(y)) \\ &= (g\circ f)(x)+(g\circ f)(y)\end{aligned}$$

Además, $(g\circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha(g\circ f)(x)$. Por lo tanto $(g \circ f)$ es un homomorfismo de $\Lambda$-módulos.■

Si $\Lambda$ es un campo $K$, un $\Lambda$-homomorfismo se llama *transformación lineal* entre espacios vectoriales. Claramente, la función identidad $1_M: M \longrightarrow M$ es un homomorfismo de $\Lambda$-módulos. Si $f: M \longrightarrow N$ es inyectiva, escribiremos $f: M \rightarrowtail N$, y si $f$ es suprayectiva, escribiremos $f: M \twoheadrightarrow N$. Llamaremos a $f$ *isomorfismo* y escribiremos $f: M \xrightarrow{\cong} N$ si existe un homomorfismo $g: N \longrightarrow M$ tal que $g\circ f = 1_M$ y $f \circ g = 1_N$. Es fácil comprobar que, si $g$ existe, está determinada en forma única; la denotaremos con $f^{-1}$ y se llamará *inverso* de $f$. $f: M \longrightarrow N$ es isomorfismo si, y sólo si, es inyectiva y suprayectiva. Diremos que dos módulos sobre $\Lambda$ , $M$ y $N$, son *isomorfos* si existe un isomorfismo $f: M \xrightarrow{\cong} N$, y escribiremos $M \cong N$.

**1.9 DEFINICION.** Un homomorfismo entre $\Lambda$-módulos $f: M \longrightarrow N$ se llamará *monomorfismo* si $fg_1 = fg_2$ implica que $g_1 = g_2$ para todo $g_1$, $g_2: M' \longrightarrow M$. Un homomorfismo entre $\Lambda$-módulos $f: M \longrightarrow N$ se llamará *epimorfismo* si $g_1 f = g_2 f$ implica que $g_1 = g_2$ para todo $g_1, g_2: N \longrightarrow N'$.

Más adelante se demostrará que, para módulos, $f$ es inyectiva si, y sólo si, es monomorfismo; y es suprayectiva si, y sólo si, es epimorfismo (problema II.1.8.). Sin embargo, utilizaremos este hecho en el resto del capítulo.

Sea $M$ un $\Lambda$-módulo. Diremos que un subgrupo $N$ de $M$ es submódulo de $M$ si $N$ es un $\Lambda$-módulo con respecto a las operaciones de $M$. Dicho de otra manera:

**1.10 DEFINICION.** Un subconjunto $N$ de un $\Lambda$-módulo $M$ se llama *submódulo* del $\Lambda$-módulo $M$ si $N$ es un subgrupo de $M$ y para toda $\alpha \in \Lambda$, $\alpha N = \{\alpha x | x \in N\} \subset N$.

Esto es, $N$ es un submódulo de $M$ si $N$ es un subgrupo del grupo abeliano $M$ y es estable bajo la multiplicación escalar, es decir, si $\alpha \in \Lambda$ y $x \in N$ entonces $\alpha x \in N$.

Si consideramos al anillo $\Lambda$ como un $\Lambda$-módulo, un submódulo de $\Lambda$ es un subconjunto $\Gamma$ de $\Lambda$ cerrado bajo la suma y tal que $\alpha\Gamma \subset \Gamma$ para toda $\alpha \in \Lambda$. Dicho subconjunto se llama *ideal* del anillo $\Lambda$.

Obviamente todo subgrupo de un grupo abeliano es un submódulo del grupo considerado como $\mathbb{Z}$-módulo. Si en 1.5 consideramos

$$N = \{g: S \longrightarrow \Lambda | g(s) = 0 \text{ para casi toda } s \in S\},$$

es fácil comprobar que es un submódulo de $M = \Lambda^S$.

A continuación describiremos otros subconjuntos de un $\Lambda$-módulo $M$ que resultan ser submódulos de $M$.

**1.11 DEFINICION.** Sea $f: M \longrightarrow N$ un homomorfismo de $\Lambda$-módulos. El *núcleo* de $f$, denotado con *ker* $f$, es el conjunto de todos los elementos $x \in M$ tales que $f(x) = 0$. La *imagen* de $f$, denotada con *im* $f$, es el conjunto de $f(x)$ tales que $x \in M$.

**1.12 PROPOSICION.** Sea $f: M \longrightarrow N$ un homomorfismo de $\Lambda$-módulos. Entonces, si $M'$ es un submódulo de $M$, $f(M')$ es un submódulo de $N$ y si $N'$ es un submódulo de $N$, $f^{-1}(N')$ es un submódulo de $M$.

**Demostración.** Veamos que $f(M') = \{f(x) | x \in M'\}$ es un submódulo de $N$. Sean $u, v \in f(M')$, luego, existen $x, y \in M'$ tales que $f(x) = u, f(y) = v$. Como $M'$ es submódulo de $M$, $x + y \in M'$ y $\alpha x \in M'$. Como $f$ es un homomorfismo, tenemos que

$$\begin{aligned} u + v = f(x) + f(y) = f(x + y) \in f(M') \\ \alpha u = \alpha f(x) = f(\alpha x) \in f(M'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(M')$ es un submódulo de $N$.

Veamos que $f^{-1}(N') = \{x \in M | f(x) \in N'\}$ es un submódulo de $M$. Sean $x, y \in f^{-1}(N')$, entonces $f(x)$ y $f(y)$ están en $N'$. Como $N'$ es submódulo de $N$ y $f$ es homomorfismo,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \in N'$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \in N', \qquad \forall \alpha \in \Lambda.$$

Luego, $(x+y), (\alpha x) \in f^{-1}(N')$.■

**1.13 COROLARIO.** La imagen de $f\colon M \longrightarrow N$, $im\ f$, es un submódulo de $N$; y el núcleo de $f$, $ker\ f$, es un submódulo de $M$.

**Demostración.** Inmediata de 1.12 tomando $M' = M$ y $N' = 0$.■

Llamaremos *endomorfismo* a un homomorfismo $f\colon M \longrightarrow M$ y diremos que es *automorfismo* si dicha $f$ es biyectiva.

## PROBLEMAS

**1.1** Pruebe que $0x = 0$ y que $(-1)x = -x$ para toda $x$ que pertenece a un $\Lambda$-módulo $M$.

**1.2** Pruebe que un subconjunto $M'$ de un $\Lambda$-módulo $M$ es un submódulo de $M$ si, y sólo si, $x + y \in M'$ y $\alpha x \in M'$ para toda $x, y \in M', \alpha \in \Lambda$.

**1.3** Considere la siguiente definición: sea $M$ un grupo abeliano. Se sabe que los endomorfismos de $M$, $End(M, M)$, forman un anillo no necesariamente conmutativo. Sea $\Lambda$ un anillo no necesariamente conmutativo con $1 \neq 0$. Un $\Lambda$-*módulo izquierdo* es un grupo abeliano $M$ junto con un homomorfismo de anillos $\eta\colon \Lambda \longrightarrow End(M, M)$. Si escribimos $\alpha x$ en lugar de $(\eta(\alpha))(x)$, $x \in M$, $\alpha \in \Lambda$,

(a) pruebe que se cumple lo siguiente

(i) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(ii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(iii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(iv) $1x = x \qquad (\alpha, \beta \in \Lambda; x, y \in M)$

(b) suponga que se tiene una operación de $\Lambda$ en $M$, $\Lambda \times M \longrightarrow M$, tal que valga el inciso (a). Entonces pruebe que se tiene un homomorfismo $\eta\colon \Lambda \longrightarrow End(M, M)$ dado por $(\eta(\alpha))(x) = (\alpha x)$.

(c) defina un $\Lambda$-módulo derecho. Pruebe que si $\Lambda$ es conmutativo, los conceptos de $\Lambda$-módulo derecho e izquierdo coinciden.

Sea $\Lambda^{\mathcal{O}}$ el *anillo opuesto* de $\Lambda$ (i.e., sus elementos $\lambda^{\mathcal{O}} \in \Lambda^{\mathcal{O}}$ están en correspondencia uno a uno con los elementos $\lambda \in \Lambda$, su multiplicación está dada por $\lambda_1^{\mathcal{O}}\lambda_2^{\mathcal{O}} = (\lambda_2\lambda_1)^{\mathcal{O}}$ y como grupos abelianos bajo la suma son isomorfos). Observe que se puede definir un $\Lambda$-módulo derecho como un $\Lambda^{\mathcal{O}}$-módulo izquierdo.

**1.4** Sea $\Lambda$ un dominio entero. Se dice que un elemento $x$ de un $\Lambda$-módulo $M$ es un *elemento de torsión* de $M$ si, y sólo si, existe un elemento diferente de cero $\alpha \in \Lambda$ tal que $\alpha x = 0$. Pruebe que el conjunto de elementos de torsión es un submódulo $\mathcal{T}M$ de $M$ llamado *submódulo de torsión* de $M$.

**1.5** Sea $\Lambda$ un dominio entero. Un $\Lambda$-módulo $M$ se llama *módulo de torsión* si $\mathcal{T}M = M$ y se llama *libre de torsión* si $\mathcal{T}M = 0$. Pruebe que $\mathcal{T}M$ es un módulo de torsión.

**1.6** Pruebe que, en 1.5,

(a) $\Lambda$ es un $\Lambda$-módulo libre de torsión.

(b) todo submódulo de un $\Lambda$-módulo libre de torsión es un $\Lambda$-módulo libre de torsión.

(c) todo submódulo de un $\Lambda$-módulo de torsión es un $\Lambda$-módulo de torsión.

**1.7** Sea $\Lambda$ un dominio entero. Un $\Lambda$-módulo $M$ se llama *módulo divisible* si para toda $x \in M$ y para todo $\alpha \in \Lambda$, $\alpha \neq 0$ existe $y \in M$ tal que $\alpha y = x$. (i.e., todo elemento $x \in M$ es divisible por un divisor $\alpha \in \Lambda$ diferente de cero). Compruebe que

(a) los grupos abelianos aditivos de los $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son divisibles.

(b) el conjunto de elementos divisibles de un $\Lambda$-módulo $M$ es un submódulo $\delta_M$ de $M$.

**1.8** Sea $G$ un grupo y $(M, +)$ un $\mathbb{Z}$-módulo. Diremos que $M$ es un *$G$-módulo izquierdo* si existe $k: G \times M \longrightarrow M$ dado por $k(g, x) = gx$ tal que se satisfacen los siguientes axiomas:

(i) $1x = x; \qquad x \in M$

(ii) $(gg')x = g(g'x); \qquad g, g' \in G, x \in M$

(iii) $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2); \qquad g \in G, x_1, x_2 \in M.$

(a) Proceda como en el problema 1.3 y compruebe que un $G$-módulo izquierdo consiste en un grupo $M$ junto con un homomorfismo de grupos $\kappa: G \longrightarrow Aut(M)$.

(b) Sean $M$ y $M'$ dos $G$-módulos izquierdos. ¿Cómo definiría un homomorfismo entre ellos?

**1.9** Sean $G, M$ grupos y $G \times M \longrightarrow M$ una acción izquierda de $G$ en $M$ denotada con $(g, x) \longmapsto {}^{g}x$. Sea $\partial: M \longrightarrow G$ un homomorfismo de grupos tal que

(i) ${}^{\partial(x)}y = xyx^{-1}, x, y \in M$ donde $G$ actúa por la izquierda sobre sí mismo por conjugación, i.e.,

(ii) $\partial({}^{g}x) = g(\partial(x))g^{-1}, \qquad x \in M, g \in G.$

Entonces diremos que el grupo $M$, junto con el homomorfismo $\partial$ y la acción, es un *$G$-módulo cruzado* o simplemente *módulo cruzado* que denotaremos con $(M, G, \partial)$. Pruebe que:

(a) todo subgrupo normal $N$ de $G$ es un $G$-módulo cruzado, donde $G$ actúa sobre $N$ por conjugación y $\partial$ es la inclusión.

(b) todo $G$-módulo es un $G$-módulo cruzado tomando $\partial = 1_G$.

(c) sea $G = Aut(M)$ y $G \times M \longrightarrow M$ dada por ${}^{g}x = g(x)$, $g \in G$, $x \in M$. Si $\partial: M \longrightarrow G = Aut(M)$ está dado por $\partial(x) = \partial_x$, donde $\partial_x(y) = xyx^{-1}$, compruebe que $(M, Aut(M), \partial)$ es un módulo cruzado.

**1.10** Sea $(M, G, \partial)$ un módulo cruzado. Pruebe que

(a) $\partial M$ es un subgrupo normal de $G$.

(b) $ker\ \partial \subseteq Z(M)$, donde $Z(M)$ denota al centro de $M$.

(c) la acción de $G$ en $M$ induce una estructura de $G/\partial M$-módulo en $Z(M)$ y $ker\ \partial$ es un submódulo de $Z(M)$.

(d) la acción de $G$ en $M$ induce una estructura de $G/\partial M$-módulo en $M/[M, M]$, donde $[M, M]$ denota el conmutador de $M$.

## I.2 TEOREMAS DE ISOMORFISMO

En esta sección establecemos tres teoremas que nos proporcionarán un medio para determinar si dos módulos son isomorfos.

Sea $\Lambda$ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$, como en la sección 1.

**2.1 PROPOSICION.** Sea $(N_i)_{i\in I}$ una familia de submódulos de un $\Lambda$-módulo $M$. Entonces $\bigcap_{i\in I} N_i$ es un submódulo de $M$.

**Demostración.** Sea $\alpha \in \Lambda$; $x, y \in \bigcap_{i\in I} N_i$. Como $\bigcap_{i\in I} N_i \subset N_i$ para cualquier $i \in I$, tenemos que $x, y \in N_i$. Como $N_i$ es submódulo de $M$, tenemos que $x + y \in N_i$ y $\alpha x \in N_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $x + y \in \bigcap_{i\in I} N_i$ y $\alpha x \in \bigcap_{i\in I} N_i$.■

Sea $S$ un subconjunto de un $\Lambda$-módulo $M$. $S$ está contenido al menos en un submódulo de $M$. Por 2.1, la intersección de todos los submódulos de $M$ que contienen a $S$ es un submódulo de $M$. Dicha intersección es el submódulo más pequeño de $M$ que contiene a $S$.

**2.2 DEFINICION.** La intersección $\bigcap_{i\in I} N_i$ de los submódulos $N_i$ de un $\Lambda$-módulo $M$ que contiene a un subconjunto $S$ de $M$ se llama *submódulo generado por* $S$, denotado por $\langle S\rangle$. Si $\bigcap_{i\in I} N_i = M$, $S \subset N_i$, decimos entonces que $M$ está generado por $S$ y que $S$ es *un conjunto de generadores de* $M$.

**2.3 DEFINICION.** Decimos que un elemento $x$ de un $\Lambda$-módulo $M$ es una *combinación lineal* de elementos de un subconjunto $S$ de $M$ si existe un número finito de elementos $\{x_i\}_{i=1}^n$ de $S$ tal que $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \alpha_i \in \Lambda$. Las $\alpha_i$ se llaman *coeficientes*.

**2.4 DEFINICION.** Sea $N$ un submódulo de un $\Lambda$-módulo $M$, entonces el *módulo cociente* $M/N$ es el grupo cociente abeliano $M/N$ provisto de una multiplicación escalar $\mu\colon \Lambda \times M/N \longrightarrow M/N$ dada por $\mu(\alpha, x + N) = \alpha x + N$; $\alpha \in \Lambda$, $x + N \in M/N$.

Como $N$ es un subgrupo del grupo abeliano $M$, el grupo cociente $M/N$ es un grupo abeliano bien definido cuyos elementos son las distintas clases laterales de $N$ en $M$. Es claro que la clase $\alpha x + N$ depende solamente del elemento $\alpha \in \Lambda$ y de la clase $x+N$. Luego, podemos definir la multiplicación escalar $\alpha(x + N) = \alpha x + N$ para $\alpha \in \Lambda$ y $x + N \in M/N$.

**2.5 DEFINICION.** Llamamos *coimagen y conúcleo* de un homomorfismo de $\Lambda$-módulos $f\colon M \longrightarrow N$ a los módulos cocientes de $M$ y $N$;

$$\begin{aligned} coim\ f &= M/ker\ f \\ coker\ f &= N/im\ f, \end{aligned}$$

respectivamente.

**2.6 PROPOSICION.** Un homomorfismo de $\Lambda$-módulos $f\colon M \longrightarrow N$ es

(i) monomorfismo si, y sólo si, $ker\ f = 0$.

(ii) epimorfismo si, y sólo si, $coker\ f = 0$.

**Demostración.** (i) Supongamos que $f$ es monomorfismo. Luego, $f(0) = 0$, por lo que $0 \in f^{-1}(0) = ker\ f$. Como $f$ es inyectiva, $f^{-1}(0)$ sólo puede contener un elemento. Por lo tanto, $ker\ f = 0$.

Supongamos que $ker\ f = 0$. Sean $x, y \in M$ tal que $f(x) = f(y)$. Como $f$ es homomorfismo, $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$. Luego, $x - y \in ker\ f$. Como $ker\ f = 0$, $x - y = 0$. Luego, $x = y$ y, por lo tanto, $f$ es inyectiva.

(ii) Supongamos que $f\colon M \longrightarrow N$ es un epimorfismo. Entonces $f$ es suprayectiva e $im\ f = f(M) = N$. Luego, $coker\ f = N/im\ f = 0$. Supongamos ahora que $coker\ f = 0$. Entonces $f(M) = im\ f = N$. Luego, $f$ es suprayectiva.■

**2.7 PROPOSICION.** Sean $f\colon M' \longrightarrow M$, $g\colon M \longrightarrow M''$ dos homomorfismos de $\Lambda$-módulos y $h = g \circ f$ la composición. Entonces,

(i) si $h$ es monomorfismo, $f$ es monomorfismo, y

(ii) si $h$ es epimorfismo, $g$ es epimorfismo.

**Demostración.** (i) Supongamos que $h$ es monomorfismo. Si $f(x) = f(y)$ luego $h(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = h(y)$ y, como $h$ es monomorfismo, $x = y$. Por lo tanto, $f$ es monomorfismo.

(ii) Supongamos que $h$ es epimorfismo. Entonces $h(M') = M''$. Luego, $M'' = h(M') = g(f(M')) \subset g(M) \subset M''$. Por lo tanto, $g(M) = M''$.■

Diremos que un homomorfismo $f\colon M \longrightarrow N$ es *trivial* si $f(x) = 0$ para todo $x \in M$. Es decir, $im\ f = 0$. Equivalentemente, $f = 0$ si, y sólo si, $ker\ f = M$.

Consideremos la proyección natural $p\colon M \longrightarrow M/N$ dada por $x \longmapsto x + N$, para todo $x \in M$. $p$ es un epimorfismo del grupo $M$ en el grupo cociente $M/N$. También $p$ resulta ser un epimorfismo de módulos, pues $p(\alpha x) = \alpha x + N = \alpha p(x)$, para todo $\alpha \in \Lambda, x \in M$. Recordemos que en $M/N$, $N$ resulta ser igual al núcleo de $p$, pues $p^{-1}(0 + N) = N$, por lo que todo submódulo de un $\Lambda$-módulo $M$ es el núcleo de cierto homomorfismo.

El resultado principal de los módulos cociente es el siguiente teorema que establece la propiedad universal de la proyección $p\colon M \longrightarrow M/N$. Esto implicará una respuesta a la siguiente pregunta: ¿existe un submódulo $N$ de $M$ tal que si $f\colon M \longrightarrow M'$ es un homomorfismo, $f(M) \cong M/N$?

**2.8 TEOREMA.** (Primer teorema de isomorfismo.) Sea $N$ un submódulo del $\Lambda$-módulo $M$ y $f\colon M \longrightarrow M'$ un homomorfismo de $\Lambda$-módulos tal que $N \subset ker\ f$. Entonces existe un homomorfismo único $h\colon M/N \longrightarrow M'$ tal que $h \circ p = f$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & M/N \arrow[d, "h"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

Además, para dicho homomorfismo $h$, $im\ h = im\ f$ y $ker\ h = (ker\ f)/N$.

**Demostración.** Por hipótesis, $f(N) = 0$, por lo que $f$ manda a los elementos de cualquier clase lateral $x + N$ en un sólo elemento $f(x + N) = f(x)$ de $M'$. Esto es, existe una función única $h$ de $M/N$ en $M'$ tal que $h \circ p = f$. $h$ es un homomorfismo de grupos, pues

$$h(x + N) + h(y + N) = f(x) + f(y) = f(x + y) = h((x + y) + N),$$

y también es homomorfismo de $\Lambda$-módulos, pues

$$\alpha h(x + N) = \alpha f(x) = f(\alpha x) = h(\alpha x + N).$$

Como $h(p(x)) = f(x)$, y $p$ es suprayectiva, se tiene que $im\ h = im\ f$. Como $h(x + N) = 0$ si, y sólo si, $f(x) = 0$ (i.e., si, y sólo si, $x \in ker\ f$), tenemos que $x + N \in (ker\ f)/N$. Por lo tanto, $ker\ h = (ker\ f)/N$.■

Si en el teorema precedente tenemos el caso en que $N = ker\ f$, entonces $h$ es un monomorfismo. Así que $f(M) = im\ f \cong M/ker\ f = coim\ f = M/N$.

**2.9 NOTACION.** El submódulo generado por la unión $\bigcup_{i\in I} N_i$ de submódulos $N_i$ de un $\Lambda$-módulo $M$ se denotará con $\sum_{i\in I} N_i$. En particular, el submódulo generado por $N_1 \cup N_2$ lo denotaremos con $N_1 + N_2$. Así que

$$N_1 + N_2 = \{x + y \mid x \in N_1,\ \ y \in N_2\}.$$

El homomorfismo de *inclusión* de un submódulo $N$ de un $\Lambda$-módulo se denotará con $\imath\colon N \longrightarrow M$.

Hemos visto que la imagen de un homomorfismo $f\colon M \longrightarrow M'$ es esencialmente un módulo cociente de $M$. ¿Cuál es el efecto de $f$ en los submódulos de $M$? ¿Cómo se relaciona $N/N\cap N'$ con $M/N$? Debe ser isomorfo a algún submódulo de $M/N$ y el siguiente teorema nos dice precisamente a cual.

**2.10 TEOREMA.** (Segundo teorema de isomorfismo.) Sean $N, N'$ submódulos de un $\Lambda$-módulo $M$. Entonces

(i) Para el homomorfismo de inclusión $\imath\colon N \longrightarrow N + N'$, se tiene que $\imath(N \cap N') \subset N'$ y

(ii) $\imath$ induce un isomorfismo $\imath'\colon N/(N\cap N') \xrightarrow{\cong} (N+N')/N'$

**Demostración.**

(i) es obvio que $\imath$ manda $N\cap N'$ en $N'$, pues $\imath$ es el homomorfismo de inclusión.

(ii) De (i), $\imath$ induce un homomorfismo $\imath'\colon N/N\cap N' \longrightarrow N + N'/N'$.

Veamos que $\imath'$ es un monomorfismo: sea $[x] \in N/N\cap N'$ tal que $\imath'([x]) = 0$. Sea $x \in [x] \subset N$. Luego $x = \imath(x) \in N'$ (por definición de $\imath$) y, por lo tanto, $x \in N\cap N'$. Entonces $[x] = 0$ e $\imath'$ es monomorfismo, por 2.6.

Veamos que $\imath'$ es un epimorfismo. Consideremos $[z] \subset (N+N')/N'$. Sea $x \in N$, $y \in N'$ tal que $x+y \in [z] \subset N+N'$. Como $-y \in N'$, $x = (x+y)+(-y) \in [z]$. Por lo tanto, $\imath'$ manda al elemento $x + (N\cap N') \in N/N\cap N'$ en $[z]$. Luego, $\imath'$ es epimorfismo.∎

¿Qué pasa cuando tomamos el módulo cociente de un módulo cociente? Veamos que éste es isomorfo a un módulo cociente sencillo.

**2.11 TEOREMA.** (Tercer teorema de isomorfismo.) Sean $M'' \subset M' \subset M$ $\Lambda$-módulos; entonces, $(M/M'')/(M'/M'') \cong M/M'$.

**Demostración.** Definamos $f\colon M/M'' \longrightarrow M/M'$ mediante

$$f(x + M'') = x + M'.$$

$f$ es un homomorfismo de $\Lambda$-módulos bien definido cuyo núcleo es $M'/M''$.■

**2.12 EJEMPLO.** Sea $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos dado por $f(m) = r$ donde $r$ es el residuo de la división de $m$ entre $n$. Sabemos que $f$ es epimorfismo con núcleo $n\mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

## PROBLEMAS

**2.1** Pruebe que el submódulo de un $\Lambda$-módulo $M$ generado por un subconjunto $S \neq \emptyset$ de $M$ consiste en todas las combinaciones lineales de elementos en $S$. Si $S = \emptyset$, entonces $\langle S \rangle = 0$.

**2.2** Pruebe que, en el teorema 2.11, $f$ está bien definida, es un homomorfismo de $\Lambda$-módulos y su núcleo es $M'/M''$.

**2.3** Sea $p: M \longrightarrow M/N$ la proyección natural de $\Lambda$-módulos. Pruebe que existe una correspondencia uno a uno entre los submódulos $K$ de $M/N$ y los submódulos intermedios de $M$ que contienen a $N$, dada por $K \longmapsto p^{-1}(K)$.

**2.4** Sea $M$ un $\mathbb{R}$-módulo de dimensión tres. Sea $N$ el submódulo de $M$ de elementos de una recta por el origen. Describa el cociente $M/N$.

**2.5** Un $\Lambda$-módulo $M$ se llama *simple* si sus únicos submódulos son el 0 y $M$ mismo. Pruebe que todo módulo sobre un campo $K$ generado por un solo elemento $x \neq 0$ es un módulo simple.

**2.6** Sea $f: M \longrightarrow N$ un homomorfismo del $\Lambda$-módulo simple $M$ en el $\Lambda$-módulo $N$. Pruebe que $im\ f$ es un submódulo simple de $N$ y que, si $im\ f \neq 0$, entonces $f$ es monomorfismo.

**2.7** Sea $\Lambda$ un dominio entero. Pruebe que $M/\mathcal{T}M$ es un $\Lambda$-módulo libre de torsión.

**2.8** Pruebe que los $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ son divisibles.

## I.3 SUCESIONES EXACTAS

En esta sección estudiaremos sucesiones finitas e infinitas de homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \cdots$$

de $\Lambda$-módulos. Comenzaremos por estudiar sucesiones en las cuales el núcleo del homomorfismo "saliente" contiene a la imagen del homomorfismo "entrante".

**3.1 DEFINICION.** Diremos que una sucesión de $\Lambda$-módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

es *semiexacta* en $M_i$ si $im\ f_{i-1} \subset ker\ f_i$. Si es semiexacta en cada $\Lambda$-módulo, la llamaremos *sucesión semiexacta.*

Esta definición equivale, como a continuación veremos, a que la composición de los dos homomorfismos, el "entrante" y el "saliente", es el homomorfismo trivial.

**3.2 PROPOSICION.** Una sucesión de $\Lambda$-módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

es semiexacta en $M_i$ si, y sólo si, la composición $f_i \circ f_{i-1} = 0$.

**Demostración.** Supongamos que la sucesión es semiexacta en $M_i$. Entonces $im\ f_{i-1} \subset ker\ f_i$. Veamos que la composición $f_i \circ f_{i-1}(x) = 0$ para toda $x \in M_{i-1}$. Como $f_{i-1}(x) \in im\ f_{i-1} \subset ker\ f_i$, tenemos que$f_i(f_{i-1}(x)) = 0$. Luego, como $x$ es arbitraria, $f_i \circ f_{i-1} = 0$.

Supongamos que $f_i \circ f_{i-1} = 0$. Sea $y \in im\ f_{i-1}$ arbitraria. Entonces existe $x \in M_{i-1}$ tal que $f_{i-1}(x) = y$. Entonces $f_i(y) = f_i(f_{i-1}(x)) = 0$, por lo que $y \in f_i^{-1}(0) = ker\ f_i$. Hemos visto que, si $y \in im\ f_{i-1}$, entonces $y \in ker\ f_i$ para cualquier $y$. Luego, $im\ f_{i-1} \subset ker\ f_i$.■

**3.3 DEFINICION.** Diremos que una sucesión de $\Lambda$-módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

es *exacta* en $M_i$ si es semiexacta e $im\ f_{i-1} \supset ker\ f_i$. Si es exacta en cada $\Lambda$-módulo, la llamaremos *sucesión exacta.*

Equivalentemente, dicha sucesión es exacta en $M_i$ si, y sólo si, $im\ f_{i-1} = ker\ f_i$. Toda sucesión exacta es semiexacta, pero no toda sucesión semiexacta es exacta. A una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

la llamaremos *sucesión exacta corta.*

**Nota**. A menudo suprimiremos $\circ$ de la notación $g \circ f$ y simplemente escibiremos $gf$.

**3.4 EJEMPLO.** Sea $N$ un submódulo de un $\Lambda$-módulo $M$. Consideremos el módulo cociente $M/N$. Sea $i: N \longrightarrow M$ el monomorfismo de inclusión y $p: M \longrightarrow M/N$ el epimorfismo de proyección. Entonces $im\ \ i = N = ker\ \ p$ y, por lo tanto,

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

Consideremos ahora una sucesión exacta corta

$$0 \xrightarrow{h} M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{k} 0.$$

Entonces $im\ f = ker\ g$, por lo que $f$ es monomorfismo, pues $0 = im\ h = ker\ f$ y, además, $g$ es epimorfismo porque $im\ g = ker\ k = M''$. Sea $N = im\ f = ker\ g$ que es un submódulo de $M$, entonces $f$ establece un isomorfismo $N \xrightarrow{\cong} M'$ y $g$ establece otro isomorfismo $M/N \xrightarrow{\cong} M''$. Por lo tanto, una sucesión exacta corta es una sucesión con un submódulo y el módulo cociente de un $\Lambda$-módulo.

Consideremos una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} M''.$$

Sea $f$ un epimorfismo y $h$ un monomorfismo. Entonces $im\ f = N$ y $ker\ h = 0$. Como la sucesión es exacta, $N = im\ f = ker\ g$ e $im\ g = ker\ h = 0$; luego, $g$ es el homomorfismo trivial. Inversamente, si $g$ es el homomorfismo trivial, entonces $f$ es epimorfismo y $h$ es monomorfismo. Por lo tanto, tenemos la siguiente proposición:

**3.5 PROPOSICION.** Si $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} M''$ es una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos, $h$ es un monomorfismo si, y sólo si, $g$ es trivial; $g$ es trivial si, y sólo si, $f$ es epimorfismo.

**3.6 EJEMPLO.** Sea $f: M \longrightarrow N$ un homomorfismo de $\Lambda$-módulos. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow ker\ f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow coker\ f \longrightarrow 0$$

es exacta.

**3.7 DEFINICION.** Sean $M$, $M'$, $N$, $N'$ $\Lambda$-módulos, con $f$, $f'$, $g$, $g'$ homomorfismos de $\Lambda$-módulos. Decimos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f'} & N \\ \downarrow_{g'} & & \downarrow_{f} \\ M' & \xrightarrow{g} & N' \end{array}$$

*conmuta* si $f \circ f' = g \circ g': M \longrightarrow N'$.

**3.8 PROPOSICION.** Sean $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ y $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ dos sucesiones exactas cortas, y supongamos que, en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} M' & \overset{f'}{\rightarrowtail} & M & \overset{f}{\twoheadrightarrow} & M'' \\ \downarrow_{h'} & & \downarrow_{h} & & \downarrow_{h''} \\ N' & \overset{g'}{\rightarrowtail} & N & \overset{g}{\twoheadrightarrow} & N'', \end{array}$$

dos de los tres homomorfismo $h'$, $h$, $h''$ son isomorfismos. Entonces el tercero es también isomorfismo.

**Demostración.** Supongamos que $h'$ y $h''$ son isomorfismos. Veamos que $h$ es monomorfismo: sea $x \in ker\ h$; entonces $gh(x) = 0 = h''f(x)$. Como $h''$ es isomorfismo, entonces $f(x) = 0$. Por lo tanto, existe $x' \in M'$ tal que $f'(x') = x$, por ser exacta la sucesión superior. Entonces $hf'(x') = h(x) = 0 = g'h'(x')$. Como $g'h'$ es inyectiva, entonces $x' = 0$. Luego, $f'(x') = x = 0$.

Ahora veamos que $h$ es epimorfismo: Sea $y \in N$. Como $h''$ es un isomorfismo, existe $x'' \in M''$ tal que $g(y) = h''(x'')$. Como $f$ es suprayectiva, existe $z \in M$ tal que $f(z) = x''$. Luego,

$$\begin{aligned} g(y - h(z)) &= g(y) - gh(z) \\ &= g(y) - h''f(z) \\ &= g(y) - h''(x'') \\ &= g(y) - g(y) = 0. \end{aligned}$$

Como la sucesión inferior es exacta, existe $y' \in N'$ con $g'(y') = y - h(z)$. Como $h'$ es isomorfismo, existe $x' \in M'$ tal que $h'(x') = y'$. Luego

$$\begin{aligned} h(f'(x') + z) &= hf'(x') + h(z) \\ &= g'h'(x') + h(z) \\ &= g'(y') + y - g'(y') \\ &= y \end{aligned}$$

Si definimos $x = f'(x') + z$, tendremos que $h(x) = y$.

Los otros dos casos posibles los dejamos como ejercicio, véase el problema 3.5.■

Observemos que la Proposición 3.8 establece los isomorfismos sólo cuando existe la función $h: M \longrightarrow N$ compatible con los isomorfismos dados y el diagrama conmuta. Por ejemplo, si consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \|\wr & & & & \|\wr & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es bien conocido que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

**3.9 PROPOSICION.** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M' & \xrightarrow{f'} & M & \xrightarrow{f} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h''} & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{g'} & N & \xrightarrow{g} & N'' & & \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo $\partial: ker\ h'' \longrightarrow coker\ h'$ tal que la siguiente sucesión es exacta

$$ker\ h' \longrightarrow ker\ h \xrightarrow{k} ker\ h'' \xrightarrow{\partial} coker\ h' \xrightarrow{k'} coker\ h \longrightarrow coker\ h''$$

**Demostración.** Definamos $\partial$ como sigue: sea $c \in ker\ h''$. Escojamos $b \in M$ tal que $f(b) = c$. Como $gh(b) = h''f(b) = h''c = 0$, existe $a' \in N'$ única tal que $h(b) = g'(a')$. Definamos $\partial(c) = [a'] \in coker\ h'$.

Veamos que $\partial$ está bien definida, es decir, $\partial$ es independiente de la selección de $b$: sea $b' \in M$ tal que $f(b') = c$. Entonces existe $a \in M'$ tal que $f'(a) = b' - b$, i.e. $b' = b + f'(a)$ y $h(b + f'(a)) = h(b') = h(b) + g'h'(a)$. Por lo tanto $\partial(c) = [a' + h'(a)] = [a']$. $\partial$ es un homomorfismo, y las sucesiones $ker\ h' \longrightarrow ker\ h \longrightarrow ker\ h''$ y $coker\ h' \longrightarrow coker\ h \longrightarrow coker\ h''$ son exactas (véase el problema 3.8).

Veamos la exactitud en $ker\ h''$: si $c \in ker\ h''$ es de la forma $c = f(b)$ para alguna $b \in ker\ h$, queremos ver que $\partial f(b) = \partial(c) = [0]$, es decir, que $im\ k \subset ker\ \partial$. Pero, como $b \in ker\ h$, $h(b) = 0 = g'(a')$. Luego, $a' = 0$ y $[a'] = [0]$. Por la definición de $\partial$, $\partial f(b) = \partial(c) = [a'] = [0]$.

Ahora veamos que $im\ k \supset ker\ \partial$: sea $c \in ker\ \partial$, es decir, $c \in ker\ h''$ y $\partial(c) = [a'] = 0$. Entonces $c = f(b)$ y $h(b) = g'(a')$. Luego, como $[a'] = 0$, $a' \in im\ h'$ y, por lo tanto, existe $a \in M'$ tal que $h'(a) = a'$. Sea $b' = b - f'(a) \in M$. Entonces $f(b') = f(b) - ff'(a) = f(b) = c$. Pero $h(b') = h(b) - hf'(a) = h(b) - g'(a') = h(b) - h(b) = 0$. Por lo tanto, existe una $b' \in ker\ h$ tal que $c = f(b')$, es decir, $c \in im\ k$. Luego, la sucesión es exacta en $ker\ h''$.

Veamos la exactitud en $coker\ h'$: sea $\partial(c) = [a'] \in coker\ h'$. Queremos ver que, si $[a'] \in im\ \partial$, entonces $[a'] \in ker\ k'$. Sea $c = f(b)$, y $h(b) = g'(a')$. Entonces $k'[a'] = [g'(a')] = [h(b)] = [0]$.

Sea $[a'] \in coker\ h'$. Queremos ver que, si $[a'] \in ker\ k'$, entonces $[a'] \in im\ \partial$. Supongamos que $k'[a'] = [0]$. Entonces $g'(a') = h(b)$ para alguna $b \in M$, y $c = f(b) \in ker\ h''$. Luego, $[a'] = \partial(c)$. ■

## PROBLEMAS

**3.1** Pruebe que, en una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{h} N \xrightarrow{k} N',$$

$f$ es un epimorfismo y $k$ un monomorfismo si, y sólo si, $M'' = 0$.

**3.2** Pruebe que, si $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos, entonces $M = 0$.

**3.3** Sea $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{h} N' \xrightarrow{k} N \xrightarrow{q} N''$ una sucesión exacta de $\Lambda$-homomorfismos. Pruebe que $g, k$ son homomorfismos triviales si, y sólo si, $h$ es isomorfismo, y que $h$ es isomorfismo si, y sólo si, $f$ es epimorfismo y $q$ monomorfismo.

**3.4** Pruebe que, si $0 \longrightarrow M \xrightarrow{h} N \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos entonces $h$ es un isomorfismo.

**3.5** Termine la demostración de la proposición 3.8.

**3.6** Demuestre el "Lema del cinco": considere el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 & \longrightarrow \\
& \big\downarrow{\scriptstyle h_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle h_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle h_3} & & \big\downarrow{\scriptstyle h_4} & & \big\downarrow{\scriptstyle h_5} & \\
\longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 & \longrightarrow
\end{array}$$

donde $h_1$, $h_2$, $h_4$ y $h_5$ isomorfismos. Entonces $h_3$ es un isomorfismo.

**3.7** Proporcione ejemplos de sucesiones exactas de grupos abelianos $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ y $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ tales que

(a) $M' \ncong N', M \cong N, M'' \cong N''$

(b) $M' \cong N', M \ncong N, M'' \cong N''$

(c) $M' \cong N', M \cong N, M'' \ncong N''$

**3.8** En los términos de la proposición 3.9, pruebe que $\partial$ es un homomorfismo y que las sucesiones

$$\mathit{ker}\ h' \longrightarrow \mathit{ker}\ h \longrightarrow \mathit{ker}\ h'' \quad \text{y} \quad \mathit{coker}\ h' \longrightarrow \mathit{coker}\ h \longrightarrow \mathit{coker}\ h''$$

son exactas.

## I.4 SUMA Y PRODUCTO DIRECTOS

Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de $\Lambda$-módulos. Sea $\prod_{i\in I} M_i$ su producto cartesiano, es decir, $\prod_{i\in I} M_i = \{f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i | f(i) \in M_i$ para todo $i \in I\}$. Queremos definir en $\prod_{i\in I} M_i$ una estructura de $\Lambda$-módulo. Definamos

$$+: \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$$

mediante

**4.1**
$$\begin{aligned} f+g: I &\longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i \\ i &\longmapsto (f+g)(i) = f(i)+g(i). \end{aligned}$$

De inmediato se ve que $+$ hace de $\prod M_i$ un grupo abeliano. El elemento de identidad bajo la suma de $\prod M_i$ es la función

$$\begin{aligned} 0: I &\longrightarrow \bigcup M_i \\ i &\longmapsto 0(i) = 0. \end{aligned}$$

Definamos $\mu: \Lambda \times \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ mediante

**4.2**
$$\begin{aligned} (\alpha, f) \longmapsto \mu(\alpha, f) = \alpha f: I &\longrightarrow \bigcup M_i \\ i &\longmapsto (\alpha f)(i) = \alpha(f(i)). \end{aligned}$$

Es fácil ver que esta definición, junto con la de $+$, hacen de $\prod M_i$ un $\Lambda$-módulo.

**4.3 DEFINICION.** $\prod_{i\in I} M_i$, junto con las definiciones 4.1 y 4.2, se llama *producto directo* de la familia $(M_i)_{i\in I}$ de $\Lambda$-módulos $M_i$, $i \in I$.

**4.4 DEFINICION.** Sea $\bigoplus_{i\in I} M_i = \{f \in \prod_{i\in I} M_i | f(i) = 0$ para casi toda $i \in I\}$. $\bigoplus_{i\in I} M_i$ se llama la *suma directa* de la familia $(M_i)_{i\in I}$.

Es claro que, si el conjunto de índices $I$ es finito, entonces

$$\prod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

Para cada $j \in I$ tenemos un epimorfismo de $\Lambda$-módulos

$$\begin{aligned} p_j: \prod_{i \in I} M_i &\longrightarrow M_j \qquad \forall j \in I \\ f &\longmapsto p_j(f) = f(j), \quad \forall f \in \prod_{i \in I} M_i \end{aligned}$$

al que llamaremos *proyección natural del producto directo* $\prod_{i \in I} M_i$ en $M_j$. La restricción de $p_j$ a $\bigoplus_{i \in I} M_i$ se llamará *proyección natural de la suma directa* $\bigoplus_{i \in I} M_i$ en $M_j$.

También para cada $j \in I$ existe un monomorfismo $\imath_j: M_j \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, dado por

$$x \longmapsto \imath_j(x)(i) = \begin{cases} x & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

que se llama *inclusión natural* del $\Lambda$-módulo $M_j$ en la suma directa $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

Por comodidad denotaremos $f(i)$ con $f_i$. Entonces, los elementos de $\bigoplus_{i \in I} M_i$ son familias $(f_i)_{i \in I}$. Con esta notación, la suma y la multiplicación escalar son $(f_i)_{i \in I} + (g_i)_{i \in I} = (f_i + g_i)_{i \in I}$, y $\alpha(f_i)_{i \in I} = (\alpha f_i)_{i \in I}$.

A continuación estableceremos una propiedad llamada *universal* de la suma directa.

**4.5 TEOREMA.** Si $M$ es un $\Lambda$-módulo y $\{\varphi_j: M_j \longrightarrow M\}_{j \in I}$ es una familia de homomorfismos de $\Lambda$-módulos, entonces existe un homomorfismo único $\varphi: \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M$ tal que $\varphi \circ \imath_j = \varphi_j$, para toda $j \in I$.

Nótese que dicho teorema caracteriza, junto con las inclusiones, a la suma directa, salvo un isomorfismo único. En efecto, consideremos, por ejemplo, el caso en que $I = \{1, 2\}$. El teorema 4.5 nos dice que, dados $\varphi_1: M_1 \longrightarrow M$ y $\varphi_2: M_2 \longrightarrow M$ junto con las inyecciones $\imath_1: M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ y $\imath_2: M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$, existe un homomorfismo único $\varphi: M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ M_1 \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\imath_1"] & M_1 \oplus M_2 \arrow[u, "\varphi"] & M_2 \arrow[ul, "\varphi_2"'] \arrow[l, "\imath_2"'] \end{tikzcd}$$

Ahora, sea $S$ un $\Lambda$-módulo; y sean $\imath'_1: M_1 \longrightarrow S, \imath'_2: M_2 \longrightarrow S$ inyecciones que cumplan 4.5. Escojamos $M = M_1 \oplus M_2$ y $\varphi_j = \imath_j$, $j = 1, 2$. Como $(S, \imath'_j)$

satisface 4.5, existe un homomorfismo único $\varphi\colon S \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \oplus M_2 & \\
M_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "i_1'"] & S \arrow[u, "\varphi"] & M_2 \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[l, "i_2'"']
\end{tikzcd}$$

Ahora escojamos $M = S$ en 4.5 con $\varphi_j' = i_j'$ tal que $M_1 \oplus M_2$ cumpla las condiciones de ese mismo teorema. Entonces existe un homomorfismo $\varphi'\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow S$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & S & \\
M_1 \arrow[ur, "\varphi_1'"] \arrow[r, "i_1"] & M_1 \oplus M_2 \arrow[u, "\varphi'"] & M_2 \arrow[ul, "\varphi_2'"'] \arrow[l, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

El siguiente diagrama es conmutativo tanto para la identidad como para la composición $\varphi\varphi'$.

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \oplus M_2 & \\
M_1 \arrow[ur] \arrow[r] & M_1 \oplus M_2 \arrow[u, shift right, "1_{M_1 \oplus M_2}"] \arrow[u, shift left, "\varphi\varphi'"'] & M_2 \arrow[ul] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad del teorema 4.5 se tiene que $1_{M_1 \oplus M_2} = \varphi\varphi'$. De manera semejante, podemos concluir que $\varphi'\varphi = 1_S$. Luego, $\varphi$ y $\varphi'$ son isomorfismos.

**Demostración** de 4.5: Definamos $\varphi((f_j)_{j \in I}) = \sum_{j \in I} \varphi_j(f_j)$. Esto es posible porque $f_j = 0$, excepto para un número finito de índices. Es fácil comprobar (problema 4.2) que $\varphi\colon \bigoplus_{j \in I} M_j \longrightarrow M$ es el único homomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & M \\
M_j \arrow[ur, "\varphi_j"] \arrow[r, "i_j"] & \bigoplus M_j \arrow[u, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

para toda $j \in I$.■

A continuación estableceremos la propiedad llamada *universal* del producto directo. Como definimos en 4.3, $\prod_{i \in I} M_i$ denota el producto directo de $\Lambda$-módulos $M_i$. Un elemento del producto es una familia $(f_j)_{j\in I}$ de elementos $f_j \in M_j$ sin ninguna restricción, y las $f_j$ pueden ser diferentes de cero para toda $j \in I$. La suma está dada por $(f_j)_{j\in I} + (g_j)_{j\in I} = (f_j + g_j)_{j\in I}$ y la multiplicación escalar por $\alpha(f_j)_{j\in I} = (\alpha f_j)_{j\in I}$. La proyección $p_j\colon \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$ es $p_j(f_i)_{i\in I} = f_j$.

**4.6 TEOREMA.** Si $M$ es un $\Lambda$-módulo y $\{\psi_j\colon M \longrightarrow M_j\}_{j\in I}$ es una familia de homomorfismos, entonces existe un homomorfismo único $\psi\colon M \longrightarrow \prod_{j\in I} M_j$ tal que $p_j\psi = \psi_j$, $j \in I$.

**Demostración.** Definamos $(\psi(x))_i = \psi_i(x)$. Es fácil ver que $\psi$ es un homomorfismo tal que $p_j\psi = \psi_j$ (problema 4.3). Veamos que es único: supongamos que existe $\psi'$ tal que $p_j\psi' = \psi_j$. Entonces $\psi_j(x) = p_j\psi(x) = p_j\psi'(x)$. Luego, $\psi' = \psi$. ∎

Podemos decir, debido a las propiedades universales de la suma directa y del producto directo, que, para definir un homomorfismo desde una suma directa, es suficiente definir homomorfismos desde cada sumando; y para definir un homomorfismo hacia el producto directo es suficiente definir homomorfismos hacia cada uno de sus factores.

Hemos visto que cuando consideramos productos directos, nos fijamos en las proyecciones, y que, cuando consideramos sumas directas, nos fijamos en las inyecciones.

**4.7 DEFINICION.** Diremos que una sucesión exacta corta

$$M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$$

se *escinde* si existe un homomorfismo $g'\colon M'' \longrightarrow M$ tal que $gg' = 1_{M''}$. Nótese que la sucesión $M' \overset{f}{\rightarrowtail} M' \oplus M'' \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ es exacta y se escinde.

**4.8 PROPOSICION.** Si $M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ es una sucesión exacta corta que se escinde, entonces $M \cong M' \oplus M''$.

**Demostración.** Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M & \\
M' \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\imath_{M'}"'] & M' \oplus M'' & M'' \arrow[ul, "g'"'] \arrow[l, "\imath_{M''}"]
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de la suma directa, existe $h\colon M'\oplus M''\longrightarrow M$. El siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, tail, "i_{M'}"] \arrow[d, equal] & M'\oplus M'' \arrow[r, two heads, "p_{M''}"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[d, equal] \\ M' \arrow[r, tail, "f"] & M \arrow[r, two heads, shift left, "g"] & M'' \arrow[l, shift left, "g'"] \end{tikzcd}$$

es decir, $f = h\circ 1_{M'}$ (por la propiedad universal de la suma directa) y $g\circ h = p_{M''}$, pues $g\circ h(x,y) = g(f(x)+g'(y)) = 0+gg'(y) = y$ y, $p_{M''}(x,y) = y$ $(x\in M', y\in M'')$. Luego, por 3.8, $h$ es un isomorfismo. ■

Obsérvese que cualquier sucesión exacta corta que se escinde es esencialmente $M' \rightarrowtail M'\oplus M'' \twoheadrightarrow M''$.

**4.9 TEOREMA.** Si un $\Lambda$-módulo $M$ posee submódulos $N$ y $N'$ tales que $N\cap N' = 0$ y $N+N' = M$, entonces $\varphi\colon N\oplus N'\longrightarrow M$, dado por $\varphi((y,y')) = y+y'$, es isomorfismo.

**Demostración.** Sean $\psi\colon N\longrightarrow M, \psi'\colon N'\longrightarrow M$ las inclusiones. Entonces existe un (único) homomorfismo $\varphi\colon N\oplus N'\longrightarrow M$ tal que $\varphi\circ\imath = \psi, \varphi\circ\imath' = \psi'$ ($\imath, \imath'$ son las inclusiones en la suma directa). Si $y+y' = 0$, entonces $y = -y' \in N\cap N' = 0$, y $\varphi$ es inyectiva. Como $N+N' = M, \varphi$ es suprayectiva.■

**4.10 COROLARIO.** Sean $f\colon M'\longrightarrow M$ y $g\colon M\longrightarrow M''$ tales que $g\circ f$ es un isomorfismo. Entonces $M\cong im\ f\oplus ker\ g$.

**Demostración.** Veamos que $im\ f + ker\ g = M$: sean $x\in M$ y $g(x)\in M''$. Como $gf\colon M'\longrightarrow M''$ es un isomorfismo, existe $y\in M'$ tal que $gf(y) = g(x)$. Sean $z = f(y)\in im\ f$ y $z' = x-z$. Entonces $g(z') = g(x-z) = g(x)-g(z) = gf(y)-g(f(y)) = 0$. Luego, $z'\in ker\ g$ y, por lo tanto, $z+z'\in im\ f + ker\ g$, pues $x$ era arbitraria.

Veamos que $im\ f\cap ker\ g = 0$. Sea $x\in im\ f\cap ker\ g$. Entonces, como $x\in im\ f$, existe $y\in M'$ tal que $f(y) = x$. Como $x\in ker\ g$, $g(x) = 0$. Luego, $gf(y) = g(x) = 0$. Como $gf$ es un isomorfismo, $f(y) = 0$ y, por lo tanto, $x = 0$. Por 4.9, $M\cong im\ f\oplus ker\ g$.■

## PROBLEMAS

**4.1** Pruebe que $\prod_{i\in I} M_i$ y $\bigoplus_{i\in I} M_i$, junto con la suma y la multiplicación escalar definidas en 4.1, 4.2 y 4.4, poseen una estructura de $\Lambda$-módulo.

**4.2** Sea $M = \bigoplus M_i$, $p_j\colon M \longrightarrow M_j$, $\imath_j\colon M_j \longrightarrow M$ los homomorfismos proyección e inclusión respectivamente. Demuestre que todo elemento $x \in M$ se puede escribir en la forma $x = \sum_{j\in I} \imath_j(p_j(x))$. Además, si los $M_j$ son submódulos de $M$, entonces $x = \sum_{j\in I} x_j$ ($x_j \in M_j$, casi todos cero). Demuestre que esta expresión es única.

**4.3** Escriba con detalle las demostraciones de las proposiciones 4.5 y 4.6.

**4.4** Pruebe que, para una familia $\{N_j\}_{j=1}^n$ de submódulos de un $\Lambda$-módulo $M$, $N_1 + \cdots + N_n = M$ y $N_i \cap (N_i + \cdots + N_{i-1} + N_{i+1} + \cdots + N_n) = 0$ $(1 \le i \le n)$ si, y sólo si, el homomorfismo $\varphi\colon \bigoplus_{j=1}^n N_j \longrightarrow M$ dado por $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ es un isomorfismo.

**4.5** Demuestre que $(M' \oplus M) \oplus M'' \cong M' \oplus (M \oplus M'')$, y que $M \oplus N \cong N \oplus M$ (Sugerencia: utilice la propiedad universal de la suma directa).

**4.6** Un $\Lambda$-módulo $M$ se llama *semisimple* si $M$ es suma directa de submódulos simples de $M$. Demuestre que, para un $\Lambda$-módulo arbitrario, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $M$ es semisimple.

(ii) Todo submódulo de $M$ es sumando directo de $M$.

**4.7** Pruebe que:

(a) Si $N$ es un submódulo de un $\Lambda$-módulo semisimple $M$, entonces $N$ es semisimple.

(b) Todo módulo cociente de un $\Lambda$-módulo semisimple es semisimple.

(c) La suma directa de $\Lambda$-módulos semisimples es semisimple.

**4.8** Demuestre que, si $\Lambda$ es un campo $K$, entonces todo $K$-módulo es una suma directa de copias de $K$.

**4.9** Pruebe que $\mathbb{Z}/m \oplus \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/mn$ si, y sólo si, $(m, n) = 1$.

**4.10** Demuestre que, dada una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) existe $g' \colon M'' \longrightarrow M$ tal que $g \circ g' = 1_{M''}$

(ii) existe $f' \colon M \longrightarrow M'$ tal que $f' \circ f = 1_{M'}$

**4.11** Sea $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ la suma directa de la familia de submódulos $M_i$ de $M$, $i \in I$. Pruebe que, si $\mathcal{T}M$ es el submódulo de torsión de $M$, entonces $\mathcal{T}M = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{T}M_i$

**4.12** Demuestre que un sumando directo de un módulo divisible es divisible.

**4.13** Pruebe que el producto y la suma directa de módulos divisibles es divisible.

## I.5 $\mathrm{HOM}_\Lambda$(M,N)

Sea $\Lambda$ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

Denotemos con $Hom_\Lambda(M,N)$ el conjunto de homomorfismos del $\Lambda$-módulo $M$ en el $\Lambda$-módulo $N$. Sean $f,g\colon M \longrightarrow N$ $\Lambda$-homomorfismos y definamos $f+g\colon M \longrightarrow N$ mediante $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. De inmediato se comprueba que esta definición hace de $Hom_\Lambda(M,N)$ un grupo abeliano. Ahora, definamos una multiplicación escalar $\alpha f\colon M \longrightarrow N$, $\alpha \in \Lambda$, mediante $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$. Utilizando la conmutatividad de $\Lambda$, es fácil comprobar que $Hom_\Lambda(M,N)$ posee una estructura de $\Lambda$-módulo. Nótese que, si $\Lambda$ no es conmutativo, entonces $Hom_\Lambda(M,N)$ siempre es un grupo abeliano, pero no es necesariamente un $\Lambda$-módulo (véase el problema 5.1).

Sea $\psi\colon N' \longrightarrow N$ un homomorfismo de $\Lambda$-módulos y $(M \xrightarrow{f} N')$ un elemento de $Hom_\Lambda(M,N')$. Asociemos a $f$ un homomorfismo $(M \xrightarrow{g} N) \in Hom_\Lambda(M,N)$ mediante una función

$$\psi_* = Hom_\Lambda(M,\psi)\colon Hom_\Lambda(M,N') \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N)$$

dada por $\psi_*(f) = \psi \circ f$. Está claro que $\psi_*$ es un homomorfismo (de grupos abelianos si $\Lambda$ es no conmutativo) de $\Lambda$-módulos, llamado *homomorfismo inducido por* $\psi$.

**5.1 PROPOSICION.** Sean $\psi\colon N' \longrightarrow N$ y $\psi'\colon N \longrightarrow N''$ homomorfismos de $\Lambda$-módulos y $M$ un $\Lambda$-módulo.

(i) si $1_N\colon N \longrightarrow N$ es la identidad, entonces

$$1_{N_*}\colon Hom_\Lambda(M,N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N)$$

es la identidad, y

(ii) $(\psi' \circ \psi)_* = \psi'_* \circ \psi_*$.

Podemos escribir las afirmaciones de 5.1 en el siguiente diagrama:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(M & \xrightarrow{f} & N') & \in & Hom_\Lambda(M,N') & & \\
\| & {\scriptstyle 1_N} & \downarrow\psi & {\scriptstyle \psi'\circ\psi} & \downarrow\psi_* & {\scriptstyle 1_{N_*}} & \\
(M & \xrightarrow{g} & N) & \in & Hom_\Lambda(M,N) & & {\scriptstyle (\psi'\circ\psi)_*} \\
\| & & \downarrow\psi' & & \downarrow\psi'_* & & \\
(M & \xrightarrow{h} & N'') & \in & Hom_\Lambda(M,N'') & &
\end{array}
$$

Sea $\varphi: M' \longrightarrow M$ un homomorfismo de $\Lambda$-módulos y $(M \xrightarrow{g} N) \in Hom_\Lambda(M,N)$. Asociemos a $g$ un homomorfismo $(M' \xrightarrow{f} N) \in Hom_\Lambda(M',N)$ mediante una función

$$\varphi^* = Hom_\Lambda(\varphi,N): Hom_\Lambda(M,N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M',N),$$

dada por $\varphi^*(g) = g\circ\varphi$. Es claro que $\varphi^*$ es un homomorfismo (de grupos abelianos si $\Lambda$ no es conmutativo) de $\Lambda$-módulos, llamado *homomorfismo inducido por* $\varphi$.

**5.2 PROPOSICION.** Sean $\varphi: M' \longrightarrow M$ y $\varphi': M \longrightarrow M''$ homomorfismos de $\Lambda$-módulos y $N$ un $\Lambda$-módulo.

(i) si $1_M: M \longrightarrow M$ es la identidad, entonces
$$1_M^*: Hom_\Lambda(M,N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N)$$
es la identidad.

(ii) $(\varphi'\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\varphi'^*$.

Podemos escribir las afirmaciones de 5.2 en el siguiente diagrama

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & (M' & \xrightarrow{f} & N) & \in Hom_\Lambda(M',N) & & & \\
 & \downarrow\varphi & {\scriptstyle 1_M} & \| & \uparrow\varphi^* & {\scriptstyle 1_M^*} & & \\
{\scriptstyle \varphi'\circ\varphi} & (M & \longrightarrow & N) & \in Hom_\Lambda(M,N) & & {\scriptstyle (\varphi'\circ\varphi)^*} & \\
 & \downarrow\varphi' & & \| & \uparrow\varphi'^* & & & \\
 & (M'' & \longrightarrow & N) & \in Hom_\Lambda(M'',N) & & &
\end{array}
$$

Las demostraciones de 5.1 y 5.2 son consecuencia de las definiciones (véase el problema 5.2). Obsérvese que, en el caso $Hom_\Lambda(\_\_, N)$, las flechas se invierten al considerar los homomorfismos inducidos, mientras que en $Hom_\Lambda(M, \_\_\,)$ las flechas de los homomorfismos inducidos no se invierten. En el capítulo II estudiaremos este tipo de situaciones.

**5.3 PROPOSICION.** Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ y $\{N_i\}_{i\in I}$ familias de $\Lambda$-módulos, $M$ y $N$ $\Lambda$-módulos. Entonces

(i) $Hom_\Lambda(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \underset{\rho}{\overset{\cong}{\longrightarrow}} \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$.

(ii) $Hom_\Lambda(M, \prod_{i\in I} N_i) \underset{\eta}{\overset{\cong}{\longrightarrow}} \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M, N_i)$.

**Demostración.** (i) Definamos $\rho$ mediante $\rho(\varphi) = (\varphi\imath_i)_{i\in I}$. Es claro que $\rho$ es un homomorfismo. Veamos que $\rho$ es monomorfismo: supongamos que $\rho(\varphi) = 0$; entonces $(\varphi\imath_i) = 0$ para cada $i \in I$. Es decir, en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & N \\ M_i \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "\imath_i"] & \bigoplus M_i \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

el homomorfismo $0: M_i \longrightarrow N$ es tal que $0 = \varphi\imath_i$. Luego, $\varphi = 0$. Por lo tanto, $ker\ \rho = \{0\}$.

Veamos que $\rho$ es un epimorfismo: sea $(\varphi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$. Entonces tenemos $\varphi_i: M_i \longrightarrow N$ para cada $i \in I$. Por el teorema 4.5, existe un homomorfismo $\varphi: \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ tal que $\varphi\imath_i = \varphi_i$ para cada $i \in I$. Luego, $\rho(\varphi) = (\varphi_i)_{i\in I}$.

La demostración de (ii) es similar (problema 5.3).■

Nótese que, en 5.3 (i), $Hom_\Lambda(\_\_, N)$ convierte las sumas directas en productos directos, y que, en 5.3 (ii), $Hom_\Lambda(M, \_\_\,)$ preserva productos y sumas directas.

**5.4 PROPOSICION.** Sea $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\longrightarrow} N''$ una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos. Entonces, para cualquier $\Lambda$-módulo $M$, la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N') \overset{\psi_*}{\longrightarrow} Hom_\Lambda(M, N) \overset{\psi'_*}{\longrightarrow} Hom_\Lambda(M, N'')$$

es exacta.

**Demostración.** Veamos que $\psi_*$ es inyectiva: supongamos que $\psi_*(f) = 0$, es decir, supongamos que $(\psi \circ f)(y) = 0$ para toda $y \in M, f \in Hom_\Lambda(M, N')$. Como $\psi$ es un monomorfismo, $f(y) = 0$ para toda $y \in M$. Luego, $f = 0$. Por lo tanto, $\psi_*$ es inyectiva.

Veamos ahora que $im\ \psi_* \subset ker\ \psi'_*$: supongamos que $g \in im\ \psi_*$. Luego, $g = \psi \circ f$ para alguna $f \in Hom_\Lambda(M, N')$. Entonces

$$\psi'_*(g) = \psi' \circ g = \psi' \circ \psi \circ f = 0,$$

pues $\psi' \circ \psi = 0$. Luego, $im\ \psi_* \subset ker\ \psi'_*$.

Ahora, veamos que $im\ \psi_* \supset ker\ \psi'_*$: sea $g\colon M \longrightarrow N$ tal que $\psi'_*(g) = 0$, es decir, que $\psi' \circ g = 0$. Demostremos que $g$ es de la forma $\psi_*(f) = \psi \circ f$ para alguna $f\colon M \longrightarrow N'$. Si $x \in M$ y $\psi' g(x) = 0$, entonces $g(x) \in ker\ \psi' = im\ \psi$. Luego, existe una única $y \in N'$ tal que $\psi(y) = g(x)$, pues $\psi$ es monomorfismo. Definamos $f\colon M \longrightarrow N'$ mediante $f(x) = y = \psi^{-1}g(x)$. Luego, $\psi(f) = g$.■

Obsérvese que, aun cuando $\psi'$ sea suprayectiva, en general $\psi'_*$ no es suprayectiva. Por ejemplo, considérese el caso en que $\Lambda = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/n$, $N' = N = \mathbb{Z}$ y $N'' = \mathbb{Z}/n$ (véase el problema 5.4).

De manera semejante, obtenemos la siguiente

**5.5 PROPOSICION.** Sea $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M''$ una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos. Entonces, para cualquier $\Lambda$-módulo $N$, la sucesión inducida

$$Hom_\Lambda(M', N) \xleftarrow{\varphi^*} Hom_\Lambda(M, N) \xleftarrow{\varphi'^*} Hom_\Lambda(M'', N) \longleftarrow 0$$

es exacta.■

## PROBLEMAS

**5.1** ¿Por qué, si $\Lambda$ es un anillo no conmutativo, $Hom_\Lambda(M, N)$ no es necesariamente $\Lambda$-módulo?

**5.2** Pruebe con detalle las proposiciones 5.1 y 5.2.

**5.3** Demuestre que $Hom_\Lambda(M, \prod_{i\in I} N_i) \cong \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M, N_i)$ para $M$, $N$ y $N_i$ como en la proposición 5.3.

**5.4** Calcule $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n)$, $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z})$, $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n)$, $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ y $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$.

**5.5** Proporcione ejemplos en que

(i) $Hom_\Lambda(\prod_{i\in I} M_i, N) \ncong \bigoplus_{i\in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$

(ii) $Hom_\Lambda(\prod_{i\in I} M_i, N) \ncong \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$

(iii) $Hom_\Lambda(M, \bigoplus_{i\in I} M_i) \ncong \bigoplus_{i\in I} Hom_\Lambda(M, M_i)$

(iv) $Hom_\Lambda(M, \bigoplus_{i\in I} M_i) \ncong \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M, M_i)$

**5.6** Demuestre la proposición 5.5.

**5.7** Pruebe el inverso de la proposición 5.4: si

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N'')$$

es exacta, entonces

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$$

es exacta.

**5.8** Pruebe el inverso de la proposición 5.5: si

$$Hom_\Lambda(M', N) \longleftarrow Hom_\Lambda(M, N) \longleftarrow Hom_\Lambda(M'', N) \longleftarrow 0$$

es exacta, entonces

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es exacta.

**5.9** Pruebe que, si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta que se escinde, entonces

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M'', N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M', N) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta que se escinde.

## I.6 MÓDULOS LIBRES Y PROYECTIVOS

En esta sección generalizaremos el concepto de grupo abeliano libre para módulos e introduciremos el de módulo proyectivo, que ha sido crucial en el estudio de la Teoría de Anillos y ha tenido importantes aplicaciones en la Teoría de Representación de Grupos y Algebras, en Geometría Algebraica y en Topología.

Consideremos la suma directa $\bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ de la familia de anillos $\Lambda_j$, $j \in J$, donde cada $\Lambda_j$ es isomorfo a un anillo fijo $\Lambda$, i.e., $\Lambda_j = \Lambda$, $\forall j \in J$. Sea $\imath_j\colon \Lambda_j \longrightarrow \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ la inclusión natural. Escribamos $\imath_j(1) = e_j$, donde

$$e_j = \delta_{j,j'} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j' \\ 0 & \text{si } j \neq j', \end{cases} \qquad j' \in J$$

Luego, cada $x \in \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ puede escribirse en forma única como $x = \sum_{j\in J} x_j e_j$. A la función $g\colon J \longrightarrow \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$, dada por $g(j) = e_j$, la llamaremos *función canónica.* A continuación, veamos que la pareja $(\bigoplus_{j\in I}\Lambda_j, g)$ es una solución de un problema universal.

**6.1 PROPOSICION.** Para todo $\Lambda$-módulo $M$ y para toda función $f\colon J \longrightarrow M$, existe un homomorfismo único $\phi\colon \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j \longrightarrow M$ tal que $f = \phi\circ g$.

**Demostración.** La condición $f = \phi \circ g$ quiere decir que $f(j) = \phi \circ g(j) = \phi(e_j), \forall j \in J$, lo cual a su vez es equivalente a que $\phi(\lambda e_j) = \lambda f(j)$, $\forall \lambda \in \Lambda$, $\forall j \in J$; esto equivale a decir que $\phi\circ\imath_j\colon \Lambda_j \longrightarrow M$, dada por $\lambda \longmapsto \lambda f(j)$ $\forall j \in J$, es homomorfismo.

$$\begin{tikzcd} & M & \\ \Lambda_j \arrow[r, "\imath_j"] \arrow[ur, "\phi\circ\imath_j"] & \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j \arrow[u, "\phi"] & J \arrow[l, "g"'] \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

El resto es consecuencia del teorema 4.5.■

**6.2 DEFINICION.** Diremos que la familia $(x_j)_{j\in J}$ de elementos de un $\Lambda$-módulo $M$ es:

(i) *linealmente independiente* si $\phi$ es inyectiva,

(ii) una familia de *generadores* si $\phi$ es suprayectiva,

(iii) una *base* si $\phi$ es biyectiva.

En otras palabras, la familia $(x_j)_{j\in J}$ es linealmente independiente si $\phi(\sum_{j\in J}\lambda_j e_j) = \sum_{j\in J}\lambda_j x_j = 0$ implica que $\lambda_j = 0$ para toda $j \in J$, $\lambda_j \in \Lambda$. Decir que $\phi$ es suprayectiva equivale a decir que todo elemento de $M$ se puede escribir como $\sum_{j\in J}\lambda_j x_j$, es decir, como una *combinación lineal*. Decir que $\phi$ es biyectiva equivale a decir que todo elemento $x \in M$ se puede escribir de una, y solamente una, manera en la forma $x = \sum_{j\in J}\lambda_j x_j$, para toda $j \in J$. Diremos que una familia $(x_j)_{j\in J}$ es linealmente dependiente si dicha familia no es linealmente independiente.

Por definición, $\bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ es libre, y la familia $(e_j)_{j\in J}$ es una base (llamada *canónica*). Frecuentemente se identifica a $J$ con el conjunto de $e_j$ mediante una biyección dada por $j \longmapsto e_j$. Diremos que un subconjunto $X$ de $M$ es *linealmente independiente* si la familia definida por la función identidad de $X$ en $X$ es linealmente independiente, y $X$ será una *base* de $M$ si la familia definida por la identidad de $X$ en $X$ es una base de $M$. Por lo tanto, toda familia definida por una función biyectiva de un conjunto de índices $J$ en un conjunto $X$ de $M$ es linealmente independiente o base, respectivamente. También diremos que el subconjunto $X$ es linealmente dependiente si $X$ no es linealmente independiente.

Diremos que un $\Lambda$-módulo $L$ es *libre* con base en el conjunto $X$ si $X$ es una base para $L$. Si un $\Lambda$-módulo posee un conjunto finito de generadores, diremos que es *finitamente generado*.

**6.3 EJEMPLOS.**

(a) Todo espacio vectorial es un $\Lambda$-módulo libre si $\Lambda$ es un campo.

(b) No todo $\mathbb{Z}$-módulo (i.e., grupo abeliano) es libre.

(c) Todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.

(d) $\mathbb{Z}/n$ y $\mathbb{Q}$ no son $\mathbb{Z}$-módulos libres.

**6.4 PROPOSICION.** (i) $\bigoplus\Lambda_j$ es un $\Lambda$-módulo libre con base $\{e_j\}_{j\in J}$.

(ii) Si $L$ es un $\Lambda$-módulo libre con base $X$, entonces es isomorfo a $\bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$.

**Demostración.** (i) Inmediato de la definición de suma directa.

(ii) Veamos que existe un isomorfismo $L \cong \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$. Sea $x = \sum_{j\in J}\lambda_j x_j$. Definamos $\eta\colon L \longrightarrow \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ mediante $\eta(x) = (\lambda_j)_{j\in J}$, y $\rho_j\colon \Lambda_j \longrightarrow L$ mediante $\rho_j(\lambda_j) = \lambda_j x_j$. La familia de homomorfismos $\rho_j$ da lugar a $\rho\colon \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j \longrightarrow L$

utilizando la propiedad universal de la suma directa. Luego,

$$\begin{aligned}\rho\circ\eta(x) &= \rho\circ\eta(\sum_{j\in J}\lambda_j x_j)\\ &= \rho(\lambda_j)_{j\in J}\\ &= \sum_{j\in J}\rho_j(\lambda_j)\\ &= \sum_{j\in J}\lambda_j x_j\\ &= x\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho\circ\eta = 1_L$. Análogamente, $\eta\circ\rho = 1_{\bigoplus_{j\in J}\Lambda_j}$. ∎

Hemos visto que un $\Lambda$-módulo libre $L$ es isomorfo a $\bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$, y que $L$ satisface la propiedad universal descrita en 6.1. Esto es, si existen dos $\Lambda$-módulos libres cuya base es un mismo conjunto $X$, éstos son isomorfos, y dado un subconjunto $X$ de un $\Lambda$-módulo, siempre existe un $\Lambda$-módulo libre con base $X$.

**6.5 COROLARIO.** Sea $\{L_i\}_{i\in I}$ una familia de $\Lambda$-módulos libres. Entonces $\bigoplus_{i\in I} L_i$ es un $\Lambda$-módulo libre.∎

**6.6 PROPOSICION.** Todo $\Lambda$-módulo $M$ es cociente de un $\Lambda$-módulo libre.

**Demostración.** Sea $X$ un subconjunto de $M$ tal que $\langle X\rangle = M$. En particular, podemos tomar $X = M$. Consideremos el $\Lambda$-módulo libre generado por $X$ y denotémoslo con $L$. Entonces la inclusión $f\colon X\longrightarrow M$ se extiende a un homomorfismo $\phi\colon L\longrightarrow M$. Como $X = f(X)\subset\phi(L)\subset M$, y como $X = M$ genera a $M$, tenemos que $\phi(L) = M$. Luego, $\phi$ es un epimorfismo y, por 2.8, tenemos que $M\cong L/ker\ \phi$.∎

**Nota**: El hecho de que se escogiera $X = M$ nos dice que tenemos un conjunto muy grande de generadores; puede haber módulos libres $L$ más pequeños que bajo $\phi$ vayan a $M$. La proposición 6.6 nos dice que $M$ puede describirse mediante generadores y relaciones provistas por el núcleo de $\phi$.

En 5.4 vimos que, dada una sucesión exacta

$$0\longrightarrow N'\xrightarrow{\psi} N\xrightarrow{\psi'} N''$$

la sucesión inducida, para un $\Lambda$-módulo $M$

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N') \xrightarrow{\psi_*} Hom_\Lambda(M, N) \xrightarrow{\psi'_*} Hom_\Lambda(M, N'')$$

es exacta. Es de esperar que sea interesante el caso en que $\psi'_*$ sea suprayectiva. A continuación estudiaremos una clase especial de $\Lambda$-módulos en que, si además $\psi'$ es epimorfismo, entonces $\psi'_*$ es un epimorfismo.

**6.7 DEFINICION.** Un $\Lambda$-módulo $P$ se llamará *proyectivo* si, para todo homomorfismo $f\colon P \longrightarrow N''$ y para todo epimorfismo $\psi'\colon N \longrightarrow N''$ de $\Lambda$-módulos, existe un homomorfismo $h\colon P \longrightarrow N$ tal que $\psi' \circ h = f$.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & {}^{h}\swarrow & \downarrow f & & \\ N & \xrightarrow{\psi'} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**6.8 PROPOSICION.** Si $P$ es un $\Lambda$-módulo proyectivo y

$$N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$$

es una sucesión exacta, entonces la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N') \xrightarrow{\psi_*} Hom_\Lambda(P, N) \xrightarrow{\psi'_*} Hom_\Lambda(P, N'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

**Demostración.** Por 5.4, lo único que nos resta es probar que $\psi'_*$ es un epimorfismo. $\psi'_*$ es un epimorfismo si, y sólo si, para todo homomorfismo $f\colon P \longrightarrow N''$ existe un homomorfismo $h\colon P \longrightarrow N$ tal que $\psi'_*(h) = f$. Como $P$ es proyectivo, existe una $h\colon P \longrightarrow N$ tal que $f = \psi' \circ h$. Luego, $\psi'_*(h) = \psi' \circ h = f$ y, por lo tanto, $\psi'_*$ es un epimorfismo.∎

**6.9 PROPOSICION.** Si $L$ es un $\Lambda$-módulo libre, entonces, para todo homomorfismo $f\colon L \longrightarrow N''$ y para todo epimorfismo $\psi'\colon N \longrightarrow N''$, existe un homomorfismo $h\colon L \longrightarrow N$ tal que $f = \psi' \circ h$. Es decir, si $L$ es libre, entonces $L$ es proyectivo.

**Demostración.** Sea $L$ libre con base en el conjunto $X \subset L$. Como $\psi'$ es un epimorfismo, para toda $x_i \in X$ existe $g(x_i) \in N$, $g\colon X \longrightarrow N$, tal que

$\psi'(g(x_i)) = f(x_i)$. Como $L$ es libre, $g: X \longrightarrow N$ se extiende a un homomorfismo único $h: L \longrightarrow N$. Luego, como $\langle X \rangle = L$, si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in L, \lambda_i \in \Lambda$, $x_i \in X$, tenemos que

$$\begin{aligned}\psi'(h(x)) &= \psi'(h(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi'(g(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \\ &= f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Luego, $\psi' \circ h = f$, pues $x$ es arbitraria.∎

**6.10 PROPOSICION.** $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ es un $\Lambda$-módulo proyectivo si, y sólo si, $P_i$ es proyectivo.

**Demostración.** Haremos la demostración para $i = 1, 2$. El caso general es análogo. Supongamos que $P = P_1 \oplus P_2$ es un $\Lambda$-módulo proyectivo. Veamos que $P_2$ es proyectivo: sean $f: P_2 \longrightarrow N''$, $\psi': N \twoheadrightarrow N''$, $\imath_2: P_2 \longrightarrow P$ y $p_2: P \longrightarrow P_2$ homomorfismos en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, "\imath_2"] \arrow[dr, "k"'] & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "h"] & P_2 \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "k"'] & \\ & N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $P$ es proyectivo, existe un homomorfismo $h: P \longrightarrow N$ tal que $\psi' \circ h = f \circ p_2$. Sea $k = h \circ \imath_2: P_2 \longrightarrow N$. Luego,

$$\psi' \circ k = \psi' \circ h \circ \imath_2 = f \circ p_2 \circ \imath_2 = f,$$

pues $p_2 \circ \imath_2 = 1_{P_2}$. Por lo tanto, $P_2$ es proyectivo. Un razonamiento análogo muestra que también $P_1$ es proyectivo.

Supongamos ahora que $P_1$ y $P_2$ son proyectivos. Sean $\psi': N \twoheadrightarrow N''$, $h: P_1 \oplus P_2 \longrightarrow N''$, $h_1 = h \circ \imath_1: P_1 \longrightarrow N''$ y $h_2 = h \circ \imath_2: P_2 \longrightarrow N''$. Como $P_1$ y $P_2$ son proyectivos, existen $k_1$ y $k_2$ tales que $\psi' \circ k_1 = h_1$ y $\psi' \circ k_2 = h_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
 & N'' \arrow[u] & \\
h_1 & N \arrow[u, "\psi'"] & h_2 \\
P_1 \arrow[ur, "k_1"] \arrow[r, "\imath_1"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[u, "k"] & P_2 \arrow[ul, "k_2"'] \arrow[l, "\imath_2"']
\end{tikzcd}$$

$$h$$

Por la propiedad universal de la suma directa, existe $k\colon P_1 \oplus P_2 \longrightarrow N$ tal que $k \circ \imath_1 = k_1$ y $k \circ \imath_2 = k_2$. Entonces

$$\begin{array}{llll} \psi' \circ k \circ \imath_1 = & \psi' \circ k_1 = & h_1 = & h \circ \imath_1 \quad \text{y} \\ \psi' \circ k \circ \imath_2 = & \psi' \circ k_2 = & h_2 = & h \circ \imath_2 \end{array}$$

Por la unicidad de 4.5, tenemos que $\psi' \circ k = h$. Luego, $P_1 \oplus P_2$ es proyectivo.■

**6.11 TEOREMA.** Sea $P$ un $\Lambda$-módulo. Entonces los siguientes postulados son equivalentes:

(i) $P$ es proyectivo.

(ii) Toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ se escinde.

(iii) $P$ es un sumando directo de un $\Lambda$-módulo libre.

(iv) Para cualquier sucesión exacta corta $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$, la sucesión inducida siguiente es exacta:

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N'') \longrightarrow 0$$

**Demostración.** (i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $P$ es proyectivo. Entonces, para toda $g\colon N \twoheadrightarrow P$ e $1_P\colon P \longrightarrow P$, existe una $h\colon P \longrightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "1_P"] & \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Esto es, $1_P = g \circ h$. Por lo tanto, la sucesión se escinde.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Por 6.6 $P$ es isomorfo al cociente de un $\Lambda$-módulo libre $L$ y existe un epimorfismo $g\colon L \longrightarrow P$. Entonces consideramos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow ker\ g \longrightarrow L \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

Por hipótesis, existe $h\colon P \longrightarrow L$ tal que $1_P = g \circ h$. Por 2.7, $h$ es un monomorfismo; y por 4.10, $L = im\ h \oplus ker\ g$. Luego, $P$ es isomorfo al sumando directo $im\ h$ de $L$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Como todo $\Lambda$-módulo libre es proyectivo y todo sumando directo de un proyectivo es proyectivo, es inmediata la equivalencia.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) es inmediata de 6.8 y 6.7.■

## PROBLEMAS

**6.1** Sean $X, T, U$ conjuntos y $f\colon X \longrightarrow T$, $g\colon T \longrightarrow U$ funciones. Sean $f(X)$, $f(T)$ y $f(U)$ los $\Lambda$-módulos libres con base $X, T$ y $U$, respectivamente. Demuestre que:

(i) Toda función $f\colon X \longrightarrow T$ se puede extender a un homomorfismo único $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(T)$ de $\Lambda$-módulos libres.

(ii) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

(iii) si $1_X$ es la identidad en $X$, entonces $F(1_X)$ es la identidad en $F(X)$.

(iv) $f$ es inyectiva si, y sólo si, $F(f)$ es monomorfismo.

(v) $f$ es suprayectiva si, y sólo si, $F(f)$ es epimorfismo.

**6.2** Sea $\Lambda = K$ un campo. Pruebe que todo $K$-módulo es libre.

**6.3** Sea $K$ un campo. Pruebe que todas las bases de un $K$-módulo tienen la misma cardinalidad.

**6.4** Pruebe que $\mathbb{Z}/n$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo, $n \geq 2$.

**6.5** Pruebe que un grupo abeliano finitamente generado es proyectivo si, y sólo si, es libre.

**6.6** Proporcione varios ejemplos de módulos proyectivos que no sean libres. (Sugerencia: considere $\Lambda = \mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$ como $\mathbb{Z}/6$-módulo).

**6.7** Pruebe que $\mathbb{Z}/m$ es un $\mathbb{Z}/mn$-módulo proyectivo cuando $m$ y $n$ son enteros primos relativos entre sí.

**6.8** Sea $\lambda: H \longrightarrow G$ un homomorfismo de grupos. Sea D el grupo generado por los elementos del conjunto $H \times G$ sujeto a las relaciones

$$\begin{aligned} &r_1:(h,g)(h',g) = (hh',g) \qquad \text{y} \\ &r_2:(h,g)(h',g')(h,g)^{-1} = (h', g(\lambda(h))g^{-1}g') \end{aligned}$$

Sea $\partial: D \longrightarrow G$ el homomorfismo de grupos dado por $\partial(h,g) = g(\lambda(h))g^{-1}$ y $\varphi: G \longrightarrow Aut(D)$ la acción de $G$ en $D$ dada por ${}^{g}(h,g') = (h,gg')$, $(h,h' \in H; g,g' \in G)$. Compruebe que $(D,G,\partial)$ así definido es un módulo cruzado, llamado *módulo cruzado inducido por* $\lambda$.

**6.9** Sea $(L,G,\partial)$ un módulo cruzado. Diremos que $L$ es un *módulo cruzado libre con base* $\{x_i\}_{i\in I}(x_i \in L)$ si, dado cualquier otro módulo cruzado $(M,G',\partial')$ y un homomorfismo $\beta: G \longrightarrow G'$ tal que $\beta(\partial(x_i)) = \partial'(x_i')$, con $x_I' \in M$, existe un homomorfismo único $\alpha: L \longrightarrow M$ tal que $\alpha(x_i) = x_i'$, la estructura de módulo cruzado se preserva y $\partial'\alpha = \beta\partial$; es decir, $\alpha({}^{g}x) = {}^{\beta(g)}\alpha(x)$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} x_i & & L & \xrightarrow{\partial} & G \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ x_i' & & M & \longrightarrow & G' \end{array}$$

Sea $\lambda: H \longrightarrow G$ un homomorfismo de grupos donde $H$ es un grupo libre cuya base es el conjunto $S$. Compruebe que el módulo cruzado inducido por $\lambda, (D, G.\partial)$, es precisamente el módulo cruzado libre cuya base es el conjunto $\nu(S)$, donde $\nu: H \longrightarrow D$ es la inclusión dada por $\nu(h) = (h,1)$ para toda $h \in H$.

**6.10** Al módulo cruzado $(D,G,\partial)$ del problema anterior se le llama *módulo cruzado libre sobre* $\lambda$. Sea $L$ un G-módulo cruzado libre con base $S = \{s_i\}_{i\in I}$, y sea $Q = G/\partial L$. Pruebe que $L^{ab}$ es un $Q$-módulo libre cuya base son los elementos de la forma $s_i[L,L]$. ($L^{ab} = L/[L,L]$, donde $[L,L]$ es el conmutador de $L$.)

**6.11** Sea $(X{:}\,R)$ una presentación del grupo $Q$, $F$ un grupo libre sobre $X$, $M$ un $F$-módulo cruzado libre con base $R$, $M_0$ el grupo libre sobre el conjunto $R'$ cuyos elementos $r'$ están en correspondencia uno a uno con los elementos $r \in R$, $\lambda\colon M_0 \longrightarrow F$ el homomorfismo inducido por los relatores y $N$ la cerradura normal de $R$ en $F$. Pruebe que

(a) $(X\colon R)$ determina un módulo cruzado único $(M, F, \partial)$,

(b) si $F$ posee dos generadores libres, entonces $Z(M) = ker\ \partial$,

(c) los elementos $r'[M, M]$ forman una $Q$-base de $M^{ab}$,

(d) el homomorfismo inducido $ker\ \partial \longrightarrow M^{ab}$ es inyectivo y la sucesión

$$0 \longrightarrow ker\ \partial \longrightarrow M^{ab} \longrightarrow N^{ab} \longrightarrow 0$$

es una presentación $Q$-libre de $N^{ab}$.

**6.12** Sean $(M, G, \partial)$ y $(M', G', \partial')$ dos módulos cruzados. Un *morfismo de módulos cruzados* consiste en una pareja $(\alpha, \beta)$ de homomorfismos de grupos tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\partial} & G \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ M' & \xrightarrow{\partial'} & G' \end{array}$$

y $\alpha({}^{g}x) = {}^{\beta(g)}\alpha(x)$.

Diremos que un $G$-módulo cruzado $P$ es *proyectivo* si, dados $\alpha$ y $\gamma$ morfismos de $G$-módulos cruzados con $\gamma$ epimorfismo, existe un morfismo $\psi$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & (P \longrightarrow G) \\ & {\scriptstyle\psi}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ (N \longrightarrow G) & \xrightarrow{\gamma} & (N'' \longrightarrow G) \end{array}$$

Pruebe que, si $(L, G, \partial)$ es un módulo cruzado libre, entonces es un módulo cruzado proyectivo.

## I.7 MÓDULOS INYECTIVOS

Estudiaremos un proceso dual al de I.6.

**7.1 DEFINICION.** Un $\Lambda$-módulo $I$ se llamará *inyectivo* si, para todo homomorfismo $f\colon M' \longrightarrow I$ y para todo monomorfismo $\varphi\colon M' \longrightarrow M$ de $\Lambda$-módulos, existe un homomorfismo $h\colon M \longrightarrow I$ tal que $h \circ \varphi = f$.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\varphi} & M \\ & & & f \searrow & \downarrow h \\ & & & & I \end{array}$$

**7.2 PROPOSICION.** Si $I$ es un $\Lambda$-módulo inyectivo y

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, entonces la sucesión inducida

$$0 \longleftarrow Hom_\Lambda(M', I) \xleftarrow{\varphi^*} Hom_\Lambda(M, I) \xleftarrow{\varphi'^*} Hom_\Lambda(M'', I) \longleftarrow 0$$

es exacta.

**Demostración.** Por 5.5, lo único que nos resta es probar que $\varphi^*$ es un epimorfismo.Pero $\varphi^*$ es un epimorfismo si, y sólo si, para todo homomorfismo $f\colon M' \longrightarrow I$ existe un homomorfismo $h\colon M \longrightarrow I$ tal que $\varphi^*(h) = f$. Pero, como $I$ es inyectivo, existe una $h\colon M \longrightarrow I$ tal que $h \circ \varphi = f$. Luego, $\varphi^*(h) = h \circ \varphi = f$ y, por lo tanto, $\varphi^*$ es un epimorfismo.∎

**7.3 PROPOSICION.** Si $I = \bigoplus_{j \in J} I_j$ es un $\Lambda$-módulo inyectivo, entonces $I_j$ es inyectivo.

**Demostración.** Haremos la demostración para $j = 1, 2$; el caso general es análogo. Supongamos que $I = I_1 \oplus I_2$ es un $\Lambda$-módulo inyectivo. Veamos que $I_1$ es inyectivo. Sea $f\colon M' \longrightarrow I_1$ un homomorfismo y $\varphi\colon M' \longrightarrow M$ un monomorfismo. Sea $\imath_1\colon I_1 \longrightarrow I$ la inclusión y $p\colon I \longrightarrow I_1$ la proyección. Como $I$ es inyectivo, existe un homomorfismo $k\colon M \longrightarrow I$ tal que $k \circ \varphi = \imath_1 \circ f$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\varphi} & M & & \\ & & \downarrow f & & \downarrow k & \searrow^{h} & \\ & & I_1 & \xrightarrow{\imath_1} & I & \xrightarrow{p} & I_1 \end{array}$$

Sea $h = p \circ k\colon M \longrightarrow I_1$. Como $p \circ \imath_1 = 1_I$, $h \circ \varphi = p \circ k \circ \varphi = p \circ \imath_1 \circ f = f$.■

**Nota**: La suma directa de $\Lambda$-módulos inyectivos no necesariamente es inyectiva.

**7.4 PROPOSICION.** Sea $\{I_j\}_{j\in J}$ una familia de $\Lambda$-módulos inyectivos, entonces el producto directo $\prod_{j\in J} I_j$ es inyectivo.

**Demostración.** Sean $\imath_j$ y $p_j$ las inclusiones y proyecciones del producto $\prod_{j\in J} I_j$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, "h_j"] \arrow[dr, "h"] & \\
& & \prod I_j \arrow[r, "p_j"] & I_j \arrow[r, "\imath_j"] & \prod I_j
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto directo (4.6) existe $h\colon M \longrightarrow \prod I_j$ tal que $h \circ \varphi = f$. ■

**7.5 TEOREMA.** Sea $I$ un $\Lambda$-módulo. Entonces los siguientes postulados son equivalentes:

(i) $I$ es inyectivo.

(ii) Toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ se escinde.

(iii) $I$ es isomorfo a un sumando directo de un $\Lambda$-módulo inyectivo.

(iv) Para cualquier sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$, la sucesión inducida siguiente es exacta:

$$0 \longleftarrow Hom_\Lambda(M', I) \longleftarrow Hom_\Lambda(M, I) \longleftarrow Hom_\Lambda(M'', I) \longleftarrow 0$$

**Demostración.** (i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $I$ es inyectivo. Entonces, para toda $f\colon I \longrightarrow M$ y $1_I\colon I \longrightarrow I$, existe una $h\colon M \longrightarrow I$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_I"] & M \arrow[d, "h"] \\
& & I
\end{tikzcd}$$

Esto es, $1_I = h \circ f$. Por lo tanto, la sucesión se escinde.

(ii)$\Rightarrow$ (iii): Admitamos que todo $\Lambda$-módulo es isomorfo a un submódulo de un $\Lambda$-módulo inyectivo. (Véase [M] pág. 93.) Entonces, existe un $\Lambda$-módulo inyectivo $M$ y un monomorfismo $f: I \longrightarrow M$. Sea $K = f(I)$ y consideremos el cociente $M/K$. Entonces tenemos una sucesión exacta $0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/K \longrightarrow 0$, que se escinde. Luego, $K$ es sumando directo de $M$. Como $M$ es inyectivo e $I \cong K$, tenemos (iii).

(iii)$\Rightarrow$ (i): Inmediato de 7.3.

(i)$\Leftrightarrow$ (iv): Inmediato de 7.2 y 7.1.■

## PROBLEMAS

**7.1** Demuestre que todo $\Lambda$-módulo inyectivo es divisible (véase el problema 1.7).

**7.2** Pruebe que cualquier cociente de un módulo divisible es divisible.

**7.3** Sea $\Lambda$ un dominio entero. Demuestre que un módulo sobre $\Lambda$ libre de torsión es inyectivo si, y sólo si, es divisible.

**7.4** Pruebe que, vistos como $\mathbb{Z}$-módulos, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ son divisibles.

**7.5** Pruebe que, si $N$ es un $\mathbb{Z}$-módulo divisible, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, N)$ es un $\Lambda$-módulo inyectivo.

## I.8 $M \otimes_\Lambda N$

Sea $\Lambda$ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Sean $M, N$ y $T$ $\Lambda$-módulos.

**8.1 DEFINICION.** Una función $f: M \times N \longrightarrow T$ es *bilineal* si cumple las siguientes propiedades:

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$$
$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$$
$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y); \;\; x, x_1, x_2 \in M; \;\; y, y_1, y_2 \in N; \;\; \lambda \in \Lambda.$$

Dados dos $\Lambda$-módulos $M$ y $N$, construiremos un nuevo $\Lambda$-módulo $T$ con la propiedad de que las funciones bilineales $M \times N \longrightarrow U$ estén en correspondencia uno a uno con los homomorfismos (funciones lineales) $T \longrightarrow U$ para todo $\Lambda$-módulo $U$.

**8.2 DEFINICION.** El *producto tensorial* de $M$ y $N$ es la pareja $(T, f)$, donde $f: M \times N \longrightarrow T$ es bilineal, tal que si $U$ es un $\Lambda$-módulo y $g: M \times N \longrightarrow U$ es bilineal, entonces existe un homomorfismo único de $\Lambda$-módulos $h: T \longrightarrow U$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Es fácil comprobar que $f(M \times N)$ genera a $T$. (Véase el problema 8.3).

Veamos a continuación que, si existe, el producto tensorial de dos $\Lambda$-módulos es único. Es decir, dados $(T, f)$ y $(T', f')$ dos productos tensoriales de $M$ y $N$, existe un isomorfismo entre $T$ y $T'$. Esto es inmediato, pues, por ser $T$ un producto tensorial, existe $h: T \longrightarrow T'$ tal que $f' = h \circ f$. Análogamente, como $T'$ es un producto tensorial, existe $h': T' \longrightarrow T$ tal que $f = h' \circ f'$.

Consideremos los siguientes diagramas

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & T & & \\
 & {}^{f}\nearrow & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
M \times N & \xrightarrow{f'} & T' & & 1_T \\
 & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \\
 & & T & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & T' & & \\
 & {}^{f'}\nearrow & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \\
M \times N & \xrightarrow{f} & T & & 1_{T'} \\
 & \searrow^{f'} & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
 & & T' & &
\end{array}
$$

Por ser $T$ un producto tensorial, y como $1_T \colon T \longrightarrow T$ es tal que $1_T \circ f = f$ y también $h' \circ h \circ f = f$, por la unicidad tenemos que $h' \circ h = 1_T$. De manera semejante, por ser $T'$ un producto tensorial, y como $1_{T'} \colon T' \longrightarrow T'$ es tal que $1_{T'} \circ f' = f'$ y también $h \circ h' \circ f' = f'$, se tiene, por la unicidad, que $h \circ h' = 1_{T'}$. Por lo tanto, $h$ es un isomorfismo. Entonces podemos hablar del *producto tensorial* de $M$ y $N$ y lo denotaremos con $M \otimes_\Lambda N$.

Observemos que el producto tensorial de dos $\Lambda$-módulos $M$ y $N$ posee la siguiente propiedad universal: dada una función bilineal $g \colon M \times N \longrightarrow U$, existe un homomorfismo único $h$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
M \times N & \xrightarrow{f} & M \otimes_\Lambda N \\
 & \searrow^{g} & \downarrow{\scriptstyle h} \\
 & & U
\end{array}
$$

Ahora veamos que, dados dos $\Lambda$-módulos $M$ y $N$, siempre existe su producto tensorial: sea $L$ el $\Lambda$-módulo libre con base $M \times N$, es decir, los elementos de $L$ son combinaciones lineales con coeficientes en $\Lambda$ de parejas ordenadas $(x, y)$; $x \in M$, $y \in N$. Sea $K$ el submódulo de $L$ generado por los elementos de la forma

(i) $(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$

(ii) $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$

(iii) $(\lambda x, y) - (x, \lambda y), \quad \lambda \in \Lambda.$

Definamos $M \otimes_\Lambda N = L/K$. Denotemos con $x \otimes y$ la clase lateral $(x,y)+K$. Es inmediato comprobar que $f: M \times N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$, dado por $f(x,y) = x \otimes y$, es bilineal. Debemos probar que $M \otimes_\Lambda N$ es, efectivamente, un producto tensorial. Para ello, sea $U$ un $\Lambda$-módulo cualquiera. Consideremos el triángulo

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & L \\ & \searrow^{g} & \downarrow h' \\ & & U \end{array}$$

donde $g$ es bilineal. Como $L$ es libre con base $M \times N$, existe un homomorfismo $h': L \longrightarrow U$ tal que $g = h' \circ f$. Es fácil ver que $h'$ se anula en los elementos de la forma (i), (ii), (iii), por lo que $K \subset ker\ h'$, e induce un homomorfismo $h: L/K \longrightarrow U$ tal que el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & L/K = M \otimes_\Lambda N \\ & \searrow^{g} & \downarrow h \\ & & U \end{array}$$

Es fácil comprobar que $h$ es única (véase el problema 8.2).

Nótese que, como $f(M \times N)$ genera a $M \otimes_\Lambda N$, todo elemento $t$ de $M \otimes_\Lambda N$ puede escribirse como $t = \sum \lambda_i (x_i \otimes y_i)$, $\lambda_i \in \Lambda$. Esta expresión no es única pues se pueden escoger diferentes representantes de una clase lateral.

Debido a lo anterior, podemos alternativamente definir $M \otimes_\Lambda N$ como el $\Lambda$-módulo generado por todos los símbolos $x \otimes y$, $x \in M$, $y \in N$, sujeto a las relaciones

(i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$

(ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$

(iii) $x\lambda \otimes y = x \otimes \lambda y$; $\quad x_1, x_2, x \in M$; $y_1, y_2, y \in N$; $\lambda \in \Lambda$.

Sean $\varphi: M' \longrightarrow M$ y $\psi: N' \longrightarrow N$ homomorfismos de $\Lambda$-módulos y $\varphi \times \psi: M' \times N' \longrightarrow M \times N$ dado por $(\varphi \times \psi)(x,y) = (\varphi(x), \psi(y))$. Sean $f: M' \times N' \longrightarrow M' \otimes_\Lambda N'$ y $g: M \times N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$ las funciones bilineales respectivas. Consideremos la función bilineal $g \circ (\varphi \times \psi): M' \times N' \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$. Como $M' \otimes_\Lambda N'$ es el producto tensorial, existe un homomorfismo único

$$h: M' \otimes_\Lambda N' \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$$

que denotaremos con $\varphi \otimes \psi$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M' \times N' & \xrightarrow{f} & M' \otimes_\Lambda N' \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi\times\psi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi\otimes\psi} \\ M \times N & \xrightarrow{g} & M \otimes_\Lambda N \end{array}$$

i.e., $(\varphi\otimes\psi)\circ f(x,y) = g\circ(\varphi\times\psi)(x,y), \quad (x,y) \in M'\times N'$. Luego $(\varphi\otimes\psi)(x\otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$, $x \in M'$, $y \in N'$.

Como consecuencia de la unicidad de $\varphi\otimes\psi$ tenemos que $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M''$ y $N' \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\psi'} N''$ son homomorfismos de $\Lambda$-módulos entonces $(\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi) = (\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi)$. En particular, las siguientes Proposiciones son inmediatas.

**8.3 PROPOSICION.** Sean $\psi\colon N' \longrightarrow N$ y $\psi'\colon N \longrightarrow N''$ homomorfismos de $\Lambda$-módulos y $M$ un $\Lambda$-módulo. Entonces

(i) si $1_M\colon M \longrightarrow M$ y $1_N\colon N \longrightarrow N$ son los homomorfismos de identidad entonces $1_M \otimes 1_N$ es la identidad de $M \otimes_\Lambda N$, y

(ii) $(1_M \otimes \psi') \circ (1_M \otimes \psi) = (1_M \otimes (\psi' \circ \psi))$.

Podemos escribir las afirmaciones de 8.3 en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} & N' & & & & & M \otimes_\Lambda N' & \\ & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & & & & \downarrow{\scriptstyle 1_M\otimes\psi} & \\ {\scriptstyle 1_N} & N & {\scriptstyle \psi'\circ\psi} & & & {\scriptstyle 1_M\otimes 1_N} & M \otimes_\Lambda N & {\scriptstyle 1_M\otimes(\psi'\circ\psi)} \\ & \downarrow{\scriptstyle \psi'} & & & & & \downarrow{\scriptstyle 1_M\otimes\psi'} & \\ & N'' & & & & & M \otimes_\Lambda N'' & \end{array}$$

Análogamente tenemos la siguiente

**8.4 PROPOSICION.** Sean $\varphi\colon M' \longrightarrow M$ y $\varphi'\colon M \longrightarrow M''$ homomorfismos de $\Lambda$-módulos y $N$ un $\Lambda$-módulo. Entonces

(i) si $1_M\colon M \longrightarrow M$ y $1_N\colon N \longrightarrow N$ son los homomorfismos de identidad, entonces $1_M \otimes 1_N$ es la identidad de $M \otimes_\Lambda N$, y

(ii) $(\varphi' \otimes 1_N) \circ (\varphi \otimes 1_N) = ((\varphi' \circ \varphi) \otimes 1_N)$. Podemos escribir las afirmaciones de 8.4 en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & M' & & \qquad & & M' \otimes_\Lambda N & \\ & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi\otimes 1_N} & \\ {\scriptstyle 1_M} & M & {\scriptstyle \varphi'\circ\varphi} & & {\scriptstyle 1_M\otimes 1_N} & M \otimes_\Lambda N & {\scriptstyle (\varphi'\circ\varphi)\otimes 1_N} \\ & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'\otimes 1_N} & \\ & M'' & & & & M'' \otimes_\Lambda N & \end{array}$$

Se tiene el siguiente resultado acerca del producto tensorial de una suma directa de $\Lambda$-módulos

**8.5 PROPOSICION.** (i) Sean $M$ y $N$ $\Lambda$-módulos con $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$. Entonces

$$M \otimes_\Lambda (\bigoplus_{i\in I} N_i) \cong \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_\Lambda N_i)$$

(ii) Sean $M$ y $N$ $\Lambda$-módulos y $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Entonces

$$(\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_\Lambda N \cong \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_\Lambda N)$$

**Demostración.** Sea $g\colon M \times (\bigoplus_{i\in I} N_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M \otimes N_i)$ dada por $g(x,(y_i)) = (x \otimes y_i)$. Es fácil comprobar que $g$ es bilineal. Luego, existe

$$h\colon M \otimes (\bigoplus_{i\in I} N_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M \otimes N_i)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \times (\bigoplus_{i\in I} N_i) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & M \otimes (\bigoplus_{i\in I} N_i) \arrow[d, "h"] \\ & \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_\Lambda N_i) \end{tikzcd}$$

Sea $\varphi_i : M \otimes N_i \longrightarrow M \otimes (\bigoplus_{i\in I} N_i)$ dada por $\varphi_i(x \otimes y_i) = x \otimes \imath_{N_i}(y_i)$ donde $\imath_{N_i} : N_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i$ es la inclusión. Luego, por 4.5, existe un homomorfismo único

$$\varphi : \bigoplus_{i\in I}(M \otimes N_i) \longrightarrow M \otimes (\bigoplus_{i\in I} N_i)$$

tal que si $\imath_{M\otimes N_i} : M \otimes N_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M \otimes N_i)$ es la inclusión entonces $\varphi_i = \varphi \circ \imath_{M\otimes N_i}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_\Lambda (\bigoplus_{i\in I} N_i) \\ M \otimes_\Lambda N_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[r, "\imath_{M\otimes_\Lambda N_i}"] & \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_\Lambda N_i) \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Es fácil comprobar que $\varphi \circ h = 1_{M\otimes_\Lambda(\bigoplus_{i\in I} N_i)}$ y que $h \circ \varphi = 1_{\bigoplus_{i\in I}(M\otimes N_i)}$. La demostración de (ii) es análoga.■

**8.6 PROPOSICION.** (i) Si $N' \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\psi'} N''$ es una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos y $M$ un $\Lambda$-módulo, entonces

$$M \otimes_\Lambda N' \xrightarrow{1_M\otimes\psi} M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{1_M\otimes\psi'} M \otimes_\Lambda N'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

(ii) Si $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M''$ es una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos y $M$ un $\Lambda$-módulo, entonces

$$M' \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi\otimes 1_N} M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi'\otimes 1_N} M'' \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

**Demostración.** (i) Veamos que $1_M \otimes \psi'$ es un epimorfismo: sea $t'' = \sum(x_i \otimes y_i'') \in M \otimes_\Lambda N''$, $x_i \in M$, $y_i'' \in N''$. Como $\psi'$ es un epimorfismo, existe $y_i \in N$ tal que $\psi'(y_i) = y_i''$ para toda $i$. Luego, $(1_M \otimes \psi')(\sum(x_i \otimes y_i)) = \sum(x_i \otimes y_i'')$.

Veamos que $im(1_M \otimes \psi) \subset ker\ (1_M \otimes \psi')$: $(1_M \otimes \psi')(1_M \otimes \psi) = (1_M \otimes \psi'\psi) = 1_M \otimes 0 = 0$. Luego, por 3.2, se tiene lo requerido.

Resta únicamente comprobar que $im\ (1_M \otimes \psi) \supset ker\ (1_M \otimes \psi')$, lo cual dejamos al lector, así como la parte (ii).■

El resultado anterior es lo mejor que podemos obtener. Por ejemplo, si consideramos la sucesión exacta

$$\mathbb{Z} \overset{2.\_}{\rightarrowtail} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2,$$

donde $2.\_$ denota la multiplicación por dos, al hacer el producto tensorial sobre $\Lambda = \mathbb{Z}$ con $N = \mathbb{Z}/2$ obtenemos

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{2_*} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \\ \| \wr & & \| \wr & & \| \wr \\ \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

pero $2_*$ no es inyectivo.

Consideremos el caso en que $\Lambda$ no necesariamente sea conmutativo. Entonces, en general, no podemos proporcionar a $M \otimes_\Lambda N$ una estructura de módulo:

**8.7 DEFINICION.** Sea $\Lambda$ un anillo con 1 (no necesariamente conmutativo), $M$ un $\Lambda$-módulo derecho y $N$ un $\Lambda$-módulo izquierdo. El *producto tensorial de* $M$ *y* $N$ *sobre* $\Lambda$, $M \otimes_\Lambda N$, es el grupo abeliano obtenido como el cociente del grupo abeliano libre generado por $x \otimes y$, $x \in M$, $y \in N$ entre el subgrupo generado por

$$\begin{array}{ll} (x + x') \otimes y - (x \otimes y + x' \otimes y) & \\ x \otimes (y + y') - (x \otimes y + x \otimes y') & \\ x\lambda \otimes y - x \otimes \lambda y & x, x' \in M; y, y' \in N; \lambda \in \Lambda. \end{array}$$

Obsérvese que $M \otimes_\Lambda N$ puede obtenerse como el cociente de $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ bajo las relaciones $x\lambda \otimes y = x \otimes \lambda y$.

## PROBLEMAS

**8.1** (i) Compruebe que $f\colon M \times N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$, dada por $f(x, y) = x \otimes y$, es bilineal. (ii) Sea $\Lambda$ un anillo no conmutativo. ¿Será el producto tensorial de dos $\Lambda$-módulos izquierdos un $\Lambda$-módulo izquierdo? Explique su respuesta.

**8.2** Compruebe que, si $L$ es libre con base $M \times N$ y $K$ el submódulo de $L$ que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) del argumento presentado sobre la existencia del producto tensorial, $h'$ se anula en los elementos de la forma (i), (ii) y (iii) y que el homomorfismo $h: L/K \longrightarrow U$ es único.

**8.3** Demuestre que una función bilineal de $\Lambda$-módulos $f: M \times N \longrightarrow U$ no es inyectiva, a menos que $M = N = 0$ y que $f(M \times N)$ genera a $T$.

**8.4** En la proposición 8.6, compruebe que $im\,(1_M \otimes \psi) \supset ker\,(1_M \otimes \psi')$.

**8.5** Demuestre la parte (ii) de la proposición 8.6.

**8.6** Si $M', M$ y $M''$ son $\Lambda$-módulos, pruebe que

(i) $M \otimes_\Lambda M'' \cong M'' \otimes_\Lambda M$

(ii) $M' \otimes_\Lambda (M \otimes_\Lambda M'') \cong (M' \otimes_\Lambda M) \otimes_\Lambda M''$.

**8.7** Demuestre que, si $P$ es un $\Lambda$-módulo proyectivo y

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \otimes_\Lambda P \longrightarrow M \otimes_\Lambda P \longrightarrow M'' \otimes_\Lambda P \longrightarrow 0$$

es también exacta.

**8.8** Sean $f: M \longrightarrow M'$ y $g: N \longrightarrow N'$ monomorfismos de $\Lambda$-módulos. Pruebe que $f \otimes g: M \otimes_\Lambda N \longrightarrow M' \otimes_\Lambda N'$ es también un monomorfismo.

**8.9** Pruebe que, para cualquier $\Lambda$-módulo $M$ ($\Lambda$ conmutativo, con $1 \neq 0$), se tiene que $\Lambda \otimes_\Lambda M \cong M \cong M \otimes_\Lambda \Lambda$.

**8.10** Proporcione ejemplos de la proposición 8.6 (i), en los cuales aun cuando $\psi$ sea inyectivo, $1_M \otimes \psi$ no lo sea. (Sugerencia: considere la sucesión exacta corta $\mathbb{Z} \overset{p}{\rightarrowtail} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p$, donde $p$ es la multiplicación por un número primo $p$, $\Lambda = \mathbb{Z}$ y $M = \mathbb{Z}/p$. Use el problema 8.9 para probar que $\mathbb{Z}/p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p$).

**8.11** Un $\Lambda$-módulo $N$ se llama *plano* si, dada una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow M' \otimes_\Lambda N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N \longrightarrow M'' \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

es exacta corta.

Demuestre que todo módulo proyectivo es plano.

**8.12** Proporcione ejemplos que establezcan el hecho de que los módulos planos en general no son proyectivos.

**8.13** Sean $M, N$ y $U$ $\Lambda$-módulos. Pruebe que

$$Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_{\Lambda} N, U) \cong Hom_{\Lambda}(M, Hom_{\mathbb{Z}}(N, U)).$$

Este importante isomorfismo relaciona a $\otimes_{\Lambda}$ con $Hom_{\mathbb{Z}}$ y, como veremos en II.2.1, es un isomorfismo *natural.* Véase también el problema II.2.5.

**8.14** Utilizando el problema anterior junto con el problema 5.8, proporcione una demostración de la proposición 8.6 (ii).

**8.15** Sea $N$ un $\Lambda$-módulo de torsión. Pruebe que $M \otimes_{\Lambda} N$ es de torsión para cualquier $\Lambda$-módulo $M$.

**8.16** Sean $\Lambda$ y $\Lambda'$ dos anillos no necesariamente conmutativos. Pruebe que,

(a) si $M$ es un $\Lambda$-módulo izquierdo, $N$ un $\Lambda'$-módulo, izquierdo y un $\Lambda$-módulo derecho, $U$ un $\Lambda'$-módulo izquierdo, entonces

$$Hom_{\Lambda'}(N \otimes_{\Lambda} M, U) \cong Hom_{\Lambda}(M, Hom_{\Lambda'}(N, U)).$$

(b) si $M$ es un $\Lambda$-módulo derecho, $N$ un $\Lambda$-módulo izquierdo y un $\Lambda'$-módulo derecho, $U$ un $\Lambda'$-módulo derecho, entonces

$$Hom_{\Lambda'}(M \otimes_{\Lambda} N, U) \cong Hom_{\Lambda}(M, Hom_{\Lambda'}(N, U)).$$

Los isomorfismos son naturales en el sentido de la definición II.2.1, como más adelante veremos.

**8.17** Pruebe que, si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos que se escinde, entonces

$$0 \longrightarrow M' \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow M \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow M'' \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta que se escinde.

# Capítulo II

# CATEGORÍAS Y FUNTORES

Las categorías y los funtores surgen de la necesidad de unificar y simplificar sistemas matemáticos. Estos conceptos fueron introducidos (1943 a 1945) por Eilenberg y Mac Lane.

Dicho de una manera informal, una categoría consiste en una clase de "objetos" y una clase de "morfismos" combinados adecuadamente, y un funtor es una manera de relacionarlos.

El desarrollo de la Cohomología de Grupos fue un antecedente esencial para introducir los conceptos de categoría y funtor, en particular, el grupo de homología $H_2(G, \mathbb{Z})$, descubierto por Hopf en 1942 (que resultó ser igual al "multiplicador de Schur" de 1902, i.e., $R \cap [F, F]/[F, F]$, $G = F/R$), y el grupo de todas las extensiones abelianas $Ext(G, N)$ del grupo abeliano $N$.

Los conceptos de "categoría", "funtor" y "transformación natural" empleados para interpretar los fenómenos ocurridos en la Topología Algebraica fueron considerados por Eilenberg y Mac Lane, durante los 15 años siguientes a su invención, meramente como un lenguaje. Sin embargo, el concepto de "construcción universal" que introdujo P. Samuel en 1948 requería de un marco categórico, el cual fue provisto por D. Kan en 1958 cuando formuló la idea de "funtor adjunto". A partir de entonces, la investigación en esta área se desarrolló ampliamente.

Nuestro propósito es exponer el lenguaje categórico necesario para interpretar los conceptos del Algebra Homológica, Cohomología de Grupos y $K$-Teoría Algebraica de los siguientes capítulos. En la sección 1 presentamos las definiciones de categoría, de funtor y damos muchos ejemplos. En la sección 2 introducimos el concepto de transformación natural, y en la sección 3 establecemos la terminología que utilizaremos en los siguientes capítulos.

## II.1 CATEGORÍAS Y FUNTORES

**1.1 DEFINICION.** Una *categoría* $\mathbf{C}$ consta de

(i) una clase de *objetos* $A, B, C$.

(ii) para cada par de objetos $A, B \in \mathbf{C}$, un conjunto $\mathbf{C}(A, B)$ cuyos elementos se llaman *morfismos* $f$ *de* $A$ *en* $B$, denotados con $f: A \longrightarrow B$.

(iii) para cada terna de objetos $A$, $B$, $C \in \mathbf{C}$, una ley de composición $\mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \longrightarrow \mathbf{C}(A, C)$ que satisface los siguientes axiomas:

  (a) $\mathbf{C}(A, B) = \mathbf{C}(D, E)$ si, y sólo si, $A = D$, $B = E$.

  (b) Si $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ y $h: C \longrightarrow D$, entonces $h(gf) = (hg)f$.

  (c) Para todo objeto $A \in \mathbf{C}$ existe un morfismo $1_A: A \longrightarrow A$ tal que para cualesquiera $f: A \longrightarrow B$ y $g: C \longrightarrow A$, se tiene que $f1_A = f$ y $1_A g = g$.

Al morfismo $1_A$ lo llamaremos *morfismo de identidad*. Nótese que no se puede decir que $\mathbf{C}$ consta de todos los objetos $A, B, C, \cdots$ etc., pues este conjunto sería una total ilegitimidad en la teoría usual de los conjuntos. Sin embargo, si adoptamos los axiomas de Gödel-Bernays-von Newmann para la teoría de conjuntos, tendremos totalidades más grandes que los conjuntos, llamados *clases*, y entonces sí podemos hablar de la clase de todos los objetos $A, B, C$, etc.

En $\mathbf{C}(A, B)$ diremos que $A$ es el *dominio* y $B$ el *codominio* de $f$. La composición de dos morfismos $f$ y $g$, escrita $g \circ f$, estará definida si, y sólo si, el codominio de $f$ es igual al dominio de $g$. Diremos que un morfismo $f: A \longrightarrow B$ es *invertible o isomorfismo* si existe un morfismo $g: B \longrightarrow A$ tal que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$. Diremos entonces que los objetos $A$ y $B$ son isomorfos, y escribiremos $A \cong B$.

A continuación veamos algunos ejemplos de categorías, así como la notación que en adelante utilizaremos.

**1.2 EJEMPLO. Conj** denotará la categoría de los conjuntos. Sus objetos son los conjuntos y los morfismos son las funciones de un conjunto en otro.

**1.3 EJEMPLO. Top** denotará la categoría de los espacios topológicos. Sus objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas.

**1.4 EJEMPLO. Gr** consistirá en objetos llamados grupos y en morfismos llamados homomorfismos.

**1.5 EJEMPLO.** Similarmente, denotaremos por **Ab**, **An**, $\mathbf{An}_1$, ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$, $\mathbf{Mod}_\Lambda$ y $\mathbf{EV}_k$ las categorías de grupos abelianos, anillos, anillos con elementos de identidad y homomorfismos que preservan la unidad, $\Lambda$-módulos izquierdos, $\Lambda$-módulos derechos y de espacios vectoriales sobre un campo $k$ con morfismos los homomorfismos correspondientes, respectivamente.

A continuación, veamos cómo se relaciona una categoría con otra.

**1.6 DEFINICION.** Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ dos categorías. Un *funtor covariante* $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ es una regla que asocia

(i) a cada objeto $A \in \mathbf{C}$, un objeto $A' \in \mathbf{C}'$

(ii) a cada morfismo $(f: A \longrightarrow B) \in \mathbf{C}(A, B)$, un morfismo

$$(F(f): F(A) \longrightarrow F(B)) \in \mathbf{C}'(F(A), F(B))$$

que satisface las siguientes condiciones:

(iii) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, y

(iv) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

**1.7 DEFINICION.** Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ dos categorías. Diremos que $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ es un *funtor contravariante* si satisface (i) y (iv) de la definición anterior y, además, las siguientes dos condiciones:

(ii)' A cada morfismo $(f: A \longrightarrow B) \in \mathbf{C}(A, B)$ le asocia un morfismo

$$(F(f): F(B) \longrightarrow F(A)) \in \mathbf{C}'(F(B), F(A))$$

(iii)' $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

**1.8 EJEMPLO.** Definamos un funtor $F\colon \mathbf{Conj} \longrightarrow_\Lambda \mathbf{Mod}$ tal que a cada conjunto $X$ le asocie el $\Lambda$-módulo libre $F(X)$ con base $X$. Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una función entre conjuntos entonces, como $F(X)$ es un $\Lambda$-módulo libre, $f$ se extiende a un homomorfismo único $F(X) \longrightarrow F(Y)$. Es inmediato comprobar que $F$ es un funtor covariante.

**1.9 EJEMPLO.** Sea $\Lambda$ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Definiremos $Hom_\Lambda(M, \_\ )\colon {}_\Lambda\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_\Lambda\mathbf{Mod}$ mediante la regla $N \longmapsto Hom_\Lambda(M, N)$. Por I.5.1 $Hom_\Lambda(M, \_\ )$ resulta ser un funtor covariante.

**1.10 EJEMPLO.** Sea $\Lambda$ un anillo conmutativo. Definamos $Hom_\Lambda(\ \_\ , N)\colon {}_\Lambda\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_\Lambda\mathbf{Mod}$ mediante la regla $M \longmapsto Hom_\Lambda(M, N)$. Por I.5.2, $Hom_\Lambda(\ \_\ , N)$ resulta ser un funtor contravariante.

**1.11 EJEMPLO.** Sea $\Lambda$ un anillo conmutativo. Entonces por I.8.3 y I.8.4, $M \otimes_\Lambda \_\ \colon {}_\Lambda\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_\Lambda\mathbf{Mod}$ y $\_ \otimes_\Lambda\colon {}_\Lambda\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_\Lambda\mathbf{Mod}$ dados por $N \longmapsto M \otimes_\Lambda N$ y $M \longmapsto M \otimes_\Lambda N$, respectivamente, son funtores covariantes.

**1.12 EJEMPLO.** Sea $\mathbf{Top}(X)$ la categoría cuyos objetos son los abiertos de un espacio topológico $X$ y cuyos morfismos solamente son las funciones continuas de inclusión. Entonces una *pregavilla de grupos abelianos* es un funtor contravariante de $\mathbf{Top}(X)$ en $\mathbf{Ab}$.

## PROBLEMAS

**1.1** Pruebe que, en los ejemplos 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5, **Conj, Top, Gr, An**, ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$ y $\mathbf{EV}_k$ son categorías.

**1.2** Sea $F\colon {}_\Lambda \mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Conj}$ definida de la siguiente manera: dado un $\Lambda$-módulo $M$, $F(M)$ denotará el conjunto subyacente, es decir, $F$ le quita a $M$ la estructura de $\Lambda$-módulo. Compruebe que $F$ es un funtor covariante.

**1.3** Compruebe que $(\_)^{ab}\colon \mathbf{Gr} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, dado por $G \longmapsto (G)^{ab} = G/[G,G]$, es un funtor covariante. Aquí $[G,G]$ denota el *conmutador* de $G$. $(\_)^{ab}$ se llama *funtor abelianizador*.

**1.4** Pruebe que $P\colon \mathbf{Conj} \longrightarrow \mathbf{Conj}$, que asocia a cada conjunto $S$ el conjunto de todos sus subconjuntos y a cada función de conjuntos $f\colon S \longrightarrow S'$ la función $P(f)$ que envía a los subconjuntos de $S$ en su imagen, es un funtor covariante.

**1.5** Sea $U$ un conjunto fijo. Pruebe que

$$\begin{aligned}(\_)^U\colon \mathbf{Conj} &\longrightarrow \mathbf{Conj}\\ S &\longmapsto S^U\end{aligned}$$

es un funtor covariante, donde $S^U$ denota el conjunto de funciones de $U$ en $S$.

**1.6** Demuestre que $\mathbf{Mod}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$, cuyos objetos son familias de $\Lambda$-módulos $M = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, con morfismos $\rho\colon M \longrightarrow N$ de grado $j$ entre objetos $M$ y $N$ dados como familia de homomorfismos

$$\{\rho_i\colon M_i \longrightarrow N_{i+j}\}_{i\in\mathbb{Z}},$$

forman una categoría llamada *categoría de $\Lambda$-módulos graduados*.

**1.7** Compruebe que $GL(\_)\colon \mathbf{An}_1 \longrightarrow \mathbf{Gr}$ y $(\_)^*\colon \mathbf{An}_1 \longrightarrow \mathbf{Gr}$, que a cada anillo $\Lambda$ le asocia el grupo de matrices invertibles de $n\times n$ con coeficientes en $\Lambda$ y que a cada anillo $\Lambda$ le asocia su grupo de unidades $\Lambda^*$, respectivamente, son funtores covariantes.

**1.8** Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Un morfismo $f$ en $\mathbf{C}$ es *monomorfismo* si para todo par de morfismos $g_1$ y $g_2$ tales que $fg_1 = fg_2$, se tiene que $g_1 = g_2$. Un morfismo $f$ en $\mathbf{C}$ es *epimorfismo* si para todo par de morfismos $g_1$ y $g_2$ tales que $g_1 f = g_2 f$, se tiene que $g_1 = g_2$.

Pruebe que un homomorfismo $f$ en la categoría de $\Lambda$-módulos es monomorfismo si, y sólo si, es inyectivo; y es epimorfismo si, y sólo si, es suprayectivo.

**1.9** (a) Pruebe que, la clase de módulos cruzados junto con los morfismos de módulos cruzados con regla de composición

$$(\alpha,\beta)(\alpha',\beta') = (\alpha\alpha',\beta\beta')$$

forman una categoría que denotaremos con **XMod**.

(b) Sea $\lambda\colon H \longrightarrow G$ un homomorfismo de grupos y sea $(D,G,\partial)$ el módulo cruzado inducido por $\lambda$ (véase el problema I.6.8). Compruebe que $(\nu,\lambda)\colon (H,H,1_H) \longrightarrow (D,G,\partial)$ (donde $\nu(h) = (h,1)$, $h \in H$ es la inclusión) es un morfismo de módulos cruzados.

## II.2 TRANSFORMACIONES NATURALES

**2.1 DEFINICION.** Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ dos categorías y $F, G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ dos funtores. Una *transformación natural* $t$ de $F$ a $G$, $t\colon F \longrightarrow G$, es una colección de morfismos $t_A\colon F(A) \longrightarrow G(A)$ en $\mathbf{D}$, uno para cada objeto $A \in \mathbf{C}$, tal que, para cualquier morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ en $\mathbf{C}$, $(G(f)) \circ t_A = t_B \circ (F(f))$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{t_A} & G(A) \\ \big\downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow{t_B} & G(B) \end{array}$$

Si esto sucede, diremos que $t_A\colon F(A) \longrightarrow G(A)$ es *natural* en $A$.

**2.2 EJEMPLO.** Sea $V$ un espacio vectorial sobre un campo $k$. Sea $V^{\#}$ el espacio vectorial dual de $V$. Definamos una transformación lineal $t\colon V \longrightarrow V^{\#\#}$ dada por $t(v) = \widehat{v}$, donde $\widehat{v}(f) = f(v)$, $v \in V$, $f \in V^{\#}$, $\widehat{v} \in V^{\#\#}$. Entonces $t\colon 1 \longrightarrow (\_\,)^{\#\#}$ es una transformación natural del funtor identidad $1\colon \mathbf{EV}_k \longrightarrow \mathbf{EV}_k$ al funtor *doble dual* $(\_\,)^{\#\#}$.

**2.3 DEFINICION.** Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ categorías, $F, G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ funtores y $t\colon F \longrightarrow G$ una transformación natural. Diremos que $t$ es una *equivalencia natural* o *isomorfismo natural* si $t_A\colon F(A) \longrightarrow G(A)$ es un isomorfismo para toda $A \in \mathbf{C}$. Si esto sucede, diremos que los funtores $F$ y $G$ son *equivalentes* en forma natural.

**2.4 DEFINICION.** Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ categorías. Sea $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ un funtor. Diremos que $F$ es una *equivalencia* si existe un funtor $G\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $GF, 1\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ son equivalentes en forma natural, y $FG, 1\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$ también son equivalentes en forma natural. Si $F$ es una equivalencia, diremos que las categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son *equivalentes.*

Diremos que una categoría es una *categoría pequeña* si su clase de objetos es un conjunto. En el caso en que $\mathbf{C}$ sea una categoría pequeña y $\mathbf{D}$

cualquier categoría, podemos hablar de la categoría de todos los funtores $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ y la denotamos con $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

**2.5 DEFINICION.** Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ dos categorías. *El producto cartesiano* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$ consiste en las parejas $(A, A')$, $A \in \mathbf{C}$, $A' \in \mathbf{C}'$ y los morfismos

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C}'((A, A'), (B, B')) = \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}'(A', B').$$

**2.6 DEFINICION.** $\mathbf{C}$ se llamará *subcategoría* de $\mathbf{D}$ si

(i) $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}$

(ii) $\mathbf{C}(A, B) \subset \mathbf{D}(A, B)$ para toda pareja $(A, B) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$

(iii) La composición de cualesquiera dos morfismos en $\mathbf{C}$ es la misma que su composición en $\mathbf{D}$, y

(iv) $1_A$ es la misma en $\mathbf{C}$ que en $\mathbf{D}$.

Diremos también que una subcategoría $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}$ es *plena* si $\mathbf{C}(A, B) = \mathbf{D}(A, B)$ para toda pareja $(A, B) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$. Por ejemplo, $\mathbf{Ab}$ es una subcategoría plena de $\mathbf{Gr}$. Pero $\mathbf{An}_1$ no es una subcategoría plena de $\mathbf{An}$.

Estableceremos a continuación un poco más de terminología. Diremos que un funtor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es *pleno* si $F$ envía a $\mathbf{C}(A, B)$ sobre $\mathbf{D}(F(A), F(B))$ para toda $A, B \in \mathbf{C}$. También diremos que $F$ es *fiel* si $F$ envía a $\mathbf{C}(A, B)$ inyectivamente en $\mathbf{D}(F(A), F(B))$. $F$ se llamará *encaje pleno* si $F$ es pleno, fiel e inyectivo en objetos.

Obsérvese que $F(\mathbf{C})$ en general no es ni siquiera una subcategoría de $\mathbf{D}$ pero, si $F$ es un encaje pleno, entonces $F(\mathbf{C})$ es una subcategoría plena de $\mathbf{D}$.

Finalmente, tenemos un breve comentario acerca del proceso de dualización: sea $\mathbf{C}$ una categoría. Podemos formar una nueva categoría $\mathbf{C}^O$ llamada *categoría opuesta* de $\mathbf{C}$ cuyos objetos son los mismos que los de $\mathbf{C}$, pero $\mathbf{C}^O(A, B) = \mathbf{C}(B, A)$. Por ejemplo, podemos decir que un funtor contravariante $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es un funtor covariante de $\mathbf{C}^O$ en $\mathbf{D}$. Decimos que $\mathbf{C}^O$ se obtiene de $\mathbf{C}$ invirtiendo flechas. Este proceso, llamado *dualización*, se puede aplicar a definiciones o teoremas, e incluso a demostraciones. Sin embargo, a menudo se encuentran limitaciones para aplicarlo.

## PROBLEMAS

**2.1** Proporcione los detalles del ejemplo 2.2

**2.2** Un objeto $B$ se llama *inicial* en **C** si, para cada objeto $A$, existe solamente un morfismo de $B$ en $A$; y un objeto $C$ se llama *terminal* en **C** si, para cada objeto $A$ en **C**, existe solamente un morfismo de $A$ en $C$.

Pruebe que, si $C$ es inicial (terminal), el único morfismo de $C$ en $C$ es la identidad, y cualesquiera dos objetos iniciales (terminales) son isomorfos.

**2.3** Un *objeto cero*, denotado con 0 en una categoría, es un objeto que es inicial y terminal a la vez en **C**.

Demuestre que, si **C** posee objeto cero, éste es único, salvo isomorfismo, y que, para cualesquiera dos objetos $A, B \in \mathbf{C}$, existe un único morfismo

$$A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$$

llamado *morfismo cero* de $A$ a $B$.

**2.4** Pruebe que la categoría **Conj** no posee objeto cero y que las categorías **Ab** y ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$ sí poseen objeto cero.

**2.5** Compruebe que los isomorfismos de los problemas I.8.13 y I.8.16 son naturales.

**2.6** Compruebe que $det\colon GL_n(\_\,) \longrightarrow (\_\,)^*$ es una transformación natural de $GL_n(\_\,)$ a $(\_\,)^*$.

**2.7** Sea **C** una categoría con objeto cero. El *núcleo* de un morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un morfismo $k\colon U \longrightarrow A$ tal que

(i) $fk = 0$ y

(ii) si $fq = 0$ para $q\colon U' \longrightarrow A$, entonces $q = kh$ con $h$ único.

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[dd, "h"'] \arrow[dr, "q"] & & \\ & A \arrow[r, "f"] & B \\ U \arrow[ur, "k"] & & \end{tikzcd}$$

Defina el concepto de conúcleo de un morfismo en **C** dualizando adecuadamente el de núcleo.

**2.8** Sean $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ y $\mathbf{D}$ categorías. Proporcione una definición adecuada de un funtor $F: \mathbf{C} \times \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{D}$, que llamaremos *funtor de dos variables o bifuntor*, de $(\mathbf{C}, \mathbf{C}')$ en $\mathbf{D}$.

**2.9** Sea $G_0$ un grupo fijo. Pruebe que la categoría cuyos objetos son módulos cruzados $(M, G_0, \partial)$ es una subcategoría plena de $\mathbf{XMod}$.

## II.3 PRODUCTOS FIBRADOS Y CATEGORÍAS ABELIANAS

Las siguientes definiciones se conocen como *propiedades universales* para el producto y coproducto.

**3.1 DEFINICION.** Sea $\mathbf{C}$ una categoría y sean $A, B$ dos objetos de $\mathbf{C}$. El *producto* de $A$ y $B$ en $\mathbf{C}$ consta de un objeto $P$ en $\mathbf{C}$ y dos morfismos, $p: P \longrightarrow A$ y $q: P \longrightarrow B$, tales que, para cualesquiera dos morfismos $f: X \longrightarrow A$ y $g: X \longrightarrow B$ en $\mathbf{C}$, existe un morfismo único $h: X \longrightarrow P$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & P \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & B \end{tikzcd}$$

es decir, $f = ph$ y $g = qh$.

Dualizando la definición anterior, tenemos la siguiente

**3.2 DEFINICION.** Sea $\mathbf{C}$ una categoría y sean $A$ y $B$ dos objetos de $\mathbf{C}$. El *coproducto* de $A$ y $B$ en $\mathbf{C}$ consta de un objeto $Q$ en $\mathbf{C}$ y dos morfismos $i: A \longrightarrow Q$ y $j: B \longrightarrow Q$, tales que, para cualesquiera dos morfismos $f: A \longrightarrow X$ y $g: B \longrightarrow X$ en $\mathbf{C}$ existe un morfismo único $h: Q \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"] & Q \arrow[u, "h"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

es decir, $f = hi$ y $g = hj$.

Los morfismos $p$ y $q$ se llaman *proyecciones* y los morfismos $i, j$ se llaman *inyecciones*. Se acostumbra escribir $P = A \times B$ y $Q = A \coprod B$. Estas definiciones se pueden generalizar de manera obvia para el caso de una familia de objetos $\{A_i\}_{i \in J}$ de una categoría $\mathbf{C}$.

Dada una categoría $\mathbf{C}$ cualquiera, no se puede asegurar que el producto o coproducto exista siempre. Lo que se puede asegurar es que, si el producto o coproducto existe, entonces es único.

**3.3 PROPOSICION.** Sean $P$ y $P'$ dos productos para $A$ y $B$, objetos de $\mathbf{C}$. Entonces existe un isomorfismo único $h'\colon P \longrightarrow P'$ tal que $f = ph'$ y $g = qh'$.

**Demostración.** Como $P$ es un producto, existe un morfismo único $h\colon P' \longrightarrow P$ tal que $f = ph$ y $g = qh$. También, como $P'$ es un producto, existe un morfismo $h'\colon P \longrightarrow P'$ tal que $f = ph'$ y $g = qh'$. Entonces $f = f \circ 1 = phh'$ y $g = g \circ 1 = qhh'$. Por la unicidad de $P$ se sigue que $hh' = 1$. Análogamente $h'h = 1$.■

Por ejemplo, en la categoría de conjuntos si tomamos el producto cartesiano usual, claramente se tiene un producto. También existe el coproducto para la categoría de conjuntos. En los problemas de esta sección aparecen más ejemplos.

A continuación definiremos los conceptos de producto y coproducto fibrado que utilizaremos posteriormente.

**3.4 DEFINICION.** Sean $f\colon X \longrightarrow A$ y $g\colon Y \longrightarrow A$ morfismos en una categoría $\mathbf{C}$. El *producto fibrado o cuadrado cartesiano* de $(f, g)$ es una pareja de morfismos $\varphi\colon B \longrightarrow X$, $\gamma\colon B \longrightarrow Y$ con $f\varphi = g\gamma$ tal que, si $\varphi'\colon C \longrightarrow X$ y $\gamma'\colon C \longrightarrow Y$ son tales que $f\varphi' = g\gamma'$, entonces existe una única $h\colon C \longrightarrow B$ tal que $\varphi' = \varphi h$ y $\gamma' = \gamma h$.

$$\begin{array}{ccccc}
C & & & \varphi' & \\
 & \searrow^{h} & & & \\
 & & B & \xrightarrow{\varphi} & X \\
\gamma' & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
 & & Y & \xrightarrow{g} & A
\end{array}$$

Denotamos con $(B, (\varphi, \gamma))$, o simplemente con $B = Y \wedge X$, el producto fibrado de $(f, g)$.

**3.5 DEFINICION.** Sean $f\colon A \longrightarrow X$ y $g\colon A \longrightarrow Y$ morfismos en una categoría $\mathbf{C}$. El *coproducto fibrado, (suma fibrada o cuadrado cocartesiano)* de $(f, g)$ es una pareja de morfismos $\varphi\colon X \longrightarrow B$ y $\gamma\colon Y \longrightarrow B$ con $\varphi f = \gamma g$ tal que si $\varphi'\colon X \longrightarrow C$ y $\gamma'\colon Y \longrightarrow C$ son, tales que $\varphi' f = \gamma' g$, entonces existe una única $h\colon B \longrightarrow C$ tal que $\varphi' = h\varphi$ y $\gamma' = h\gamma$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & X & & \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \varphi' \\ Y & \xrightarrow{\gamma} & B & & \\ & & & \searrow{\scriptstyle h} & \\ & \gamma' & & & C \end{array}$$

Denotamos con $(B, (\varphi, \gamma))$, o simplemente con $B = Y \vee X$, el coproducto fibrado de $(f, g)$.

**3.6 EJEMPLO.** En la categoría **Conj**, considérense $X$ y $Y$ como subconjuntos de $A$ con inclusiones $f$ y $g$, respectivamente. Entonces $B = X \cap Y$ y $\varphi, \gamma$ son también inclusiones y $B$ es el producto fibrado de $(f, g)$. Ahora, si consideramos a $A = X \cap Y$ y $B = X \cup Y$, tenemos el coproducto fibrado de $f: A \longrightarrow X$ y $g: A \longrightarrow Y$.

Finalmente, definamos las categorías aditivas y las abelianas.

**3.7 DEFINICION.** Una *categoría aditiva* $\mathbf{A}$ es una categoría con objeto cero en la cual cualesquiera dos objetos poseen un producto y el conjunto de morfismos $\mathbf{A}(X, Y)$ es un grupo abeliano tal que la composición

$$\mathbf{A}(X, Y) \times \mathbf{A}(Y, Z) \longrightarrow \mathbf{A}(X, Z)$$

es bilineal.

**3.8 DEFINICION.** Una *categoría abeliana* es una categoría aditiva que además satisface las siguientes propiedades

(i) Todo morfismo posee un núcleo y un conúcleo.

(ii) Para $\alpha$ un monomorfismo y $\beta$ un epimorfismo, $\alpha \in \mathit{ker}\ \beta$ si, y sólo si, $\beta \in \mathit{coker}\ \alpha$.

(iii) Todo morfismo puede factorizarse como $\alpha = \beta\gamma$, con $\beta$ monomorfismo y $\gamma$ epimorfismo.

La categoría **Ab** de grupos abelianos es una categoría abeliana, pero la categoría de grupos abelianos libres es aditiva, mas no abeliana.

Mencionamos el hecho de que en las categorías abelianas se puede definir el concepto de sucesión exacta, y que su formalización está fuera de los propósitos de este libro.

## PROBLEMAS

**3.1** Pruebe que el coproducto de objetos de una categoría $\mathbf{C}$, si existe, es único.

**3.2** Pruebe que **Conj** posee un coproducto, dado por la unión ajena de conjuntos.

**3.3** Compruebe que, en ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$, el coproducto es la suma directa.

**3.4** Demuestre que las categorías **Gr** y **Ab** poseen coproductos.

**3.5** Compruebe que en **An** existe el producto.

**3.6** Pruebe que en ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$ existen el producto y el coproducto.

**3.7** Sea $A$ un objeto fijo de una categoría $\mathbf{C}$. Defina una nueva categoría $\mathbf{C}/A$ como sigue: un objeto en $\mathbf{C}/A$ es un morfismo $\alpha: X \longrightarrow A$ en $\mathbf{C}$ y un morfismo $\rho: \alpha \longrightarrow \beta$ en $\mathbf{C}/A$ es un morfismo $\rho: X \longrightarrow Y$ tal que $\alpha = \beta\rho$; es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \arrow[dl, "\beta"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Sea $\Pi = f\varphi = g\gamma$. Pruebe que $(\Pi, (\varphi, \gamma))$ es el producto de $f$ y $g$ en $\mathbf{C}/A$. Esto establece una conexión entre el producto y el producto fibrado.

**3.8** Pruebe que la categoría $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}$ con morfismos de grado $0$ es abeliana, y establezca que, para morfismos de grado diferente de cero, $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}$ no es aditiva.

**3.9** Diremos que un funtor $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es *aditivo* si, para todo par de morfismos $f, g \in \mathbf{C}(A, B)$, $F(f+g) = F(f)+F(g)$. Demuestre que los funtores $\_\otimes_\Lambda N$, $M\otimes_\Lambda \_$, $Hom_\Lambda(\_, N)$ y $Hom_\Lambda(M, \_)$ son funtores aditivos.

**3.10** Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ categorías abelianas. Se dice que un funtor $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ es *exacto derecho* si, para toda sucesión exacta de objetos de $\mathbf{C}$

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

la sucesión

$$F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z) \longrightarrow 0$$

de objetos de $\mathbf{C}'$ es exacta.

(a) compruebe que los funtores $M \otimes_\Lambda \_$ y $\_ \otimes_\Lambda N$ son funtores exactos derechos.

(b) defina el concepto de funtor exacto izquierdo y compruebe que el funtor $Hom_\Lambda(M, \_\ )$ es exacto izquierdo.

(c) demuestre que el funtor $F$ es exacto izquierdo si, y sólo si, es aditivo y $ker\ F(f) = F(ker f)$ para todo morfismo $f$ de $\mathbf{C}$.

**3.11** Sean $f: M \longrightarrow M''$ y $g: M \longrightarrow M'$ homomorfismos de $\Lambda$-módulos. Pruebe que el siguiente diagrama es un coproducto fibrado

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M'' \\ \downarrow g & & \downarrow f' \\ M' & \xrightarrow{g'} & M' \vee M'' \end{array}$$

donde $M' \vee M'' = M' \oplus M''/N$ con $N = \{(g(x), -f(x)) | x \in M\}$, $f'(z) = (0, z) + N$ y $g'(y) = (y, 0) + N$.

# Capítulo **III**

# ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

A lo largo de este capítulo, a menos que se indique lo contrario, $\Lambda$ denotará un anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

En la sección 1 presentamos el importante concepto de "homología", así como algunas de sus principales propiedades. En la sección 2 introducimos las resoluciones proyectivas y las resoluciones proyectivas reducidas de un $\Lambda$-módulo $M$ (las primeras son más del gusto de los topólogos y las segundas lo son de los algebristas), las cuales denotaremos mediante $P$ y $P_M$ respectivamente. En esa misma sección probamos el importante Lema 2.4, que puede considerarse como fundamental en el Algebra Homológica. En la sección 3 construimos el bifuntor $Tor_n^{\Lambda}(\_\,,\_)$ y establecemos algunas de sus propiedades. Lo mismo hacemos para el bifuntor $Ext_{\Lambda}^n(\_\,,\_)$ en la sección 4.

En la sección 5 estudiamos los funtores derivados y sus propiedades en general. En la sección 6 hacemos aplicaciones concretas de los resultados obtenidos en las secciones anteriores; en particular, se hacen a la torsión de un $\Lambda$-módulo y al cálculo de $Ext_{\Lambda}^n(M,N)$ para diversos $\Lambda$-módulos $M$ y $N$.

## III.1 HOMOLOGÍA

En el Algebra Homológica no solamente se estudian los objetos, sino también los morfismos entre ellos. Veamos esto.

**1.1 DEFINICION.** Sea $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de $\Lambda$-módulos y

$$\{\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

una familia de homomorfismos de $\Lambda$-módulos tales que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Llamaremos *complejo de cadenas* sobre $\Lambda$ a la pareja $C = \{C_n, \partial_n\}$, y lo escribimos

$$C\colon \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \ .$$

Dicho de otra manera, un complejo de cadenas (o cadena), es una sucesión semiexacta descendente con índices en $\mathbb{Z}$ .

**1.2 DEFINICION.** Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$ y $D = \{D_n, \partial'_n\}$ dos complejos de cadenas. Un *morfismo de cadenas* $\varphi\colon C \longrightarrow D$ es una familia de homomorfismos de $\Lambda$-módulos $\{\varphi_n : C_n \longrightarrow D_n\}$ tal que los cuadrados, en el siguiente diagrama, conmutan:

$$\begin{array}{ccccccccc}
C\colon & \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{n-2}} & & \\
D\colon & \cdots & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & D_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \ .
\end{array}$$

Consideremos la categoría $\mathbf{Mod}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ de $\Lambda$-módulos graduados. Entonces podemos decir que una cadena $C = \{C_n, \partial_n\}$ es un objeto de $\mathbf{Mod}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ junto con un endomorfismo $\partial\colon C \longrightarrow C$ de grado $-1$ tal que $\partial \circ \partial = 0$. Un morfismo de cadenas $\varphi\colon C \longrightarrow D$ es un morfismo de grado cero en $\mathbf{Mod}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ tal que $\varphi\partial = \partial'\varphi$.

Es obvio que tenemos una categoría abeliana **CC** cuyos objetos son los complejos de cadenas y cuyos morfismos son los morfismos de cadenas (problema 1.2).

Definiremos a continuación el concepto central del presente capítulo.

**1.3 DEFINICION.** Sea $C = \{C_n, \partial_n\}$ un complejo de cadenas. El *módulo de homología* de grado (o dimensión) $n$ de $C$, $H_n(C)$ se define como el cociente

$$H_n(C) = ker\ \partial_n / im\ \partial_{n+1}.$$

Es decir, dada una cadena

$$C\colon \quad \cdots \quad \longrightarrow \quad C_{n+1} \quad \xrightarrow{\partial_{n+1}} \quad C_n \quad \xrightarrow{\partial_n} \quad C_{n-1} \quad \longrightarrow \quad \cdots$$

consideramos el núcleo de $\partial_n$, $ker\ \partial_n \subset C_n$, y la imagen de $\partial_{n+1}$, $im\ \partial_{n+1} \subset C_n$, y formamos el cociente $ker\ \partial_n/im\ \partial_{n+1}$. Nótese que $C$ es una sucesión semiexacta, es decir, $im\ \partial_{n+1} \subset ker\ \partial_n$, y que el cociente

$$H_n(C) = ker\ \partial_n/im\ \partial_{n+1}$$

nos mide la inexactitud de $C$. Efectivamente, si $C$ es exacta, entonces $im\ \partial_{n+1} = ker\ \partial_n$ y $H_n(C) = 0$.

Los elementos de $C_n$ se conocen como *cadenas* de grado $n$, y los homomorfismos $\partial_n$ se llaman *diferenciales* u *operadores frontera*. Los elementos del núcleo de $\partial_n$ se denominan *ciclos* de grado $n$, denotados con $Z_n(C)$ y los elementos de la imagen de $\partial_{n+1}$ se llaman *fronteras* de grado $n$, denotados con $B_n(C)$. Así, $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$.

Diremos que dos elementos de $H_n(C)$ son *homólogos* si pertenecen a la misma clase lateral. El elemento de $H_n(C)$, determinado por el ciclo $c$ de grado $n$, se llama *clase de homología* de $c$ y se denota con $[c]$.

Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos un módulo de homología $H_n(C)$. El módulo graduado $H_*(C) = \{H_n(C)\}$ se denomina *homología de la cadena* C.

Hemos asociado a cada cadena $C$ un $\Lambda$-módulo graduado $H_*(C)$. De la definición 1.2 queda claro que un morfismo de cadenas $\varphi\colon C \longrightarrow D$ induce un morfismo, bien definido, de grado cero, $H_*(\varphi) = \varphi_*\colon H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$ de módulos graduados. Luego, $H_*(\_\_)$ es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas en la categoría de $\Lambda$-módulos graduados,

$$H_*(\_\_)\colon \mathbf{CC} \longrightarrow \mathbf{Mod}_\Lambda^{\mathbb{Z}}.$$

A continuación, consideremos la situación dual.

**1.4 DEFINICION.** Sea $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de $\Lambda$-módulos y

$$\{\partial^n\colon C^n \longrightarrow C^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

una familia de homomorfismos de $\Lambda$-módulos tales que $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$. Llamaremos *complejo de cocadenas* sobre $\Lambda$ a la pareja $C = \{C^n, \partial^n\}$ y lo escribimos

$$C\colon \quad \cdots \quad \longrightarrow \quad C^{n-1} \quad \xrightarrow{\mathbf{D}^{n-1}} \quad C^n \quad \xrightarrow{\partial^n} \quad C^{n+1} \quad \longrightarrow \quad \cdots \quad .$$

Dicho de otra forma, un complejo de cocadenas (o cocadena), es una sucesión semiexacta ascendente con índices superiores en $\mathbb{Z}$.

**1.5 DEFINICION.** Sean $C = \{C^n, \partial^n\}$ y $D = \{D^n, \partial^n\}$ dos complejos de cocadenas. Un *morfismo de cocadenas* $\psi: C \longrightarrow D$ es una familia de homomorfismos de $\Lambda$-módulos $\{\psi^n: C^n \longrightarrow D^n\}$ tal que los cuadrados, en el siguiente diagrama, conmutan:

$$\begin{array}{cccccccccc}
C\colon & \cdots & \longrightarrow & C^{n-1} & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\partial^n} & C^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow\psi & & & \downarrow\psi^{n-1} & & \downarrow\psi^n & & \downarrow\psi^{n+1} & & \\
D\colon & \cdots & \longrightarrow & D^{n-1} & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & D^n & \xrightarrow{\partial^n} & D^{n+1} & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

**1.6 DEFINICION.** Sea $C = \{C^n, \partial^n\}$ un complejo de cocadenas. El *módulo de cohomología* de grado (o dimensión) $n$ de $C$, $H^n(C)$ se define como el cociente

$$H^n(C) = ker\ \partial^n / im\ \mathbf{D}^{n-1}.$$

En forma análoga al concepto de homología, para cohomología hablaremos del conjunto de *cociclos* $Z^n(C)$ de una cocadena $C$, del conjunto de *cofronteras* $B^n(C)$ y de *clases de cohomología*. Llamaremos *cohomología de la cocadena* $C$ al módulo graduado $H^*(C) = \{H^n(C)\}$ y podemos considerar $H^*(\_\_)$ como un funtor de la categoría de cocadenas en la categoría de los $\Lambda$-módulos graduados.

Debido a la dualidad de los conceptos de homología y cohomología, consideraremos resultados para la homología y dejamos como ejercicio dualizar los resultados para la cohomología, pues, si $C = \{C_n, \partial_n\}$ es una cadena, entonces obtenemos una cocadena $D = \{D^n, \partial^n\}$ poniendo $D^n = C_{-n}$ y $\partial^n = \partial_{-n}$.

Diremos que una cadena $C = \{C_n, \partial_n\}$ es *trivial* si $C_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Luego, su homología es

$$H_*(C) = \{H_n(C) | H_n(C) = 0, \forall\ n \in \mathbb{Z}\} = \{0\}.$$

Un *morfismo trivial* de una cadena $C$ en una cadena $D$, $\varphi: C \longrightarrow D$, consiste en una familia de homomorfismos triviales de $\Lambda$-módulos. Entonces, si $\varphi: C \longrightarrow D$ es el homomorfismo trivial, $H_n(\varphi): H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$ es trivial para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Dados dos complejos de cadenas $C$, $D$, y $\varphi, \varphi': C \longrightarrow D$ dos morfismos entre ellas, nos preguntamos cuándo $\varphi$ y $\varphi'$ inducen el mismo homomorfismo entre $H_*(C)$ y $H_*(D)$. Para contestar esta pregunta introduciremos el concepto de homotopía.

**1.7 DEFINICION.** Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$ y $D = \{D_n, \partial'_n\}$ dos cadenas y $\varphi, \varphi' \colon C \longrightarrow D$ dos morfismos de cadenas. Diremos que $\varphi$ es *homotópico* a $\varphi'$ si existe una familia de homomorfismos de $\Lambda$-módulos

$$h = \{h_n \colon C_n \longrightarrow D_{n+1} | n \in \mathbb{Z}\}$$

tales que $\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = \varphi_n - \varphi'_n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C\colon \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi'_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "\varphi'_n"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "\varphi'_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\
D\colon \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La familia $h = \{h_n\}$ se llama *homotopía de cadenas*, y diremos que $\varphi$ es homotópica a $\varphi'$. En símbolos, escribiremos $h \colon \varphi \sim \varphi' \colon C \longrightarrow D$.

Es fácil probar la siguiente Proposición (problema 1.5).

**1.8 PROPOSICION.** La relación de homotopía $\sim$ es una relación de equivalencia.■

Diremos que un morfismo de cadenas $\varphi \colon C \longrightarrow D$ es una *equivalencia homotópica* si existe un morfismo de cadenas $\varphi' \colon D \longrightarrow C$ tal que $\varphi'\varphi \sim 1_C$ y $\varphi\varphi' \sim 1_D$, y diremos que $C$ y $D$ son del mismo *tipo de homotopía*.

**Nota**: A menudo omitiremos los subíndices en $\partial_n$ o $\partial^n$, pero únicamente cuando en el contexto sea claro el significado de las mismas.

**1.9 TEOREMA.** Si $\varphi \sim \varphi' \colon C \longrightarrow D$ entonces

$$H_*(\varphi) = H_*(\varphi') \colon H_*(C) \longrightarrow H_*(D).$$

**Demostración.** Sea $h \colon \varphi \sim \varphi'$ la homotopía. Sea $x \in H_n(C)$ arbitraria, $z \in Z_n(C)$, tal que $p(z) = x$, donde $p \colon Z_n(C) \longrightarrow H_n(C)$ es la proyección en su cociente. Entonces

$$\varphi_n(z) - \varphi'_n(z) = \partial'_{n+1} h_n(z) + h_{n-1}\partial_n(z) = \partial'_{n+1} h_n(z),$$

pues $\partial_n(z) = 0$. Como $\partial'_{n+1} h_n(z) \in B_n(D)$, $H_n(\varphi)(z) = H_n(\varphi')(z)$, luego $H_n(\varphi) = H_n(\varphi')$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, i.e., $\varphi(z)$ y $\varphi'(z)$ son homólogos.■

El converso de este teorema no es cierto.

Si $\varphi = 0 \colon C \longrightarrow C$ es el morfismo trivial y $\varphi' = 1_C \colon C \longrightarrow C$ es el morfismo identidad, entonces una homotopía $h \colon \varphi \sim \varphi'$ se llama *contracción* y tenemos que $\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica, por 1.9, que $H_*(C) = 0$ y, por lo tanto, $C$ es exacta.

Sean $C, D, E$ cadenas en **CC**. La categoría de complejos de cadenas es abeliana; luego, podemos formar sucesiones exactas cortas de objetos de **CC**,

$$C \rightarrowtail D \twoheadrightarrow E\ .$$

Si ponemos las cadenas verticales, la sucesión exacta corta anterior se vería como en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\varphi} & D & \xrightarrow{\varphi'} & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & D_{n+1} & \xrightarrow{\varphi'_{n+1}} & E_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial'_{n+1} & & \downarrow \partial''_{n+1} & & \\
0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\varphi_n} & D_n & \xrightarrow{\varphi'_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial''_n & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{\varphi'_{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & .
\end{array}$$

A continuación utilizaremos I.3.9 para probar el siguiente teorema básico:

**1.10 TEOREMA.** Sea $C \overset{\varphi}{\rightarrowtail} D \overset{\varphi'}{\twoheadrightarrow} E$ una sucesión exacta corta de cadenas. Entonces existe un homomorfismo $\kappa_n \colon H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{\varphi_{*n}} H_n(D) \xrightarrow{\varphi'_{*n}} H_n(E) \xrightarrow{\kappa_n}$$

$$\xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{\varphi_{*n-1}} H_{n-1}(D) \xrightarrow{\varphi'_{*n-1}} H_{n-1}(E) \xrightarrow{\kappa_{n-1}} \cdots\ .$$

**Demostración.** Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\varphi_n} & D_n & \xrightarrow{\varphi'_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial''_n & & \\
 & & C_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{\varphi'_{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Por I.3.9, tenemos dos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow ker\ \partial_n \longrightarrow ker\ \partial'_n \longrightarrow ker\ \partial''_n \quad \text{y}$$

$$coker\ \partial_n \longrightarrow coker\ \partial'_n \longrightarrow coker\ \partial''_n \longrightarrow 0\ .$$

Ahora, $\partial_n$ induce un homomorfismo $\iota_n$ como sigue:

$$\iota_n \colon coker\ \partial_{n+1} = C_n/im\ \partial_{n+1} \twoheadrightarrow C_n/ker\ \partial_n \cong im\ \partial_n \subset ker\ \partial_{n-1}$$

tal que $ker\ \iota_n = ker\ \partial_n/im\ \partial_{n+1} = H_n(C)$ y $coker\ \iota_n = ker\ \partial_{n-1}/im\ \partial_n = H_{n-1}(C)$ (véase el problema 1.9). Análogamente, $\partial'_n$ y $\partial''_n$ inducen

$$\iota'_n \colon coker\ \partial'_{n+1} \longrightarrow ker\ \partial'_{n-1}\ , \quad \iota''_n \colon coker\ \partial''_{n+1} \longrightarrow ker\ \partial''_{n-1}$$

tales que $ker\ \iota'_n = H_n(D)$, $coker\ \iota'_n = H_{n-1}(D)$ y $ker\ \iota''_n = H_n(E)$, $coker\ \iota''_n = H_{n-1}(E)$ respectivamente. Entonces obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & coker\ \partial_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_n"] & coker\ \partial'_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\iota'_n"] & coker\ \partial''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\iota''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & ker\ \partial_{n-1} \arrow[r] & ker\ \partial'_{n-1} \arrow[r] & ker\ \partial''_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

Por I.3.9, existe el homomorfismo de conexión tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$ker\ \iota_n \longrightarrow ker\ \iota'_n \longrightarrow ker\ \iota''_n \xrightarrow{\kappa_n} coker\ \iota_n \longrightarrow coker\ \iota'_n \longrightarrow coker\ \iota''_n$$

Esto significa que

$$H_n(C) \longrightarrow H_n(D) \longrightarrow H_n(E) \xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}(C) \longrightarrow H_{n-1}(D) \longrightarrow H_{n-1}(E)$$

es exacta.∎

## PROBLEMAS

**1.1**

a) Consideremos el siguiente cuadrado conmutativo de $\Lambda$-módulos:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & M' \arrow[d, "\psi'"] \\
N \arrow[r, "\varphi'"] & N'
\end{tikzcd}$$

Pruebe que $\psi$ envía al núcleo de $\varphi$ en el núcleo de $\varphi'$ y que $\psi'$ envía a la imagen de $\varphi$ en la imagen de $\varphi'$. Luego, $\psi$ y $\psi'$ determinan los homomorfismos siguientes:

$\psi^a: ker\ \varphi \longrightarrow ker\ \varphi'$

$\psi^b: coim\ \varphi \longrightarrow coim\ \varphi', \qquad (coim\ \varphi = M/ker\ \varphi)$

$\psi'_a: im\ \varphi \longrightarrow im\ \varphi'$

$\psi'_b: coker\ \varphi \longrightarrow coker\ \varphi'$ .

b) Como consecuencia de a), dado $\varphi: C \longrightarrow D$ un morfismo de cadenas, compruebe que $\varphi$ induce un homomorfismo de $\Lambda$-módulos graduados

$$\varphi_* = H(\varphi): H(C) \longrightarrow H(D).$$

**1.2** Compruebe que $\mathbf{CC}$ es una categoría abeliana.

**1.3** Pruebe que $H(\_): \mathbf{CC} \longrightarrow \mathbf{Mod}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ es un funtor covariante.

**1.4** Pruebe que si $0: C \longrightarrow D$ es el morfismo trivial de cadenas, entonces $H(0)$ es el homomorfismo trivial de $\Lambda$-módulos graduados.

**1.5** Pruebe la Proposición 1.8.

**1.6** Demuestre que, si $\varphi \sim \varphi': C \longrightarrow D$ y $\psi \sim \psi': D \longrightarrow E$, entonces

$$\psi\varphi \sim \psi'\varphi': C \longrightarrow E.$$

**1.7** Sea $F: \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\Lambda'}$ un funtor aditivo. Si $C,\ D \in \mathbf{CC}$ y $\varphi \sim \varphi': C \longrightarrow D$, pruebe que $F\varphi \sim F\varphi': F(C) \longrightarrow F(D)$.

**1.8** Demuestre que si $\varphi \sim \varphi': C \longrightarrow D$ y $F$ es un funtor aditivo, entonces

$$H(F(\varphi)) = H(F(\varphi')): H(F(C)) \longrightarrow H(F(D)).$$

**1.9** En el teorema 1.10, pruebe que $\iota_n$ es un homomorfismo de $coker\ \partial_{n+1}$ sobre $ker\ \partial_{n-1}$, que $ker\ \iota_n = H_n(C)$ y que $coker\ \iota'_n = H_{n-1}(C)$.

**1.10** Pruebe que la sucesión larga de homología asociada a una sucesión exacta corta de cadenas es natural; es decir, dado el siguiente diagrama conmutativo de cadenas

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail] \arrow[d] & D \arrow[r, two heads] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ C' \arrow[r, tail] & D' \arrow[r, two heads] & E' \end{tikzcd}$$

se infiere el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones largas de homología:

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_n(C) & \longrightarrow & H_n(C') \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_n(D) & \longrightarrow & H_n(D') \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_n(E) & \longrightarrow & H_n(E') \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{n-1}(C) & \longrightarrow & H_{n-1}(C') \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{n-1}(D) & \longrightarrow & H_{n-1}(D') \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{n-1}(E) & \longrightarrow & H_{n-1}(E') \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array} .$$

**1.11** Establezca resultados duales a los de esta sección.

**1.12** Pruebe que el converso del teorema 1.9 no es cierto.

**1.13** Un *complejo cruzado* $C$ (sobre un grupo $H$) es una sucesión de grupos

$$C\colon \quad \cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} H$$

con las siguientes propiedades:

(i) $(C_1, H, \partial_1)$ es un módulo cruzado.

(ii) Para $n \geq 2$, cada $C_n$ es un $G$-módulo, donde $G = H/\partial_1(C_1)$, y $\partial_n$ es un $G$-homomorfismo.

(iii) $\partial \circ \partial = 0$.

a) Compruebe que, para $n = 2$, la propiedad (ii) tiene sentido porque, aunque $C_1$ no es un $G$-módulo, $\partial_2(C_2) \subset ker\, \partial_1$, también $ker\, \partial_1 \subset Z(C_1)$ (véase el problema I.1.10), y $ker\, \partial_1$ es un $G$-módulo.

b) Establezca una definición adecuada de complejo cruzado libre y de complejo cruzado proyectivo. [$H$ debe ser un grupo libre, $C_1$ debe ser un $H$-módulo cruzado libre (proyectivo) y cada $C_k$, $k \geq 2$, debe ser un $G = coker\, \partial_1$-módulo libre (proyectivo).]

**1.14** Demuestre que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $H_n\colon \mathbf{CC} \longrightarrow \mathbf{Mod}_\Lambda$ es un funtor aditivo.

## III.2 RESOLUCIONES

**2.1 DEFINICION.** Sea $M$ un $\Lambda$-módulo. Una *resolución proyectiva* de $M$ es una cadena exacta $P$ de la forma

$$P\colon \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

donde $P_n$ es proyectivo para toda $n \geq 0$.

Es decir, una resolución proyectiva de $M$ es una cadena positiva de $\Lambda$-módulos proyectivos $P = \{P_n, \partial_n\}$ (i.e., $P_n = 0$ para $n < 0$) tal que $H_n(P) = 0$ para $n \geq 1$. Escribimos

$$P\colon \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0\ .$$

En particular, si en 2.1 tenemos que $P_n$ es libre para cada $n$, diremos que $P$ es una *resolución libre* de $M$.

**2.2 OBSERVACION.** Sea $M$ un $\Lambda$-módulo. Una *presentación proyectiva* de $M$ es una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

tal que $P$ es proyectivo. Es decir, es un segmento inicial de una resolución proyectiva con $P = P_0$ y $K = ker\ \partial_1$.

En caso de que $P$ sea libre, tendremos una *presentación libre* de $M$ por generadores y relaciones.

Si para $i > n$, $P_i = 0$, diremos que la resolución $P$ tiene *longitud* $\leq n$, y escribimos

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ .$$

A continuación, veamos que todo $\Lambda$-módulo posee una resolución proyectiva.

**2.3 PROPOSICION.** Sea $M$ un $\Lambda$-módulo. Entonces existe una resolución libre $L$ de $M$.

**Demostración.** Por I.6.6, todo $\Lambda$-módulo $M$ es cociente de un $\Lambda$-módulo libre. Luego, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{\mu_0} L_0 \xrightarrow{\nu_0} M \longrightarrow 0$$

donde $L_0$ es un $\Lambda$-módulo libre. Como $M_0$ es un $\Lambda$-módulo, es cociente de un $\Lambda$-módulo libre $L_1$; luego, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\mu_1} L_1 \xrightarrow{\nu_1} M_0 \longrightarrow 0$$

con $L_1$ libre. Por inducción, obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{\mu_n} L_n \xrightarrow{\nu_n} M_{n-1} \longrightarrow 0$$

para cada $n$ con $L_n$ libre. Definamos una sucesión

$$L: \quad \cdots \quad L_{n+1} \quad \xrightarrow{\partial_{n+1}} \quad L_n \quad \xrightarrow{\partial_n} \quad L_{n-1} \quad \longrightarrow \quad \cdots$$

dada por

$$L_n = \begin{cases} M, & \text{si } n = -1 \\ L_n, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{si } n < -1 \end{cases} \qquad \partial_n = \begin{cases} \nu_0, & \text{si } n = 0 \\ \mu_{n-1} \circ \nu_n, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Como $\mu_n$ es monomorfismo y $\nu_n$ es epimorfismo, tenemos que

$$im\ \partial_{n+1} = im\ \mu_n = ker\ \nu_n = ker\ \partial_n\ .$$

Luego, $L$ es exacta.■

Como todo módulo libre es proyectivo, 2.3 implica que todo módulo posee una resolución proyectiva.

Nuestro propósito será comparar dos resoluciones de un $\Lambda$-módulo.

**2.4 LEMA.** Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$ y $D = \{D_n, \partial'_n\}$ dos complejos de cadenas. Sea $\varphi = \{\varphi_i : C_i \longrightarrow D_i\}_{i \leq n}$ una familia de homomorfismos de $\Lambda$-módulos tales que $\partial'_i \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ \partial_i$ para $i \leq n$. Supongamos que $C_i$ es proyectivo para $i > n$ y que $H_i(D) = 0$ para $i \geq n$. Entonces $\{\varphi_i\}_{i \leq n}$ se extiende a un morfismo de cadenas $\varphi : C \longrightarrow D$ y es único, salvo homotopía.

**Demostración.** Supongamos que, por inducción, hemos definido $\varphi_i$ para $i \leq k$, con $k \geq n$, $\partial'_i \varphi_i = \varphi_{i-1} \partial_i$ para $i \leq k$. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_k} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & D_k & \xrightarrow{\partial'_k} & D_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Como $C_{k+1}$ es proyectivo y $\partial'_k \circ \varphi_k \circ \partial_{k+1} = \varphi_{k-1} \circ \partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$, existe $\varphi_{k+1}$ con $\partial'_{k+1} \circ \varphi_{k+1} = \varphi_k \circ \partial_{k+1}$.

Supongamos que $\psi = \{\psi_i\}$ es otra extensión de $\{\varphi_i\}_{i \le n}$. Construyamos una homotopía $h: \varphi \sim \psi$: supongamos que, por inducción, tenemos $h_i: C_i \longrightarrow D_{i+1}$ para $i \le k$ con $k \ge n$, tal que

$$\partial'_{i+1} h_i + h_{i-1} \partial_i = \varphi_i - \psi_i.$$

Pudimos empezar la inducción con $h_i = 0$ para $i \le n$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] \arrow[d, phantom] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial_{k+1}"] \arrow[dl, "h_{k+1}"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_{k+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[dl, "h_k"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_k"'] \arrow[d, shift left, "\psi_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{k-1}"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_{k-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{k+1} \arrow[r, "\partial'_{k+1}"'] & D_k \arrow[r, "\partial'_k"'] & D_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que $\varphi_k - \psi_k = \partial'_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k$. Luego,

$$(\varphi_k - \psi_k) \circ \partial_{k+1} = \partial'_{k+1} h_k \partial_{k+1} + h_{k-1} \partial_k \partial_{k+1} = \partial'_{k+1} h_k \partial_{k+1}.$$

Por lo tanto, como $C_{k+1}$ es proyectivo, existe $h_{k+1}$ tal que

$$\partial'_{k+2} h_{k+1} + h_k \partial_{k+1} = \varphi_{k+1} - \psi_{k+1} \ .\blacksquare$$

**2.5 DEFINICION.** Diremos que un complejo de cadenas positivas $C = \{C_n, \partial_n\}$ es *acíclico* si $H_n(C) = 0$ para $n \ge 1$ (i.e., $C$ es exacta hasta $C_1$, y $H_0(C)$ puede ser diferente de cero). Equivalentemente, la sucesión

$$\cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} H_0(C) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Por 2.5 podemos decir que una resolución proyectiva de un $\Lambda$-módulo $M$ es una cadena proyectiva y acíclica $P = \{P_n, \partial_n\}$ tal que $H_0(P) \cong M$.

El Lema 2.4 nos dice que podemos construir morfismos de cadenas y homotopías de una cadena proyectiva en una acíclica. Podemos considerar a 2.4 como el lema fundamental del Algebra Homológica.

**2.6 DEFINICION.** Sea $P$ una resolución proyectiva de un $\Lambda$-módulo $M$

$$P\colon \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

Una *resolución proyectiva reducida* de $M$ es una resolución proyectiva de $M$ en la cual $M$ ha sido suprimido,

$$P_M\colon\ \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0\ .$$

Nótese que no perdemos ninguna información acerca de $P$, pues $M{=}coker\,\partial_1$. Entonces consideraremos las resoluciones proyectivas como una generalización de una presentación de un $\Lambda$-módulo, i.e., una generalización del concepto de generadores y relaciones. La ventaja de $P_M$ es que consta de $\Lambda$-módulos proyectivos exclusivamente.

**2.7 TEOREMA.** Sean $P$ y $P'$ resoluciones proyectivas de un $\Lambda$-módulo $M$. Entonces existe un morfismo de cadenas $\varphi\colon P \longrightarrow P'$ tal que $\epsilon'\varphi_0 = \epsilon$. Aún más, $\varphi$ es único, salvo homotopía, y es una equivalencia homotópica.

**Demostración.** Del Lema 2.4 aplicado a $n = -1$, obtenemos un morfismo de cadenas $\varphi\colon P \longrightarrow P'$ que satisface $\epsilon'\varphi_0 = \epsilon$. Aún más, $\varphi$ es única, salvo homotopía $(h_{-1} = 0)$. De manera análoga, existe $\varphi'\colon P' \longrightarrow P$. Tenemos que la composición $\varphi'\varphi\colon P \longrightarrow P$ y la identidad $1_P\colon P \longrightarrow P$ son homotópicas por 2.4, i.e., $\varphi'\varphi \sim 1_P$. Análogamente, $\varphi\varphi' \sim 1_{P'}$. Luego, $\varphi$ es una equivalencia homotópica.■

Podemos decir, por 2.7, que dos resoluciones proyectivas de un $\Lambda$-módulo $M$ son del mismo *tipo de homotopía*, o bien, que son *únicas, salvo equivalencia homotópica*.

**2.8 EJEMPLO.** Sea $L$ un $\Lambda$-módulolibre. Entonces

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{1_L} L \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de $L$ de longitud cero.

**2.9 EJEMPLO.** Consideremos $\mathbb{Z}$-módulos. Entonces los subgrupos de un grupo libre son libres. Luego, cualquier grupo abeliano $G$ admite una resolución libre de longitud menor o igual que 1:

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

Así, por ejemplo, el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/p$, $p$ primo, admite la siguiente resolución:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow 0$$

donde $\mu$ es la multiplicación por $p$.

Para la categoría de grupos abelianos, en la notación de 2.3, podemos tomar $M_1 = L_1$ y $L_n = 0$ para $n \geq 2$, pues un grupo abeliano es proyectivo si, y sólo si, es libre y el subgrupo de un grupo libre es libre.

## PROBLEMAS

**2.1** Defina el concepto de resolución inyectiva e inyectiva reducida de un $\Lambda$-módulo $M$.

**2.2** Pruebe el dual de 2.4.

**2.3** Demuestre el dual de 2.7.

**2.4** Pruebe que todo $\Lambda$-módulo posee una resolución inyectiva.

**2.5** Pruebe que, si $P$ es una resolución proyectiva reducuda de $M$ con $P_n = 0$ para $n > 0$, entonces $H_*(P) = 0$ si, y sólo si, $0 \sim 1_P\colon P \longrightarrow P$.

**2.6** Una *resolución cruzada* de un grupo dado $G$ es un complejo cruzado exacto $C$ (véase el problema III.1.13) donde el grupo $G$, dado de antemano, es tal que $G \cong H/\partial_1(C_1) = coker\ \partial_1$. Se dice que una *resolución cruzada de un grupo G es libre (proyectiva)* si el complejo cruzado correspondiente es libre (proyectivo).

Un *morfismo de complejos cruzados* $\alpha\colon C \longrightarrow C'$ consiste en homomorfismos de grupos $\alpha_0\colon H \longrightarrow H'$ y $\alpha_n\colon C_n \longrightarrow C'_n$ $(n \geq 1)$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
C\colon & \cdots & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & H \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_n} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_0} \\
C'\colon & \cdots & \longrightarrow & C'_n & \longrightarrow & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & H'
\end{array}$$

tales que las estructuras se preservan, es decir, $(\alpha_1, \alpha_0)$ es un morfismo de módulos cruzados y $\alpha_n$ $(n \geq 2)$ es un $G$-homomorfismo.

a) Establezca que, si $G$ es un grupo y $M$ un $G$-módulo, entonces existe una resolución libre (proyectiva) de $M$.

b) Pruebe que cualquier grupo $G$ posee una resolución cruzada libre (proyectiva).

**2.7**

a) Considere el siguiente diagrama conmutativo de $G$-módulos con el renglón inferior exacto y tal que $\partial \circ \partial' = 0$, con $P$ proyectivo:

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\partial'} & M' & \xrightarrow{\partial} & M'' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C'' \end{array}$$

Pruebe que existe un $G$-homomorfismo $\gamma\colon P \longrightarrow C$ que conmuta con el resto del diagrama.

b) Sea $P$ un complejo cruzado libre (proyectivo) con $G = \mathit{coker}\ \partial_1$ y sea $C$ una resolución cruzada de un grupo $G'$. Demuestre que cualquier homomorfismo de grupos $h\colon G \longrightarrow G'$ induce un morfismo $\alpha\colon P \longrightarrow C$ de complejos cruzados.

**2.8** Sea $P$ una resolución cruzada libre (proyectiva) de un grupo. Denotemos con $P^n$ el complejo cruzado

$$P^n\colon\ 0 \longrightarrow J_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

obtenido de $P$ como sigue:

(i) $J_n = \mathit{ker}\ (C_{n-1} \longrightarrow C_{n-2})$

(ii) $C_0 = L$ un grupo libre y $C_{-1} = G$.

$P^n$ se llama *$n$-extensión cruzada libre (proyectiva)*.

a) Compruebe que, dado un grupo $G$, siempre podemos construir una $n$-extensión cruzada libre correspondiente $P^n$ para cualquier $n > 1$.

b) Defina la $n$-extensión cruzada libre (proyectiva) $P^n$ para $n = 1$. (Sugerencia: considere $J_1 = \mathit{ker}\ (L \longrightarrow G)$ y reemplácelo por la extensión cruzada $0 \longrightarrow J_1^{ab} \longrightarrow L/[J_1, J_1] \longrightarrow G \longrightarrow 1$ .)

**2.9** Sean $C$ y $C'$ dos complejos cruzados con $G = \mathit{coker}\ \partial_1$ y $G' = \mathit{coker}\ \partial_1'$. Sean $\alpha, \beta\colon C \longrightarrow C'$ morfismos de complejos cruzados. Una *homotopía de $\alpha$ a $\beta$*, denotada por $\Sigma\colon \alpha \sim \beta$, es una familia de funciones $\Sigma = \{\Sigma_k\}_{k \geq 0}$ donde $\Sigma_0\colon H \longrightarrow C_1'$ y $\Sigma_k\colon C_k \longrightarrow C_{k+1}'$ $(k \geq 1)$ son tales que

(i) $\Sigma_0(xy) = \Sigma_0(x)({}^{\beta_0(x)}\Sigma_0(y))$ y $\partial_1'\Sigma_0(x) = \alpha_0(x)\beta_0(x)^{-1}, \quad x, y \in H$.

(ii) $\Sigma\colon C_1 \longrightarrow C_2'$ es un $H$-homomorfismo, con

$$\partial_2'\Sigma_1(x) = \beta_1(x)^{-1}(\Sigma_0\partial_1(x))^{-1}\alpha_1(x),\ x \in C_1.$$

(iii) $\Sigma_k$ es un $G$-homomorfismo que cumple con

$$\partial'_{k+1}\Sigma_k + \Sigma_{k-1}\partial_k = \alpha_k - \beta_k \qquad \text{para } k \geq 2\ .$$

$$\begin{tikzcd}
C\colon \cdots & C_k \arrow[r] \arrow[dl, "\Sigma_k"'] \arrow[d, shift right, "\alpha_k"'] \arrow[d, shift left, "\beta_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl, "\Sigma_{k-1}"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[dl, "\Sigma_1"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & H \arrow[r] \arrow[dl, "\Sigma_0"'] \arrow[d, shift right, "\alpha_0"'] \arrow[d, shift left, "\beta_0"] & G \arrow[r] & 1 \\
C'\colon \cdots & C'_k \arrow[r] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] & H' \arrow[r] & G' \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Pruebe que la homotopía de complejos cruzados así definida es una relación de equivalencia.

**2.10** Sea $C$ un complejo cruzado libre (proyectivo) con $G = \mathit{coker}\ \partial_1$, $P$ una resolución cruzada de $G'$. Demuestre que si $\alpha, \beta\colon C \longrightarrow P$ son morfismos de complejos cruzados e inducen el mismo homomorfismo $\varphi\colon G \longrightarrow G'$, entonces existe una homotopía $\Sigma\colon \alpha \sim \beta$.

**2.11** Demuestre que el conjunto $Hom(G, G')$ clasifica las clases de homotopía de morfismos de $C$ en $P$ con el mismo homomorfismo inducido $\varphi\colon G \longrightarrow G'$. (Sugerencia: utilice los problemas III.2.7 (b) y III.2.10.)

## III.3 $\mathrm{TOR}_n^\Lambda$ (M,N)

Sea $P_M\colon \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0$ una resolución proyectiva reducida del $\Lambda$-módulo $M$. Sea $N$ un $\Lambda$-módulo y consideremos el producto tensorial $P_M \otimes_\Lambda N$, que es la sucesión

$$P_M \otimes_\Lambda N\colon \cdots \longrightarrow P_n \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\partial_n \otimes 1} P_{n-1} \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\partial_{n-1}\otimes 1} \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1} P_0 \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0.$$

$P_M \otimes_\Lambda N$ resulta ser una sucesión semiexacta, pues, para toda $n > 1$,

$$(\partial_{n-1} \otimes_\Lambda 1) \circ (\partial_n \otimes_\Lambda 1) = (\partial_{n-1} \circ \partial_n) \otimes_\Lambda 1 = 0 \otimes_\Lambda 1 = 0.$$

Entonces podemos formar el $\Lambda$-módulo graduado

$$H_*(P_M \otimes_\Lambda N) = \{H_n(P_M \otimes_\Lambda N)\}_{n \geq 0}.$$

**3.1 DEFINICION.** Para cada $n \geq 0$, denotemos $H_n(P_M \otimes_\Lambda N)$ con $Tor_n^\Lambda(M,N)$, y lo llamaremos *funtor de torsión* de grado $n$ sobre $\Lambda$ de $M$ y $N$.

A continuación, veamos que $Tor_n^\Lambda(M,N)$ depende esencialmente de $n$, $M$ y $N$, y no de la resolución escogida. Supongamos que

$$Q_M\colon \cdots \longrightarrow Q_n \xrightarrow{\partial'_n} Q_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{\partial'_1} Q_0 \longrightarrow 0$$

es otra resolución proyectiva reducida de $M$. Por los resultados de III.2 existen morfismos de cadenas $\varphi\colon P_M \longrightarrow Q_M$ y $\varphi'\colon Q_M \longrightarrow P_M$ tales que $\varphi'\varphi \sim 1_P$ y $\varphi\varphi' \sim 1_Q$. Sea $1_N\colon N \longrightarrow N$ la identidad en $N$. Entonces los morfismos $\varphi \otimes 1_N$ y $\varphi' \otimes 1_N$ son morfismos de cadenas que inducen

$$\varphi_*\colon H_n(P_M \otimes_\Lambda N) \longrightarrow H_n(Q_M \otimes_\Lambda N) \text{ y } \varphi'_*\colon H_n(Q_M \otimes_\Lambda N) \longrightarrow H_n(P_M \otimes_\Lambda N)$$

para cada $n \geq 0$. Es inmediato comprobar que

$$(\varphi' \otimes 1_N) \circ (\varphi \otimes 1_N) \sim 1_{P\otimes N}, \quad \text{y que} \quad (\varphi \otimes 1_N) \circ (\varphi' \otimes 1_N) \sim 1_{Q\otimes N}.$$

Luego, $\varphi'_* \circ \varphi_*$ y $\varphi_* \circ \varphi'_*$ son los automorfismos de identidad de $H_n(P_M \otimes_\Lambda N)$ y $H_n(Q_M \otimes_\Lambda N)$, respectivamente. Entonces $\varphi_*$ y $\varphi'_*$ son isomorfismos. Por último, es obvio que $H_n(P_M \otimes_\Lambda N) = 0$ para $n \leq 0$.

Lo que hemos hecho es, por un lado, definir $Tor_n^\Lambda(M,N)$ a partir de una resolución proyectiva reducida $P$ de $M$, luego le aplicamos el funtor covariante $\_\otimes_\Lambda N$ y finalmente tomamos su homología:

$$Tor_n^\Lambda(M,N) = H_n(P_M \otimes_\Lambda N).$$

Sean $f\colon M \longrightarrow M''$ y $g\colon N \longrightarrow N''$ homomorfismos de $\Lambda$-módulos. Sean $P_M$ y $P_{M''}$ resoluciones proyectivas reducidas de $M$ y $M''$, respectivamente. Por 2.4, existe un morfismo de cadenas $\varphi\colon P_M \longrightarrow P_{M''}$ que extiende a $f$. Entonces

$$\varphi \otimes g = \{\varphi_n \otimes g\colon P_M \otimes_\Lambda N \longrightarrow P_{M''} \otimes_\Lambda N''\}$$

es un morfismo de cadenas que induce

$$(\varphi \otimes g)_*\colon H_*(P_M \otimes_\Lambda N) \longrightarrow H_*(P_{M''} \otimes_\Lambda N'')$$

i.e., $(\varphi \otimes g)_*\colon Tor_*^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_*^\Lambda(M'',N'')$ no depende de $\varphi$ (por 2.4), sino exclusivamente de $n$, $f$ y $g$, y lo denotamos con $Tor_*^\Lambda(f,g)$. Entonces es inmediato el siguiente

**3.2 TEOREMA.** $Tor_n^\Lambda(\_\,,\_)$ es un bifuntor covariante de la categoría de $\Lambda$-módulos en sí misma.■

Sea $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos y $P_M$ una resolución proyectiva reducida de $M$. Entonces

$$P_M \otimes_\Lambda N' \rightarrowtail P_M \otimes_\Lambda N \twoheadrightarrow P_M \otimes_\Lambda N''$$

es una sucesión exacta corta de cadenas. Por 1.10 existe un homomorfismo $\kappa_n\colon H_n(P_M \otimes_\Lambda N'') \longrightarrow H_{n-1}(P_M \otimes_\Lambda N')$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_n(P_M \otimes_\Lambda N') \xrightarrow{g'_{*n}} H_n(P_M \otimes_\Lambda N) \xrightarrow{g_{*n}} H_n(P_M \otimes_\Lambda N'') \xrightarrow{\kappa_n}$$

$$\xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}(P_M \otimes_\Lambda N') \xrightarrow{g'_{*n-1}} H_{n-1}(P_M \otimes_\Lambda N) \xrightarrow{g_{*n-1}} H_{n-1}(P_M \otimes_\Lambda N'') \longrightarrow \cdots \ .$$

Por 3.2 y lo anterior, tenemos el siguiente teorema.

**3.3 TEOREMA.** Sea $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos y $M$ un $\Lambda$-módulo. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N') \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N'') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(M,N') \longrightarrow \cdots \longrightarrow Tor_0^\Lambda(M,N'') \longrightarrow 0\ .$$

**3.4 TEOREMA.** Sea $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos y $N$ un $\Lambda$-módulo. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^{\Lambda}(M',N) \longrightarrow Tor_n^{\Lambda}(M,N) \longrightarrow Tor_n^{\Lambda}(M'',N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Tor_{n-1}^{\Lambda}(M',N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Tor_0^{\Lambda}(M'',N) \longrightarrow 0 \ .$$

**Demostración.** Utilícese el problema 3.6 para obtener una sucesión exacta corta de cadenas que se escinde,

$$P'_{M'} \rightarrowtail P_M \twoheadrightarrow P''_{M''}.$$

Por el problema I.8.17,

$$P'_{M'} \otimes_{\Lambda} N \rightarrowtail P_M \otimes_{\Lambda} N \twoheadrightarrow P''_{M''} \otimes_{\Lambda} N$$

es una sucesión exacta corta de cadenas que se escinde. Finalmente, aplique el teorema 1.10.■

Es claro que, $H_n(P \otimes_{\Lambda} N) = H_n(P_M \otimes_{\Lambda} N)$. Por ejemplo, para $n = 0$, consideremos la parte $P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$ de $P$ (que es exacta). Por I.8.6 (ii),

$$P_1 \otimes_{\Lambda} N \overset{\partial_1 \otimes 1_N}{\longrightarrow} P_0 \otimes_{\Lambda} N \overset{\epsilon \otimes 1_N}{\longrightarrow} M \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow 0$$

es exacta. Por lo tanto, $\epsilon \otimes 1_N$ es suprayectiva e $im(\partial_1 \otimes 1_N) = ker(\epsilon \otimes 1_N)$. Luego,

$$\begin{aligned} H_0(P_M \otimes_{\Lambda} N) &= P_0 \otimes_{\Lambda} N / im(\partial_1 \otimes 1_N) \\ &= P_0 \otimes_{\Lambda} N / ker(\epsilon \otimes 1_N) \\ &\cong M \otimes_{\Lambda} N \\ &= H_0(P \otimes_{\Lambda} N). \end{aligned}$$

De manera análoga podemos definir $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(M,N)$ como sigue: sea $Q_N$ una resolución proyectiva reducida de $N$. Consideremos el producto tensorial $M \otimes_{\Lambda} Q_N$ para $M$ un $\Lambda$-módulo. $M \otimes_{\Lambda} Q_N$ resulta ser una sucesión semiexacta cuya homología $H_n(M \otimes_{\Lambda} Q_N)$ de grado $n$ denotaremos con $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(M,N)$.

Es decir, a partir de una resolución proyectiva reducida $Q$ de $N$, aplicamos el funtor covariante $M \otimes_{\Lambda} \_$ y finalmente tomamos su homología:

$$\overline{Tor}_n^{\Lambda}(M,N) = H_n(M \otimes_{\Lambda} N).$$

Evidentemente, tenemos resultados análogos a 3.3 y 3.4 para $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(M,N)$ y también es inmediato comprobar que $H_n(M \otimes_{\Lambda} Q) = H_n(M \otimes_{\Lambda} Q_N)$ para

$n \geq 0$. Mas adelante (Teorema 3.7) veremos que $Tor_n^\Lambda(M,N) \cong \overline{Tor}_n^\Lambda(M,N)$ y posteriormente no distinguiremos entre uno y el otro. Ahora veamos algunos resultados de importancia.

**3.5 PROPOSICION.** Los funtores $Tor_0^\Lambda(\_\,,N)$ y $\overline{Tor}_0^\Lambda(M,\_\,)$ son equivalentes naturalmente a los funtores $\_ \otimes_\Lambda N$ y $M \otimes_\Lambda \_$, respectivamente.

**Demostración.** Sea $P_M$ una resolución proyectiva reducida de $M$,

$$P_M\colon \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Consideremos

$$P_M \otimes_\Lambda N\colon \cdots \longrightarrow P_n \otimes_\Lambda N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1_N} P_0 \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0.$$

Luego $Tor_0^\Lambda(M,N) = P_0 \otimes_\Lambda N / im(\partial_1 \otimes 1_N) = coker(\partial_1 \otimes 1_N)$. Por otro lado, consideremos una resolución proyectiva de $M$

$$P\colon \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0\ .$$

Formemos

$$P \otimes_\Lambda N\colon \cdots \longrightarrow P_n \otimes_\Lambda N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1_N} P_0 \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\epsilon \otimes 1_N} M \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0\ .$$

Evidentemente $M \otimes_\Lambda N \cong coker(\partial_1 \otimes 1_N)$. Es inmediato comprobar que existe una transformación natural $t$ entre $Tor_0^\Lambda(\_\,,N)$ y $\_ \otimes_\Lambda N$, es decir, una regla que a cada $\Lambda$-módulo $M$ le asocia un morfismo $t_M\colon Tor_0^\Lambda(M,N) \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$ tal que, para cualquier homomorfismo $f\colon M \longrightarrow M'$, el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} Tor_0^\Lambda(M,N) & \xrightarrow{t_M} & M \otimes_\Lambda N \\ {\scriptstyle Tor_0^\Lambda(f,1_N)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \otimes 1_N} \\ Tor_0^\Lambda(M',N) & \xrightarrow{t_{M'}} & M' \otimes_\Lambda N \end{array}$$

y que, como $Tor_0^\Lambda(M,N) = coker(\partial_1 \otimes 1_N) \cong M \otimes_\Lambda N$, $t_M$ es un isomorfismo para cualquier $M$. De manera similar obtenemos una equivalencia natural entre $\overline{Tor}_0^\Lambda(M,\_\,)$ y $M \otimes_\Lambda \_$ .■

Obsérvese que, debido a 3.5, tenemos una sucesión de la forma

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M',N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Tor_1^\Lambda(M'',N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow M' \otimes_\Lambda N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N \longrightarrow M'' \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

y

$$\cdots \longrightarrow \overline{Tor}_n^\Lambda(M,N') \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{Tor}_1^\Lambda(M,N'') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow M \otimes_\Lambda N' \longrightarrow M \otimes_\Lambda N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N'' \longrightarrow 0$$

Supongamos que tenemos una resolución proyectiva $P$ de longitud $n$ de un $\Lambda$-módulo $M$, apliquémosle el funtor exacto derecho $\_ \otimes_\Lambda N$ y obtendremos

$$P \otimes_\Lambda N\colon 0 \xrightarrow{\partial_{n+1}\otimes 1_N} P_n \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\partial_n \otimes 1_N} \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\epsilon\otimes 1_N} M \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0\ .$$

Obviamente, $H_m(P \otimes_\Lambda N) = Tor_m^\Lambda(M,N) = 0$ para $m > n$. Aún más, como $im(\partial_{n+1} \otimes 1_N) = 0$, tenemos que

$$H_n(P \otimes_\Lambda N) = ker(\partial_n \otimes 1_N).$$

Por lo tanto,

$$Tor_n^\Lambda(M,N) = ker(\partial_n \otimes 1_N).$$

En el caso en que $n = 1$, tenemos que, dada una presentación proyectiva $P_1 \rightarrowtail P_0 \twoheadrightarrow M$ de $M$, por I.8.6 (ii) se tiene una sucesión exacta

$$P_1 \otimes_\Lambda N \longrightarrow P_0 \otimes_\Lambda N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

y, por el comentario anterior, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Tor_1^\Lambda(M,N) \longrightarrow P_1 \otimes_\Lambda N \longrightarrow P_0 \otimes_\Lambda N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

es decir, $Tor_1^\Lambda(M,N)$ nos repara la inexactitud al hacer el producto tensorial con una resolución proyectiva finita de $M$.

**3.6 PROPOSICION.** Sea $P$ un $\Lambda$-módulo proyectivo. Entonces, para los $\Lambda$-módulos $M$ y $N$,

$$Tor_n^\Lambda(P,N) = 0 = \overline{Tor}_n^\Lambda(M,P) \qquad \text{para} \quad n \geq 1$$
$$y Tor_n^\Lambda(M,P) = 0 = \overline{Tor}_n^\Lambda(P,N) \qquad \text{para} \quad n \geq 1\ .$$

**Demostración.** Sea $Q$ una resolución proyectiva de $P$. Como $P$ es proyectivo, $Q$ es de la forma $Q\colon \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{\epsilon} P \longrightarrow 0$, donde $\epsilon = 1_P$. Luego, $Q \otimes_\Lambda N$ es exacta, i.e., $0 \longrightarrow P \otimes_\Lambda N \longrightarrow P \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$ es exacta y, por lo tanto, $Tor_n^\Lambda(P,N) = 0$ para toda $n \geq 1$. Por otro lado, sea $Q'$ una resolución proyectiva de $P$. Luego, $M \otimes_\Lambda Q'$ es exacta. Por lo tanto, $\overline{Tor}_n^\Lambda(M,P) = H_n(M \otimes_\Lambda Q') = 0$ para toda $n \geq 1$. Análogamente para el otro caso.∎

**3.7 TEOREMA.** $Tor_n^{\Lambda}(M,N) \cong \overline{Tor}_n^{\Lambda}(M,N)$.

**Demostración.** Sea $K \rightarrowtail P \twoheadrightarrow M$ una presentación proyectiva de $M$. Por 3.4, tenemos una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^{\Lambda}(K,N) \longrightarrow Tor_n^{\Lambda}(P,N) \longrightarrow Tor_n^{\Lambda}(M,N) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow P \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow M \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow 0$$

Por el correspondiente teorema para $\overline{Tor}(,)$ análogo a 3.3, tenemos una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\Lambda}(K,N) \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\Lambda}(P,N) \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\Lambda}(M,N) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow P \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow M \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow 0$$

Por 3.6, dichas sucesiones se convierten en

(i) $$0 \longrightarrow Tor_1^{\Lambda}(M,N) \longrightarrow K \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow P \otimes_{\Lambda} N$$

$$0 \longrightarrow \overline{Tor}_1^{\Lambda}(M,N) \longrightarrow K \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow P \otimes_{\Lambda} N$$

para $n = 1$ y

(ii) $$0 \longrightarrow Tor_n^{\Lambda}(M,N) \longrightarrow Tor_{n-1}^{\Lambda}(K,N) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\Lambda}(M,N) \longrightarrow \overline{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(K,N) \longrightarrow 0$$

para $n \geq 2$.

Claramente $Tor_0^{\Lambda}(M,N) = \overline{Tor}_0^{\Lambda}(M,N) = M \otimes_{\Lambda} N$. Por las sucesiones de (i), el teorema es válido para $n = 1$ y por (ii), utilizando inducción bajo $n$, hemos terminado.■

**3.8 TEOREMA.**

a) Si $P$ es un $\Lambda$-módulo plano, entonces $Tor_n^{\Lambda}(P,N) = 0$ para $n \geq 1$ y para cualquier $N$.

b) Si $Tor_1^{\Lambda}(P,N) = 0$ para toda $N$, entonces $P$ es plano.

**Demostración.**

a) Sea $Q_N$: $\cdots \longrightarrow Q_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow 0$ una resolución proyectiva reducida de $N$. Luego, el funtor $P \otimes_{\Lambda} \_$ es exacto por ser $P$ plano (problema I.8.11). Por lo tanto, $H_n(P \otimes_{\Lambda} \_) = 0$ para toda $n \geq 1$.

b) Sea $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ una sucesion exacta corta de $\Lambda$-módulos, entonces

$$0 \longrightarrow Tor_1^{\Lambda}(P,N'') \longrightarrow P \otimes_{\Lambda} N' \overset{1_P \otimes g'}{\longrightarrow} P \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow P \otimes_{\Lambda} N'' \longrightarrow 0$$

es exacta. Como $Tor_1^{\Lambda}(P,N'') = 0$, $1_P \otimes g'$ es un monomorfismo y, por lo tanto, $P$ es plano.■

Veamos otra demostración de 3.8 (a): sea $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\mu} P' \longrightarrow N \longrightarrow 0$ una presentación proyectiva de $N$. Luego tenemos

$$Tor_1^{\Lambda}(P,P') \longrightarrow Tor_1^{\Lambda}(P,N) \longrightarrow P \otimes_{\Lambda} R \overset{1_P \otimes \mu}{\longrightarrow} P \otimes_{\Lambda} P' \longrightarrow P \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow 0.$$

Como $P'$ es proyectivo, $Tor_1^{\Lambda}(P,P') = 0$ y, como $P$ es plano, $1_P \otimes \mu$ es un monomorfismo y $Tor_1^{\Lambda}(P,N) = 0$. Supongamos, por inducción, que $Tor_n^{\Lambda}(P,N) = 0$. Luego, consideremos

$$\cdots \longrightarrow Tor_{n+1}^{\Lambda}(P,P') \longrightarrow Tor_{n+1}^{\Lambda}(P,N) \longrightarrow Tor_n^{\Lambda}(P,R) \longrightarrow \cdots$$

Como $Tor_{n+1}^{\Lambda}(P,P') = 0 = Tor_n^{\Lambda}(P,R)$, se sigue que $Tor_{n+1}^{\Lambda}(P,N) = 0$.■

El proceso inductivo anterior se llama *cambio de grado o dimensión.*

## PROBLEMAS

**3.1** Escriba con detalle la demostración de 3.2.

**3.2** Pruebe que $\overline{Tor}_0^{\Lambda}(M,N)$ es equivalente naturalmente a $M \otimes_{\Lambda} \_\_$.

**3.3** Pruebe que $Tor_n^{\Lambda}(\bigoplus M_m, N) \cong \coprod Tor_n^{\Lambda}(M_m, N)$ para toda $n \geq 0$.

**3.4** Sea $\Lambda$ un dominio entero. Considere la siguiente sucesión exacta corta $\Lambda \rightarrowtail F \twoheadrightarrow F/\Lambda$, donde $F$ es el campo de fracciones o campo de cocientes de $\Lambda$. Demuestre que

a) $Tor_1^{\Lambda}(F/\Lambda, N) \cong \mathcal{T}N$ y que el isomorfismo es natural.

b) $Tor_n^{\Lambda}(F/\Lambda, N) = 0$ para todo $\Lambda$-módulo $N$ y para todo $n \geq 2$.

c) $Tor_1^{\Lambda}(F/\Lambda, N) = 0$ si $N$ es libre de torsión.

**3.5** Calcule explícitamente:

a) $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$.

b) $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n)$.

**3.6** Sea $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos. Sean $P'_{M'}$ y $P''_{M''}$ resoluciones proyectivas reducidas de $M'$ y $M''$, respectivamente. Construya en forma inductiva una resolución proyectiva reducida de $M$ de tal manera que se tenga una sucesión exacta corta que se escinde de resoluciones proyectivas reducidas $P'_{M'} \rightarrowtail P_M \twoheadrightarrow P''_{M''}$.

**3.7** Pruebe que, si $P_M$ y $P_N$ son resoluciones proyectivas reducidas de $\Lambda$-módulos $M$ y $N$, respectivamente, entonces, para toda $n$, se tiene que

$$H_n(P_M \otimes_\Lambda N) \cong H_n(M \otimes_\Lambda P_N).$$

**3.8** Pruebe que, si $\Lambda$ no es necesariamente conmutativo, entonces, para cualesquiera $\Lambda$-módulos $M$ y $N$, se tiene que

$$Tor_n^{\Lambda}(M, N) \cong Tor_n^{\Lambda^o}(N, M), \qquad n \geq 0,$$

donde $\Lambda^o$ es el anillo opuesto de $\Lambda$ definido en el problema I.1.3(c).

## III.4 $\mathrm{EXT}^n_\Lambda$(M,N)

Sea $P_M\colon \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0$ una resolución proyectiva reducida del $\Lambda$-módulo $M$. Sea $N$ un $\Lambda$-módulo y consideremos $Hom_\Lambda(P_M,N)$ que es la sucesión

$$Hom_\Lambda(P_M,N)\colon \cdots \longleftarrow Hom_\Lambda(P_n,N) \overset{Hom_\Lambda(\partial_n,N)}{\longleftarrow} \cdots \longleftarrow$$

$$\longleftarrow Hom_\Lambda(P_1,N) \overset{Hom_\Lambda(\partial_1,N)}{\longleftarrow} Hom_\Lambda(P_0,N) \longleftarrow 0 \ .$$

$Hom_\Lambda(P_M,N)$ resulta ser una sucesión semiexacta pues, para toda $n > 1$,

$$Hom_\Lambda(\partial_n,N) \circ Hom_\Lambda(\partial_{n-1},N) = Hom_\Lambda(\partial_{n-1} \circ \partial_n, N) = Hom_\Lambda(0,N) = 0 \ .$$

Entonces podemos formar el $\Lambda$-módulo graduado

$$H^*(Hom_\Lambda(P_M,N)) = \{H^n(Hom_\Lambda(P_M,N))\}_{n \geq 0}.$$

**4.1 DEFINICION.** Para cada $n \geq 0$, denotaremos $H^n(Hom_\Lambda(P_M,N))$ por $Ext^n_\Lambda(M,N)$, y lo llamaremos *funtor de extensión* de grado $n$ sobre $\Lambda$ de $M$ y $N$.

Es evidente que, si $Q_M$ es otra resolución proyectiva reducida de $M$, entonces
$$H^n(Hom_\Lambda(P_M,N)) \cong H^n(Hom_\Lambda(Q_M,N)),$$
por lo que $Ext^n_\Lambda(M,N)$ depende solamente de $M$, $N$ y $n$.

Lo que hemos hecho es definir $Ext^n_\Lambda(M,N)$ a partir de una resolución proyectiva reducida $P$ de $M$; luego le aplicamos el funtor contravariante $Hom_\Lambda(\_\_,N)$ y finalmente tomamos su cohomología:

$$Ext^n_\Lambda(M,N) = H^n(Hom_\Lambda(M,N)).$$

Sean $f\colon M \longrightarrow M''$ y $g\colon N \longrightarrow N''$ homomorfismos de $\Lambda$-módulos. Sean $P_M$ y $P_{M''}$ resoluciones proyectivas reducidas de $M$ y $M''$, respectivamente. Por 2.4, existe un morfismo de cadenas $\varphi\colon P_M \longrightarrow P_{M''}$ que extiende a $f$. Entonces $Hom_\Lambda(\varphi,g) = \{Hom_\Lambda(\varphi_n,g)\colon Hom_\Lambda(P_{M''_n},N) \longrightarrow Hom_\Lambda(P_{M_n},N'')\}$ es un morfismo de cocadenas que induce un homomorfismo

$$Hom_\Lambda(\varphi,g)^*\colon H^*(Hom_\Lambda(P_{M''},N)) \longrightarrow H^*(Hom_\Lambda(P_M,N'')), \quad \text{i.e.,}$$

$$Hom_\Lambda(\varphi,g)^*\colon Ext^*_\Lambda(M'',N)\longrightarrow Ext^*_\Lambda(M,N'')\ .$$

Este no depende de $\varphi$ (por 2.4), sino exclusivamente de $n$, $f$ y $g$, y lo denotaremos por $Ext^*_\Lambda(f,g)$. Entonces es inmediato el siguiente

**4.2 TEOREMA.** $Ext^n_\Lambda(\_\,,\_)$ es un bifuntor de la categoría de $\Lambda$-módulos en sí misma. Es contravariante en la primera variable y covariante en la segunda.■

Sea $N' \overset{g'}{\rightarrowtail} N \overset{g}{\twoheadrightarrow} N''$ una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos y $P_M$ una resolución proyectiva reducida de $M$. Entonces

$$Hom_\Lambda(P_M,N') \rightarrowtail Hom_\Lambda(P_M,N) \twoheadrightarrow Hom_\Lambda(P_M,N'')$$

es una sucesión exacta corta de cocadenas. Por 1.10 (dual) existe un morfismo

$$\kappa^n\colon H^n(Hom_\Lambda(P_M,N''))\longrightarrow H^{n+1}(Hom_\Lambda(P_M,N'))$$

tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots\longrightarrow H^n(Hom_\Lambda(P_M,N'))\longrightarrow H^n(Hom_\Lambda(P_M,N))\longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^n(Hom_\Lambda(P_M,N''))\xrightarrow{\kappa^n} H^{n+1}(Hom_\Lambda(P_M,N'))\longrightarrow\cdots\ .$$

Entonces, por 4.2, tenemos el siguiente

**4.3 TEOREMA.** Sean $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos y $M$ un $\Lambda$-módulo. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$0\ \longrightarrow\ Ext^0_\Lambda(M,N')\ \longrightarrow\ \cdots\ \longrightarrow\ Ext^n_\Lambda(M,N'')\ \xrightarrow{\kappa^n}$$

$$\xrightarrow{\kappa^n} Ext^{n+1}_\Lambda(M,N')\longrightarrow Ext^{n+1}_\Lambda(M,N)\longrightarrow Ext^{n+1}_\Lambda(M,N'')\longrightarrow\cdots\ .$$

**4.4 TEOREMA.** Sea $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos y $N$ un $\Lambda$-módulo. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$0\ \longrightarrow\ Ext^0_\Lambda(M'',N)\ \longrightarrow\ \cdots\ \longrightarrow\ Ext^n_\Lambda(M',N)\ \xrightarrow{\kappa^n}$$

$$\longrightarrow Ext^{n+1}_\Lambda(M'',N)\longrightarrow Ext^{n+1}_\Lambda(M,N)\longrightarrow Ext^{n+1}_\Lambda(M',N)\longrightarrow\cdots\ .$$

**Demostración.** Utilice los problemas 3.6 y I.5.9 para obtener una sucesión exacta corta de cocadenas

$$0\longrightarrow Hom_\Lambda(P''_{M''},N)\longrightarrow Hom_\Lambda(P_M,N)\longrightarrow Hom_\Lambda(P'_{M'},N)\longrightarrow 0.$$

Luego aplique el dual del Teorema 1.10.■

Sea $I_N$ una resolución inyectiva reducida de un $\Lambda$-módulo $N$,

$$I_N\colon \cdots \longleftarrow I^{n+1} \overset{\delta^{n+1}}{\longleftarrow} I^n \longleftarrow \cdots \longleftarrow I^1 \overset{\delta^1}{\longleftarrow} I^0 \longleftarrow 0\ .$$

Consideremos $Hom_\Lambda(M, I_N)$ para $M$ un $\Lambda$-módulo,

$$Hom_\Lambda(M, I_N)\colon \cdots \longleftarrow Hom_\Lambda(M, I^n) \overset{Hom_\Lambda(1,\delta^n)}{\longleftarrow} \cdots \overset{Hom_\Lambda(1,\delta^1)}{\longleftarrow} Hom_\Lambda(M, I^0) \longleftarrow 0\ .$$

Resulta que $Hom_\Lambda(M, I_N)$ es una sucesión semiexacta cuya cohomología de grado $n$, $H^n(Hom_\Lambda(M, I_N))$ denotaremos por $\overline{Ext}^n_\Lambda(M,N)$.

Esto es, consideramos una resolución inyectiva reducida $I_N$ de $N$, le aplicamos el funtor covariante $Hom_\Lambda(M, \_\_)$ y finalmente tomamos su cohomología:

$$\overline{Ext}^n_\Lambda(M,N) = H^n(Hom_\Lambda(M,N)).$$

Está claro que $H^n(Hom_\Lambda(P,N)) = H^n(Hom_\Lambda(P_M,N))$ y que $H^n(Hom_\Lambda(M,I))$

$= H^n(Hom_\Lambda(M,I_N))$, donde $P$ y $P_M$ son resoluciones proyectiva y proyectiva reducida de $M$; $I$ e $I_N$ son resoluciones inyectiva e inyectiva reducida de $N$.

Dejamos para el lector probar que $Ext^n_\Lambda(M,N) \cong \overline{Ext}^n_\Lambda(M,N)$ (problema 4.6).

**4.5 TEOREMA.** Los funtores $Ext^0_\Lambda(\_\_, N)$ y $\overline{Ext}^0_\Lambda(M, \_\_)$ son equivalentes naturalmente a los funtores $Hom_\Lambda(\_\_, N)$ y $Hom_\Lambda(M, \_\_)$, respectivamente.

**Demostración.** Sea $P_M$ una resolución proyectiva reducida de $M$. Consideremos $Hom_\Lambda(P_M, N)$. Luego, $Ext^0_\Lambda(M,N) = ker(Hom_\Lambda(\partial_1, 1_N))$. Por otro lado, sea $P$ una resolución proyectiva de $M$. Formemos $Hom_\Lambda(P,N)$, donde $im(Hom_\Lambda(\epsilon, 1_N)) = ker(Hom_\Lambda(\partial_1, 1_N))$, pues $Hom_\Lambda(\_\_, N)$ es exacto izquierdo. Luego, $Hom_\Lambda(M,N) \cong Ext^0_\Lambda(M,N)$. Es inmediato comprobar que

$$t_N\colon Hom_\Lambda(M,N) \longrightarrow Ext^0_\Lambda(M,N)$$

es un isomorfismo para toda $N$. Luego, $t$ es una equivalencia natural.

De manera similar, tomando resoluciones inyectivas obtenemos una equivalencia natural entre $\overline{Ext}^0_\Lambda(M, \_\_)$ y $Hom_\Lambda(M, \_\_)$.■

Obsérvese que, debido a 4.5, las sucesiones 4.3 y 4.4 toman la forma siguiente

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N') \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N'') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Ext^1_\Lambda(M,N') \longrightarrow \cdots \longrightarrow Ext^n_\Lambda(M,N'') \longrightarrow \cdots$$

y

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M'',N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M',N) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow Ext^1_\Lambda(M'',N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Ext^n_\Lambda(M',N) \longrightarrow \cdots .$$

Supongamos que tenemos una resolución proyectiva $P$ de longitud $n$ de un $\Lambda$-módulo $M$, apliquémosle el funtor exacto izquierdo $Hom_\Lambda(\_\,,N)$ y obtendremos

$$Hom_\Lambda(P,N)\colon 0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N) \xrightarrow{Hom_\Lambda(\epsilon,1_N)} Hom_\Lambda(P_0,N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$
$$\longrightarrow Hom_\Lambda(P_n,N) \xrightarrow{Hom_\Lambda(\delta^n,1_N)} 0 .$$

Obviamente, $H^m(Hom_\Lambda(P,N)) = Ext^m_\Lambda(M,N) = 0$ para $m > n$. Aún más, como $ker(Hom_\Lambda(\delta^n,1_N)) = Hom_\Lambda(P_n,N)$, tenemos que

$$\begin{aligned} Ext^n_\Lambda(M,N) &= H^n(Hom_\Lambda(P,N)) \\ &= ker(Hom_\Lambda(\delta^n,1_N))/im(Hom_\Lambda(\delta^{n-1},1_N)) \\ &= Hom_\Lambda(P_n,N)/im(Hom_\Lambda(\delta^{n-1},1_N)) \\ &= coker(Hom_\Lambda(\delta^{n-1},1_N)) \end{aligned}$$

En el caso en que $n = 1$, tenemos que, dada una presentación proyectiva $P_1 \rightarrowtail P_0 \twoheadrightarrow M$ de $M$, por I.5.5 se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N) \longrightarrow Hom_\Lambda(P_0,N) \longrightarrow Hom_\Lambda(P_1,N)$$

y, por lo anterior, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M,N) \longrightarrow Hom_\Lambda(P_0,N) \longrightarrow Hom_\Lambda(P_1,N) \longrightarrow Ext^1_\Lambda(M,N) \longrightarrow 0,$$

es decir, $Ext^1_\Lambda(M,N)$ nos repara la inexactitud al formar el módulo de homomorfismos con una resolución proyectiva finita de un $\Lambda$-módulo $M$. Una observación análoga se obtiene para $\overline{Ext}^1_\Lambda(M,\_\,)$.

**4.6 PROPOSICION.**

a) Sea $I$ un $\Lambda$-módulo inyectivo. Entonces $Ext^n_\Lambda(M,I) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $\Lambda$-módulo $M$.

b) Sea $P$ un $\Lambda$-módulo proyectivo. Entonces $Ext^n_\Lambda(P,N) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $\Lambda$-módulo $N$.

**Demostración.** a) Sea $P$ una resolución proyectiva de $M$. Como $P$ es exacta e $I$ es inyectivo, por I.7.5 (iv), se sigue que $Hom_\Lambda(P,I)$ es exacto.

Luego $H^n(Hom_\Lambda(P,I)) = 0$ para $n \geq 1$ y por lo tanto $Ext^n_\Lambda(M,I) = 0$ para $n \geq 1$. La demostracion de b) es análoga por I.6.11(iv).■

## PROBLEMAS

**4.1** Escriba con detalle la demostración del teorema 4.2.

**4.2** Pruebe que $Ext^0_\Lambda(M, \_\_)$ y $Hom_\Lambda(M, \_\_)$ son funtores equivalentes naturalmente.

**4.3** Pruebe que $Ext^n_\Lambda(P,N) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y todo $\Lambda$-módulo $N$ donde $P$ es un $\Lambda$-módulo proyectivo.

**4.4** Demuestre que $Ext^n_\Lambda(\bigoplus M_m, N) \cong \prod Ext^n_\Lambda(M_m, N)$ para toda $n \geq 0$. (Sugerencia: utilice inducción sobre $n$).

**4.5** Demuestre que $Ext^n_\Lambda(M, \prod N_m) \cong \prod Ext^n_\Lambda(M, N_m)$ para toda $n \geq 0$.

**4.6** Sea $I_N$ una resolución inyectiva reducida de $N$ y $P_M$ una resolución proyectiva reducida de $M$. Demuestre que

$$H^n(Hom_\Lambda(P_M, N)) \cong H^n(Hom_\Lambda(M, I_N))$$

para toda $n \geq 0$. Luego, podemos decir que

$$Ext^n_\Lambda(M,N) \cong \overline{Ext}^n_\Lambda(M,N).$$

## III.5 FUNTORES DERIVADOS

Para esta sección, sea $\Lambda$ un anillo no necesariamente conmutativo con $1 \neq 0$ y $\mathbf{Mod}_\Lambda$ una categoría de $\Lambda$-módulos izquierdos o derechos.

**5.1 DEFINICION.** Sea $F$ un funtor covariante aditivo de la categoría de $\Lambda$-módulos $\mathbf{Mod}_\Lambda$ en la categoría de grupos abelianos $\mathbf{Ab}$. El *funtor derivado izquierdo* de grado $n$ de $F$ es

$$L_nF(M) = H_n(F(P_M))$$

donde $P_M$ es una resolución proyectiva reducida del $\Lambda$-módulo $M$, $n{=}1, 2, \ldots$.

Hemos definido, para cada funtor covariante aditivo $F$, una sucesión de funtores, también de la categoría de $\Lambda$-módulos en la categoría de grupos abelianos. Dichos funtores se calculan tomando una resolución proyectiva reducida de un $\Lambda$-módulo, aplicándole a dicha resolución el funtor $F$ y después tomando su homología; i.e., si $P_M$ es una resolución proyectiva reducida de $M$

$$P_M\colon \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0\ ,$$

$$F(P_M)\colon \cdots \longrightarrow F(P_n) \xrightarrow{F(\partial_n)} F(P_{n-1}) \xrightarrow{F(\partial_{n-1})} \cdots \longrightarrow F(P_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(P_0) \longrightarrow 0\ ,$$

luego, $L_nF(M) = H_n(F(P_M)) = ker\ F(\partial_n)/im\ F(\partial_{n+1})$ .

Por ejemplo: sea $F$ el funtor covariante aditivo $\_ \otimes_\Lambda N$ y sea $P_M$ una resolución proyectiva reducida de un $\Lambda$-módulo $M$, i.e.

$$P_M\colon \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0.$$

Apliquémosle $\_ \otimes_\Lambda N$ y obtendremos

$$P_M \otimes_\Lambda N\colon \cdots \longrightarrow P_n \otimes_\Lambda N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_\Lambda N.$$

Luego, $L_n(\_ \otimes_\Lambda N) = H_n(P_M \otimes_\Lambda N)$, que definimos en 3.1 como $Tor_n^\Lambda(\_, N)$.

Decimos que $Tor_n^\Lambda(\_, N)$ es el *funtor derivado izquierdo de grado* $n$ del funtor covariante aditivo $\_ \otimes_\Lambda N$.

Del mismo modo que $Tor_n^\Lambda(\_, N)$ no depende de la resolución proyectiva de $M$, podemos establecer la siguiente

**5.2 PROPOSICION.** $L_n(F(M))$ no depende de la resolución proyectiva reducida de $M$.■

**5.3 PROPOSICION.** Para cada $n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $L_n F\colon \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor aditivo.

**Demostración.** Sean $P_M$ y $Q_N$ resoluciones proyectivas reducidas de $M$ y $N$, respectivamente. Entonces

$$P_M \oplus Q_N\colon \cdots \longrightarrow P_n \oplus Q_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \oplus Q_0 \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva reducida de $M \oplus N$. Luego, $F(P_M \oplus Q_N) = F(P_M) \oplus F(Q_N)$, pues $F$ es un funtor aditivo. Entonces

$$\begin{aligned} L_n(F(M \oplus N)) &= H_n(F(P_M \oplus Q_N)) \\ &= H_n(F(P_M)) \oplus H_n(F(Q_N)) \\ &= L_n(F(M)) \oplus L_n(F(N)).\blacksquare \end{aligned}$$

De manera análoga a 3.3, tenemos la siguiente

**5.4 PROPOSICION.** Sea $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos y $F$ un funtor covariante aditivo de la categoría de $\Lambda$-módulos en la categoría de grupos abelianos. Entonces, existe un homomorfismo $\kappa_n\colon L_n F(M'') \longrightarrow L_{n-1} F(M')$ para $n = 1, 2, \ldots$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow L_n F(M') \longrightarrow L_n F(M) \longrightarrow L_n F(M'') \xrightarrow{\kappa_n}$$

$$\xrightarrow{\kappa_n} L_{n-1} F(M') \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 F(M'') \longrightarrow 0 \ .$$

**Demostración.** En el problema 3.6 se establece el hecho de que podemos obtener inductivamente una sucesión exacta corta de resoluciones proyectivas reducidas $P'_{M'} \rightarrowtail P_M \twoheadrightarrow P''_{M''}$. Como $F$ es covariante aditivo y

$$P_n = P'_n \oplus P''_n \text{ para cada } n \geq 0,\ F(P'_{M'}) \rightarrowtail F(P_M) \twoheadrightarrow F(P''_{M''})$$

es una sucesión exacta corta. Aplicando 1.10, obtenemos lo requerido.$\blacksquare$

Queda claro que $\kappa_n$ no depende de las resoluciones proyectivas reducidas tomadas ni de $f'$ y $f$. Solamente depende de la sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos dada.

Veamos algunas propiedades de los funtores derivados.

**5.5 TEOREMA.** Si $P$ es un $\Lambda$-módulo proyectivo, entonces $L_n F(P) = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ , y $L_0(F(P)) = F(P)$.

**Demostración.** Sea $Q_P\colon \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_0 = P \longrightarrow 0$ una resolución proyectiva reducida de $P$. Luego, $H_n(F(Q_P)) = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, y $H_0(F(Q_P)) = F(P_0)$.∎

**5.6 TEOREMA.** Sea $F$ un funtor covariante aditivo exacto derecho. Entonces $L_0F$ es equivalente naturalmente a $F$.

**Demostración.** Sea

$$P\colon \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

una resolución proyectiva de $M$. Luego,

$$F(P)\colon \cdots \longrightarrow F(P_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0$$

es exacta. Por lo tanto, $H_0(F(P)) \cong F(M)$. El isomorfismo es natural.∎

A continuación, veamos los funtores derivados derechos de un funtor covariante $F$.

**5.7 DEFINICION.** Sea $F\colon \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un funtor covariante aditivo. El *funtor derivado derecho* de grado $n$ de $F$ es

$$R^nF(N) = H^n(F(I_N))$$

donde $I_N$ es una resolución inyectiva del $\Lambda$-módulo $N$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ .

Hemos definido, para cada funtor covariante aditivo $F$, una sucesión de funtores, también de la categoría de $\Lambda$-módulos en la categoría de grupos abelianos. Calculamos dichos funtores tomando, primero, una resolución inyectiva reducida de un $\Lambda$-módulo $N$,

$$I_N\colon 0 \longrightarrow I_1 \xrightarrow{\delta^1} I_2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \longrightarrow I_n \xrightarrow{\delta^n} \cdots$$

después le aplicamos $F$,

$$F(I_N)\colon 0 \longrightarrow F(I_1) \xrightarrow{F(\delta^1)} F(I_2) \xrightarrow{F(\delta^2)} \cdots \longrightarrow F(I_n) \xrightarrow{F(\delta^n)} \cdots$$

y finalmente tomamos su cohomología

$$H^n(F(I_N)) = ker\ F(\delta^n)/im\ F(\delta^{n-1}) = R^nF(N).$$

Por ejemplo: sea $F$ el funtor covariante aditivo $Hom_\Lambda(M, \_\_)$ y sea $I_N$ una resolución inyectiva reducida de un $\Lambda$-módulo $N$,

$$I_N\colon 0 \longrightarrow I_1 \xrightarrow{\delta^1} I_2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \longrightarrow I_n \xrightarrow{\delta^n} \cdots$$

Apliquémosle $Hom_\Lambda(M, \_\_)$, y obtendremos

$$Hom_\Lambda(M, I_N)\colon 0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M, I_1) \longrightarrow Hom_\Lambda(M, I_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Hom_\Lambda(M, I_n) \longrightarrow \cdots \ .$$

Luego, $R^n(Hom_\Lambda(M, \_\_)) = H^n(Hom_\Lambda(M, I_N))$, el cual definimos en la sección 4 como $\overline{Ext}^n_\Lambda(M, \_\_)$.

Decimos que $\overline{Ext}^n_\Lambda(M, \_\_)$ es el *funtor derivado derecho* de grado $n$ del funtor covariante aditivo $Hom_\Lambda(M, \_\_)$.

De manera semejante a 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6, tenemos el siguiente teorema:

**5.8 TEOREMA.** Sea $F\colon \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un funtor covariante aditivo. Entonces

(i) $R^nF(N)$ no depende de la resolución inyectiva reducida de $N$.

(ii) Para cada $n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $R^nF\colon \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor aditivo.

(iii) Si $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ es una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos, existe un homomorfismo $\kappa^n\colon R^nF(N'') \longrightarrow R^{n+1}F(N')$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow R^0F(N') \longrightarrow R^0F(N) \longrightarrow R^0F(N'') \xrightarrow{\kappa^0}$$
$$\longrightarrow R^1F(N') \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^nF(N'') \xrightarrow{\kappa^n} \cdots \ .$$

(iv) Si $I$ es un $\Lambda$-módulo inyectivo, $R^nF(I) = 0$ para $n \geq 1$, y $R^0F(I) = F(I)$.

(v) $R^0F$ es equivalente naturalmente a $F$ si $F$ es exacto izquierdo.

Ahora, consideremos los funtores derivados de un funtor contravariante aditivo $G\colon \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

**5.9 DEFINICION.** Sea $G\colon \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un funtor contravariante aditivo. El *funtor derivado derecho de grado* $n$ de $G$ es

$$R^nG(M) = H^n(G(P_M))$$

donde $P_M$ es una resolución proyectiva reducida del $\Lambda$-módulo $M$,
$n = 0, 1, 2, \ldots$ .

Por ejemplo: sea $G$ el funtor contravariante aditivo $Hom_\Lambda(\_\_,N)$ y sea $P_M$ una resolución proyectiva reducida de un $\Lambda$-módulo $M$,

$$P_M\colon \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0\ .$$

Apliquémosle $Hom_\Lambda(\_\_,N)$ y obtendremos

$$Hom_\Lambda(P_M,N)\colon \cdots \longleftarrow Hom_\Lambda(P_n,N) \longleftarrow \cdots \longleftarrow Hom_\Lambda(P_0,N) \longleftarrow 0\ .$$

Luego, $R^n(Hom_\Lambda(\_\_,N)) = H^n(Hom_\Lambda(P_M,N))$, que definimos en 4.1 como $Ext^n_\Lambda(\_\_,N)$.

Tenemos el siguiente teorema.

**5.10 TEOREMA.** Sea $G\colon \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un funtor contravariante aditivo. Entonces

(i) $R^nG(M)$ no depende de la resolución proyectiva reducida de $M$.

(ii) Para cada $n$, $n = 0,1,2,\ldots,$ $R^nG\colon \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor aditivo.

(iii) Si $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ es una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos existe un homomorfismo $\kappa^n\colon R^nG(M') \longrightarrow R^{n+1}G(M'')$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow R^0G(M'') \longrightarrow R^0G(M) \longrightarrow R^0G(M') \xrightarrow{\kappa^0}$$
$$\longrightarrow R^1G(M'') \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^nG(M') \xrightarrow{\kappa^n} \cdots\ .$$

(iv) Si $P$ es un $\Lambda$-módulo proyectivo, $R^nG(P) = 0$ para $n \geq 1$ y $R^0G(P) = G(P)$.

(v) $R^0G$ es equivalente naturalmente a $G$ si $G$ es exacto izquierdo.■

De igual manera, se puede definir el funtor derivado izquierdo de grado $n$ de un funtor contravariante $G$.

## PROBLEMAS

**5.1** Defina $L_nG$ para $G$ un funtor contravariante.

**5.2** Una sucesión de funtores aditivos de $\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$

$$F' \xrightarrow{t} F \xrightarrow{t'} F''$$

y transformaciones naturales $t$ y $t'$ es *exacta en módulos proyectivos*, si para todo $\Lambda$-módulo proyectivo $P$, la siguiente sucesión es exacta:

$$F'P \rightarrowtail FP \twoheadrightarrow F''P.$$

Pruebe que, si $F' \longrightarrow F \longrightarrow F''$ es una sucesión exacta en módulos proyectivos, entonces, para todo $\Lambda$-módulo $M$ existe un homomorfismo

$$\kappa_n : L_n F'' M \longrightarrow L_{n-1} F' M$$

tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow L_n F' M \xrightarrow{t} L_n F M \xrightarrow{t'} L_n F'' M \xrightarrow{\kappa_n}$$

$$\longrightarrow L_{n-1} F' M \xrightarrow{t} \cdots \xrightarrow{t'} L_0 F'' M \longrightarrow 0 \ .$$

**5.3** Pruebe el teorema 5.10.

**5.4** Demuestre que, si $K_n \overset{i_n}{\rightarrowtail} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos con $P_i$ proyectivo para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, y si $F\colon \mathbf{Mod}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor covariante exacto derecho, entonces, para $n \geq 1$, la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow L_n F(M) \longrightarrow F(K_n) \xrightarrow{i_{n*}} F(P_{n-1}).$$

(Utilice I.3.9.)

**5.5** Defina el funtor derivado izquierdo de un funtor contravariante y establezca un teorema análogo al 5.10.

**5.6** Demuestre que, si $P\colon \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow 0$ es una resolución proyectiva de $M$, y $K_n = ker\ \partial_n$, entonces, si $F$ es covariante aditivo,

$$L_{n+1}F(M) \cong L_n F(K_0) \cong L_{n-1} F(K_1) \cong \cdots \cong L_1 F(K_{n-1}).$$

## III.6 TORSION Y EXTENSIONES

Si $\Lambda$ es un dominio entero, un elemento $x$ de un $\Lambda$-módulo $N$ es un *elemento de torsión* de $N$ si, y sólo si, existe un elemento $\alpha \in \Lambda$ diferente de cero tal que $\alpha x = 0$. El conjunto de elementos de torsión forma un submódulo $\mathcal{T}N$ de $N$ llamado *submódulo de torsión* de $N$ (véase el problema I.1.4).

También definimos (problema I.1.5) un $\Lambda$-*módulo de torsión* $N$ como aquel tal que $\mathcal{T}N = N$, y un $\Lambda$-*módulo libre de torsión* como el $\Lambda$-módulo $N$ tal que $\mathcal{T}N = 0$. Recordemos (problema I.2.7) que $N/\mathcal{T}N$ es un $\Lambda$-módulo libre de torsión (y, por lo tanto, todo módulo sobre un dominio entero es una extensión de su submódulo de torsión por un módulo libre de torsión).

Podemos considerar $\mathcal{T}\,\_$ como un funtor de la categoría de $\Lambda$-módulos en la categoría de $\Lambda$-módulos de torsión, donde, si $\varphi\colon N \longrightarrow N''$, entonces $\mathcal{T}_\varphi\colon \mathcal{T}N \longrightarrow \mathcal{T}N''$ está dado por $\mathcal{T}_\varphi = \varphi|_{\mathcal{T}N}$, $\Lambda$ un dominio entero.

Sea $\Lambda$ un dominio entero y $F$ su campo de fracciones o campo de cocientes. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow F \longrightarrow F/\Lambda \longrightarrow 0.$$

Veamos que existe una equivalencia natural entre los funtores $\mathcal{T}\,\_$ y $Tor_1^\Lambda(F/\Lambda, \_)$ para $\Lambda$ un dominio entero.

**6.1 TEOREMA.** Los funtores $\mathcal{T}\,\_$ y $Tor_1^\Lambda(F/\Lambda, \_)$ son equivalentes naturalmente si $\Lambda$ es un dominio entero.

**Demostración.** Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}N \xrightarrow{\iota} N \longrightarrow N/\mathcal{T}N \longrightarrow 0.$$

Por 3.3, existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow Tor_2^\Lambda(F/\Lambda, \mathcal{T}N) \longrightarrow Tor_2^\Lambda(F/\Lambda, N) \longrightarrow Tor_2^\Lambda(F/\Lambda, N/\mathcal{T}N)$$

$$\longrightarrow Tor_1^\Lambda(F/\Lambda, \mathcal{T}N) \xrightarrow{Tor_1^\Lambda(1_{F/\Lambda},\iota)} Tor_1^\Lambda(F/\Lambda, N) \longrightarrow Tor_1^\Lambda(F/\Lambda, N/\mathcal{T}N) \longrightarrow \cdots$$

Por el problema 3.4, $Tor_2^\Lambda(F/\Lambda, N/\mathcal{T}N) = 0 = Tor_1^\Lambda(F/\Lambda, N/\mathcal{T}N)$. Luego, $Tor_1^\Lambda(1_{F/\Lambda}, \iota)$ es isomorfismo, i.e., $\mathcal{T}N \cong Tor_1^\Lambda(F/\Lambda, N)$. Es inmediato comprobar la equivalencia natural.■

El teorema precedente justifica en parte la definición de $Tor$. Otras justificaciones son los siguientes resultados:

**6.2 LEMA.** Si $N$ es un $\Lambda$-módulo de torsión y $\Lambda$ un dominio entero, entonces $Tor_n^\Lambda(M,N)$ es un $\Lambda$-módulo de torsión para todo $\Lambda$-módulo $M$ y $n \geq 0$.

**Demostración.** Para $n=0$, $Tor_0^\Lambda(M,N) = M \otimes_\Lambda N$ es de torsión, pues cada generador es de torsión (véase el problema I.8.15). Si $n=1$, existe una presentación proyectiva de $M$,

$$M' \rightarrowtail P \twoheadrightarrow M.$$

Por 3.4, existe una sucesión exacta larga

$$\begin{gathered}\cdots \longrightarrow Tor_{n+1}^\Lambda(M',N) \longrightarrow Tor_{n+1}^\Lambda(P,N) \longrightarrow Tor_{n+1}^\Lambda(M,N) \longrightarrow \\ \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M',N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(P,N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow Tor_1^\Lambda(M',N) \longrightarrow Tor_1^\Lambda(P,N) \longrightarrow Tor_1^\Lambda(M,N) \longrightarrow \\ \longrightarrow M' \otimes_\Lambda N \longrightarrow P \otimes_\Lambda N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0 \ .\end{gathered}$$

Como $P$ es proyectivo, $Tor_n^\Lambda(P,N) = 0$ para $n > 0$. Por el problema I.8.15, $M' \otimes_\Lambda N$ es de torsión y, por lo tanto, su submódulo $Tor_1^\Lambda(M,N)$ es de torsión. Por inducción, si $Tor_n^\Lambda(M',N)$ es de torsión, como $Tor_n^\Lambda(M',N) \cong Tor_{n+1}^\Lambda(M,N)$, $Tor_{n+1}^\Lambda(M,N)$ es de torsión.■

**6.3 PROPOSICION.** Si $\Lambda$ es un dominio entero, entonces $Tor_n^\Lambda(M,N)$ es un $\Lambda$-módulo de torsión para toda $n \geq 1$.

**Demostración.** Véase el problema 6.3.■

Consideremos el siguiente problema: sean $M'$ y $M''$ dos $\Lambda$-módulos. ¿Cuáles son los $\Lambda$-módulos $M$ tales que $M'$ sea un submódulo de $M$ y $M''$ sea su módulo cociente? Equivalentemente, ¿cuáles son los $\Lambda$-módulos $M$ tales que la sucesión $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ es exacta? Encontrar o clasificar dichos $\Lambda$-módulos $M$ constituye lo que se conoce como el *problema de extensión* de $\Lambda$-módulos.

**6.4 DEFINICION.** Una *extensión* de $M'$ por $M''$ es una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos

$$E \colon M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''.$$

**6.5 DEFINICION.** Sean $M' \rightarrowtail M_1 \twoheadrightarrow M''$ y $M' \rightarrowtail M_2 \twoheadrightarrow M''$ dos extensiones de $M'$ por $M''$. Diremos que son *equivalentes* si existe un homomorfismo $\psi: M_1 \longrightarrow M_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} M' & \rightarrowtail & M_1 & \twoheadrightarrow & M'' \\ {\scriptstyle 1_{M'}}\downarrow & & {\scriptstyle \psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{M''}} \\ M' & \rightarrowtail & M_2 & \twoheadrightarrow & M'' \end{array}$$

Nótese que, por I.3.8, $\psi$ debe ser un isomorfismo, y que dicha relación es de equivalencia. Denotemos con $Ex(M'', M')$ el conjunto de clases de equivalencia de extensiones de $M'$ por $M''$ y por $E$ un elemento. Obsérvese que $Ex(M'', M')$ no es vacío, pues contiene a la clase de equivalencia de la extensión $M' \rightarrowtail M' \oplus M'' \twoheadrightarrow M''$ que llamaremos *extensión escindible* de $M'$ por $M''$, pues las composiciones $M' \longrightarrow M' \oplus M''$ y $M' \oplus M'' \longrightarrow M'$ así como $M'' \longrightarrow M' \oplus M''$ y $M' \oplus M'' \longrightarrow M''$ son la identidad en $M'$ y $M''$, respectivamente.

Sean $f, g \in Hom_\Lambda(M, N)$ dos homomorfismos de $\Lambda$-módulos. Denotemos con $\triangle_M: M \longrightarrow M \oplus M$ el homomorfismo *diagonal* dado por $\triangle_M(x) = (x, x)$ y con $\triangledown_N: N \oplus N \longrightarrow N$ el homomorfismo *codiagonal* dado por $\triangledown_N(y, y') = y + y'$. Entonces, otra forma de escribir $f+g$ es $\triangledown_N(f \oplus g)\triangle_M$, pues $(f+g)(x) = \triangledown_N(f \oplus g)\triangle_M(x) = \triangledown_N(f \oplus g)(x, x) = \triangledown_N(f(x), g(x)) = f(x) + g(x)$.

Sean $E_1: M' \rightarrowtail M_1 \twoheadrightarrow M''$ y $E_2: M' \rightarrowtail M_2 \twoheadrightarrow M''$ dos extensiones de $M'$ por $M''$. Definamos su suma como la extensión

$$E_1 \oplus E_2: M' \oplus M' \rightarrowtail M_1 \oplus M_2 \twoheadrightarrow M'' \oplus M''.$$

Sean $\triangledown_{M''}: M'' \oplus M'' \longrightarrow M''$ y $\triangle_{M'}: M' \longrightarrow M' \oplus M'$ homomorfismos dados por $\triangledown_{M''}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ y $\triangle_{M'}(y) = (y, y)$. Definimos la suma de dos elementos de $Ex(M'', M')$ como

$$E_1 + E_2 = \triangledown_{M'}(E_1 \oplus E_2)\triangle_{M''}$$

llamada la *suma de Baer*. Tenemos la siguiente proposición:

**6.6 PROPOSICION.** $Ex(M'', M')$ posee una estructura de grupo abeliano bajo la suma de Baer cuyo elemento neutro es la clase de la extensión escindible.

**Demostración.** Véase el problema 6.4.■

**6.7 TEOREMA.** Los grupos $Ex(M'', M')$ y $Ext^1_\Lambda(M'', M')$ son isomorfos.

**Demostración.** Sea $P$ una resolución proyectiva de $M''$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} P\colon\cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{M''}} & & \\ E_M\colon & & 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Aplicando 2.4, vemos que existen los homomorfismos $\varphi_i$ de $P\longrightarrow E_M$ tales que el diagrama conmuta. Obsérvese que $\varphi_1 \circ \partial_2 = 0$.

Apliquemos $Hom_\Lambda(\_\_, M')$ a $P$ y obtendremos

$$Hom_\Lambda(P, M')\colon \cdots \longleftarrow Hom_\Lambda(P_2, M') \overset{Hom_\Lambda(\partial_2, 1_{M'})}{\longleftarrow} Hom_\Lambda(P_1, M') \overset{Hom_\Lambda(\partial_1, 1_{M'})}{\longleftarrow}$$
$$\longleftarrow Hom_\Lambda(P_0, M') \overset{Hom_\Lambda(\epsilon, 1_{M'})}{\longleftarrow} Hom_\Lambda(M'', M') \longleftarrow 0 \ .$$

Luego,

$$\begin{aligned} H^1(Hom_\Lambda(P, M')) &= Ext^1_\Lambda(M'', M') \\ &= ker(Hom_\Lambda(\partial_2, 1_{M'}))/im(Hom_\Lambda(\partial_1, 1_{M'})). \end{aligned}$$

Pero, como $Hom_\Lambda(\partial_2, 1_{M'})(\varphi_1) = \varphi_1 \circ \partial_2 = 0$, $\varphi_1 \in ker(Hom_\Lambda(\partial_2, 1_{M'}))$.

Como $\varphi_1$ es única, salvo homotopía, $E_M$ determina un elemento único en $Ext^1_\Lambda(M'', M')$. Es inmediato comprobar que, si $E_{M_1}$ es equivalente a $E_{M_2}$, ambos determinan el mismo elemento en $Ext^1_\Lambda(M'', M')$. Por lo tanto, podemos definir una función

$$\eta\colon Ex(M'', M') \longrightarrow Ext^1_\Lambda(M'', M')$$

mediante $\eta(E_M) = \varphi_1 + im(Hom_\Lambda(\partial_1, 1_{M'}))$.

Construyamos un inverso $\rho$ de $\eta$: sea $\varphi_1\colon P_1 \longrightarrow M'$ un elemento del $ker(Hom_\Lambda(\partial_2, 1_{M'}))$, es decir, $\varphi_1 \circ \partial_2 = 0$. Entonces $\varphi_1$ induce

$$\varphi_1'\colon P_1/im\ \partial_2 \longrightarrow M' \text{ dada por } \varphi_1'(x + im\ \partial_2) = \varphi_1(x).$$

Consideremos la extensión

$$E_{P_0}\colon P_1/im\ \partial_2 \rightarrowtail P_0 \twoheadrightarrow M''.$$

Definamos $\rho(\varphi_1 + im(Hom_\Lambda(\partial_1, 1_{M'})))$ como el coproducto fibrado $M' \vee P_0$ (véase el problema II.3.11). Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1/im\ \partial_2 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1'} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{M''}} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M' \vee P_0 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Se puede comprobar que $\rho$ no depende del representante $\varphi_1$, que $\eta\rho = 1$ y que $\rho\eta = 1$. (problema 6.5.)■

A continuación, veamos algunos ejemplos.

**6.8 EJEMPLO.** Sea $E_M\colon M' \overset{f'}{\rightarrowtail} M \overset{f}{\twoheadrightarrow} M''$ una extensión de $M'$ por $M''$. Consideremos

$$Hom_\Lambda(E_M, M')\colon \cdots \longleftarrow Hom_\Lambda(M', M') \overset{Hom_\Lambda(f', 1_{M'})}{\longleftarrow}$$

$$Hom_\Lambda(M, M') \overset{Hom_\Lambda(f, 1_{M'})}{\longleftarrow} Hom_\Lambda(M'', M') \longleftarrow 0 \ .$$

Como vimos en la sección 4, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M'', M') \longrightarrow Hom_\Lambda(M, M') \longrightarrow Hom_\Lambda(M', M') \longrightarrow Ext^1_\Lambda(M'', M').$$

Supongamos que $Ext^1_\Lambda(M'', M')$ es cero. Entonces $Hom_\Lambda(f', 1_{M'})$ es un epimorfismo. Luego, existe $g' \in Hom_\Lambda(M, M')$ tal que

$$Hom_\Lambda(f', 1_{M'})(g') = g'f' = 1_{M'} \ .$$

Por lo tanto, si $Ext^1_\Lambda(M'', M') = 0$, entonces cualquier extensión de $M'$ por $M''$ se escinde.

Inversamente, si toda extensión de $M'$ por $M''$ se escinde y cualesquiera dos extensiones de $M'$ por $M''$ son equivalentes (véase el problema 6.6), $Ex(M'', M')$ consta de un solo elemento y, por 6.7, $Ext^1_\Lambda(M'', M') = 0$.

**6.9 EJEMPLO.** Sea $\Lambda = \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ es proyectivo, por 4.6(b), para $n \geq 1$

$$Ext^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \quad y \quad Ext^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n) = 0$$

i.e., para $n = 1$ las extensiones de $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Z}/n$ por $\mathbb{Z}$ se escinden y contienen un solo elemento.

**6.10 EJEMPLO.** Consideremos la presentación proyectiva de $\mathbb{Z}/n$

$$\mathbb{Z} \overset{f'}{\rightarrowtail} \mathbb{Z} \overset{f}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/n \ ,$$

donde $f'$ es la multiplicación por $n$. Apliquémosle los funtores

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\_\,, \mathbb{Z}) \ , \ Hom_{\mathbb{Z}}(\_\,, \mathbb{Z}/m)$$

y obtendremos

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \stackrel{Hom_{\mathbb{Z}}(f', 1_{\mathbb{Z}})}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \ .$$

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m) \stackrel{Hom_{\mathbb{Z}}(f', 1_{\mathbb{Z}/m})}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m) \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) \longrightarrow 0 \ .$$

Utilizando el problema I.5.4, dichas sucesiónes se convierten, respectivamente, en

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \stackrel{Hom_{\mathbb{Z}}(f', 1_{\mathbb{Z}})}{\longrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad \text{y}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/(n,m)\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m \stackrel{Hom_{\mathbb{Z}}(f', 1_{\mathbb{Z}/m})}{\longrightarrow} \mathbb{Z}/m \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) \longrightarrow 0 \ .$$

Como $im(Hom_{\mathbb{Z}}(f', 1_{\mathbb{Z}})) = n\mathbb{Z} = im(Hom_{\mathbb{Z}}(f', 1_{\mathbb{Z}/m})$, tenemos que

$$Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n \text{ y } Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) = (\mathbb{Z}/m)/(\mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/(n,m)\mathbb{Z} \ .$$

**6.11 EJEMPLO.** Utilizando los problemas 4.4, 4.5 y el teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados, junto con los ejemplos 6.9 y 6.10 se puede calcular completamente $Ext^1_{\Lambda}(M'', M')$ para los $\mathbb{Z}$-módulos finitamente generados $M''$ y $M'$.

## PROBLEMAS

**6.1** Demuestre que si $\Lambda$ es un dominio entero y $N$ un $\Lambda$-módulo, entonces existe una sucesión exacta

$$\mathcal{T}N \rightarrowtail N \longrightarrow F \otimes_{\Lambda} N \twoheadrightarrow (F/\Lambda) \otimes_{\Lambda} N$$

donde $F$ es el campo de cocientes de $\Lambda$.

**6.2** Pruebe que un $\Lambda$-módulo $N$ sobre un dominio entero $\Lambda$ es de torsión si, y sólo si, $F \otimes_{\Lambda} N = 0$, donde $F$ es el campo de cocientes de $\Lambda$.

**6.3** Utilizando el problema 6.1 y el Lema 6.2, pruebe que $Tor^{\Lambda}_n(M, N)$ es un $\Lambda$-módulo de torsión para toda $n \geq 1$, $\Lambda$ un dominio entero.

**6.4** Demuestre la proposición 6.6.

**6.5** Complete los detalles del Teorema 6.7.

**6.6** Demuestre que dos extensiones escindibles cualesquiera son equivalentes.

**6.7** Sea $G$ un grupo y $N$ un $G$-módulo. Una *$n$-extensión cruzada de $N$ por $G$* ($n \geq 1$) es una sucesión exacta de grupos

$$(H,\partial)\colon 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\gamma} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} H \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

tal que

(i) $(C_1, H, \partial_1)$ es un módulo cruzado,

(ii) $C_j$ es un $G$-módulo ($1 < j < n$) y

(iii) $\partial_j$ y $\gamma$ son homomorfismos de $G$-módulos.

Compruebe que las siguientes son $n$-extensiones cruzadas:

a) $0 \longrightarrow N \xrightarrow{1_N} N \longrightarrow G \xrightarrow{1_G} G \longrightarrow 1$, donde $G$ es un grupo y $N$ un $G$-módulo.

b) $(Aut(K),\partial)\colon 0 \longrightarrow Z(K) \longrightarrow K \longrightarrow Aut(K) \longrightarrow Aut(K)/Int(K) \longrightarrow 1$, donde $K$ es un grupo e $Int(K)$ es el subgrupo de automorfismos interiores de $K$. (Un automorfismo $\alpha$ de $K$ se llama *interior* si es conjugación por un elemento de $K$, es decir $\alpha(x) = kxk^{-1}$ para alguna $k \in K$).

Observe que las $n$-extensiones cruzadas son casos particulares de resoluciones cruzadas (problema III.2.6) para las cuales $C_i = 0$ si $i > n$.

**6.8** Un *morfismo* $(\sigma,\alpha,\varphi)\colon (H,\partial) \longrightarrow (H',\partial')$ *de $n$-extensiones cruzadas* consiste en homomorfismos de grupos

$\varphi\colon G \longrightarrow G'$

$\alpha_0\colon H \longrightarrow H'$

$\alpha_k\colon C_k \longrightarrow C'_k \qquad (i \leq k \leq n)$

$\sigma\colon N \longrightarrow N'$

tales que:

(i) hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
(H,\partial)\colon 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\
(H',\partial')\colon 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

(ii) $(\alpha_1, \alpha_0)$ es un morfismo de módulos cruzados y

$$\alpha_k({}^g c) = {}^{\varphi(g)}\, \alpha_k(c) \qquad (1 < k < n),\ c \in C_k$$
$$\sigma({}^g a) = {}^{\varphi(g)}\, \sigma(a) \qquad (g \in G,\ a \in N).$$

El conjunto de todas las $n$-extensiones cruzadas de $N$ por $G$ se denotará con $Xext^n(G, N)$.

Pruebe que, si $(H', \partial) \in Xext^n(G', N)$, entonces el homomorfismo de grupos $\varphi\colon G \longrightarrow G'$ induce un morfismo

$$(\sigma, \alpha, \varphi)\colon P^n \longrightarrow (H', \partial)$$

de $n$-extensiones cruzadas, donde $P^n$ es una $n$-extensión cruzada libre (proyectiva) (véase el problema III.2.8). (Sugerencia: utilice el problema III.2.7(b).)

**6.9** Sean $(H, \partial) \in Xext^n(G, N)$ y $(H', \partial') \in Xext^n(G', N')$. Dados dos morfismos

$$(\sigma, \alpha, \varphi), (\tau, \beta, \varphi)\colon (H, \partial) \longrightarrow (H', \partial')$$

con el mismo homomorfismo $\varphi$ en el extremo derecho, se define una *homotopía de $n$-extensiones cruzadas* como una familia de funciones $\Sigma = \{\Sigma_k\}$, $0 \leq k \leq n-1$ que satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) del problema III.2.9.

a) Sea $P^n$ una $n$-extensión cruzada libre (proyectiva) con $G = coker\ \partial_1$ (véase el problema III.2.8), y sea $(H, \partial) \in Xext^n(G', N)$. Si

$$(\sigma, \alpha, \varphi), (\tau, \beta, \varphi)\colon P^n \longrightarrow (H, \partial)$$

son morfismos de $n$-extensiones cruzadas con el mismo morfismo $\varphi\colon G \longrightarrow G'$, pruebe que existe una homotopía $\Sigma\colon (\sigma, \alpha, \varphi) \sim (\tau, \beta, \varphi)$.

b) Pruebe que el conjunto $Hom(G, G')$ clasifica las clases de homotopía de morfismos $(\sigma, \alpha, \varphi)\colon P^n \longrightarrow (H, \partial)$ con el mismo morfismo $\varphi\colon G \longrightarrow G'$. (Sugerencia: utilice (a) y el problema III.6.8.)

**6.10** Dos complejos cruzados $C$ y $C'$ son del mismo *tipo de homotopía* u *homotópicamente equivalentes* si existen morfismos $\alpha\colon C \longrightarrow C'$ y $\beta\colon C' \longrightarrow C$ tales que $\beta\alpha \sim 1_C$ y $\alpha\beta \sim 1_{C'}$. Pruebe que cualesquiera dos resoluciones cruzadas libres (proyectivas) de un grupo $G$ son del mismo tipo de homotopía.

**6.11** Dos $n$-extensiones cruzadas $(H, \partial)$ y $(H', \partial')$ están *conectadas* si existe un morfismo $(1_N, \alpha, 1_G)\colon (H, \partial) \longrightarrow (H', \partial')$ de $n$-extensiones cruzadas. Si esto sucede, escribiremos $(H,\partial) \rightharpoonup (H',\partial')$. Diremos que dos $n$-extensiones cruzadas $(H,\partial)$ y $(H',\partial')$ son *equivalentes* si existe una colección finita de $n$-extensiones cruzadas $\{(H_i,\partial_i) \in Xext^n(G,N)\}$ $1 \leq i \leq r$ tal que

(i) $(H,\partial) = (H_1,\partial_1)$ y $(H',\partial') = (H_r,\partial_r)$

(ii) Para todo entero positivo par $k$ tal que $2 \leq k \leq r-1$, se tiene que

$$(H_{k-1},\partial_{k-1}) \rightharpoonup (H_k,\partial_k)$$

$$(H_{k+1},\partial_{k+1}) \rightharpoonup (H_k,\partial_k)$$

Si $(H,\partial)$ y $(H',\partial')$ son equivalentes, escribiremos $(H,\partial) \equiv (H',\partial')$.

a) Observe que, así definida, $\rightharpoonup$ es una relación de equivalencia solamente cuando $n < 2$.

b) Observe que la condición (ii) solamente tiene sentido si $r$ es impar; sin embargo, si $r$ es par, basta agregar el morfismo de identidad

$$(H_{r+1},\partial_{r+1}) \xrightarrow{1} (H_r,\partial_r)$$

para obtener una colección impar de $n$-extensiones cruzadas que nos permite hacer de $\equiv$ una relación de equivalencia.

**6.12** Sea $(H,\partial) \in Xext^n(G,N)$. $[(H,\partial)]$ denotará la *clase de equivalencia* de $(H,\partial)$. Sea $Opext^n(G,N)$ el conjunto de *clases de equivalencia de $n$-extensiones cruzadas de $N$ por $G$*. Pruebe que, si $\varphi\colon G' \longrightarrow G$ es un homomorfismo de grupos y $(H,\partial) \in Xext^n(G,N)$, entonces existe un elemento $(H,\partial)_\varphi \in Xext^n(G',N)$, y un morfismo $(1_N,\alpha,\varphi)\colon (H,\partial) \longrightarrow (H,\partial)_\varphi$ tal que $(H,\partial)_\varphi$ es única (salvo equivalencia) y, por lo tanto, induce una función

$$\varphi^* = Opext^n(\varphi,N)\colon Opext^n(G,N) \longrightarrow Opext^n(G',N).$$

(Sugerencia: defina $(H,\partial)_\varphi$ como

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow H \wedge G' \longrightarrow G' \longrightarrow 1.)$$

**6.13** Sea $\sigma\colon N \longrightarrow N'$ un homomorfismo de $G$-módulos y sea $(H,\partial) \in Xext^n(G,N)$. Pruebe que existe un elemento ${}_\sigma(H,\partial) \in Xext^n(G,N')$ y un morfismo de $n$-extensiones cruzadas

$$(\sigma,\alpha,1_G)\colon (H,\partial) \longrightarrow {}_\sigma(H,\partial)$$

tal que ${}_\sigma(H,\partial)$ es única (salvo equivalencia) y $\sigma$ induce una función bien definida

$$\sigma_* = Opext^n(G,\sigma)\colon Opext^n(G,N) \longrightarrow Opext^n(G,N').$$

(Sugerencia defina ${}_\sigma(H,\partial)$ como

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N' \vee C_{n-1} \longrightarrow C_{n-2} \longrightarrow C_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 1.)$$

**6.14** Sean $[(H,\partial)]$, $[(H',\partial')] \in Opext^n(G,N)$. Su *suma directa* es la clase de equivalencia de la extensión

$$(H \oplus H', \partial \oplus \partial')\colon 0 \longrightarrow N \oplus N' \longrightarrow C_{n-1} \oplus C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow H \times H' \longrightarrow G \times G' \longrightarrow 1\ .$$

La *suma de Baer* de $[(H,\partial)]$ y $[(H',\partial')]$ se define como la clase de equivalencia de la extensión

$$\nabla_N(H \oplus H', \partial \oplus \partial')\triangle_G$$

es decir, $[(H,\partial)] + [(H',\partial')] = \nabla_{N_*} \triangle_G^* [(H \oplus H', \partial \oplus \partial')]$.

a) Compruebe que la suma de Baer está bien definida.

b) Si $(0)$ denota la sucesión

$$0 \longrightarrow N = N \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow G = G \longrightarrow 1$$

compruebe que $[(0)]$ representa al elemento neutro en $Opext^n(G,N)$. Compruebe que el inverso de la clase de

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\gamma} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

es la clase de

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{(-\gamma)} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 1\ .$$

c) Sean $\alpha_1, \alpha_2\colon N \longrightarrow N'$ homomorfismos de $G$-módulos y $(H,\partial) \in Xext^n(G,N)$. Demuestre que

$$\alpha_1(H,\partial) \oplus \alpha_2(H,\partial) \equiv (\alpha_1 \oplus \alpha_2)((H,\partial) \oplus (H,\partial)) \quad \text{y}$$

$$((H,\partial) \oplus (H,\partial))\triangle_G \equiv \triangle_N(H,\partial).$$

Observe que, en particular,

$$\triangle_G^*[P^n \oplus P^n] = \triangle_{J_{n*}}[P^n]$$

en $Opext^n(G,N)$ donde $P^n$ es la $n$-extensión cruzada libre (proyectiva) del problema III.2.8.

# Capítulo IV

# COHOMOLOGÍA DE GRUPOS

En este capítulo estudiaremos un importante caso particular del Algebra Homológica que fue el que le dio origen. Aquí el anillo $\Lambda$ será el anillo (entero) $\mathbb{Z}[G]$ del grupo $G$, y lo definimos en la sección 1. En la sección 2 definimos la homología y cohomología de un grupo $G$ con coeficientes en un $G$-módulo. En las secciones 3 y 4 se estudian los grupos de homología y cohomología de grado bajo, se prueba la importante sucesión de cinco términos para homología y se introducen los conceptos de derivación y extensión central universal; éste último lo utilizaremos en el capítulo V. En la sección 5 se da una interpretación de los grupos de cohomología en términos de clases de $n$-extensiones cruzadas. Finalmente, en la sección 6 damos algunas aplicaciones.

## IV.1 G-MÓDULOS

Sea $G$ un grupo. Veamos cómo podemos asociarle a $G$ un anillo que denotaremos con $\mathbb{Z}[G]$ que será en esencia una suma de copias de $\mathbb{Z}$, tantas como elementos tenga $G$. Para fines de notación podremos $I = G$ como conjuntos. Consideremos $G$ como un grupo multiplicativo.

**1.1 DEFINICION.** El *anillo (entero)* $\mathbb{Z}[G]$ *del grupo* $G$ es el conjunto de sumas formales $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i$, $\lambda_i\in\mathbb{Z}$, $g_i\in G$, donde casi toda $\lambda_i$ es cero, junto con las operaciones binarias

$$+:\mathbb{Z}[G]\times\mathbb{Z}[G]\longrightarrow\mathbb{Z}[G]\quad\text{y}\quad\cdot:\mathbb{Z}[G]\times\mathbb{Z}[G]\longrightarrow\mathbb{Z}[G]$$

dadas por

(i) $(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)+(\sum_{i\in I}\mu_i g_i)=\sum_{i\in I}(\lambda_i+\mu_i)g_i$, y

(ii) $(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)\cdot(\sum_{i\in I}\mu_i g_i)=\sum_{i\in I}(\sum_{g_jg_k=g_i}\lambda_j\mu_k)g_i$

Obsérvese que, como $(\lambda_i+\mu_i)=0$, excepto para un número finito de índices $i$, $\sum_{i\in I}(\lambda_i+\mu_i)g_i\in\mathbb{Z}[G]$ y es inmediato comprobar que $(\mathbb{Z}[G],+)$ es un grupo abeliano con $\sum_{i\in I}0g_i$ como elemento neutro. Análogamente, la suma $\sum_{g_jg_k=g_i}\lambda_j\mu_k$ contiene solamente un número finito de sumandos $\lambda_i\mu_k\in\Lambda$ diferentes de cero. Intuitivamente, en el término $\lambda_i\mu_k g_i$ distribuimos formalmente a $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i$ sobre $\sum_{i\in I}\mu_i g_i$, donde hemos reenumerado al término $\lambda_j g_j\mu_k g_k$. Es inmediato comprobar que $(\mathbb{Z}[G],+,\cdot)$ es un anillo.

Claramente, si reenumeramos $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i$, donde $\lambda_i=0$ para $i\neq j$ y $\lambda_j=1$, y ponemos simplemente $g_i$, vemos que $(\mathbb{Z}[G],\cdot)$ contiene a $G$ como subgrupo. Luego, si $G$ no es abeliano, $\mathbb{Z}[G]$ no será anillo conmutativo.

De otra manera, podemos decir que el anillo $\mathbb{Z}[G]$ del grupo $G$ consiste en el grupo abeliano libre generado por los elementos de $G$ como base y tal que el producto de dos elementos está dado por el producto de $G$. Podemos concebir los elementos de $\mathbb{Z}[G]$ como funciones $u\colon G\longrightarrow\mathbb{Z}$ que toman el valor cero para casi todo elemento de $G$, junto con las operaciones

(i) $(u+v)(g_i)=u(g_i)+v(g_i)$, y

(ii) $(uv)(g_i)=\sum_{g_jg_k=g_i}u(g_j)v(g_k)$.

Si escribimos $u=\sum_{i\in I}\lambda_i g_i$, $v=\sum_{i\in I}\mu_i g_i$, con $\lambda_i=u(g_i)$, $\mu_i=v(g_i)$, $g_i\in G$, obtenemos (i) y (ii) de 1.1.

El anillo $\mathbb{Z}[G]$ posee la siguiente propiedad universal que lo caracteriza.

**1.2 TEOREMA.** Sea $\Lambda$ un anillo con $1_\Lambda$ y $\varphi\colon G \longrightarrow \Lambda$ una función tal que $\varphi(1) = 1_\Lambda$ y $\varphi(g_i g_j) = \varphi(g_i)\varphi(g_j)$. Entonces existe un homomorfismo de anillos único $\psi\colon \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \Lambda$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{Z}[G] \arrow[d, "\psi"] \\ & \Lambda \end{tikzcd}$$

**Demostración.** Defínase $\psi(\sum_{i\in I} \lambda_i g_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i \varphi(g_i)$. Es evidente que es el único homomorfismo de anillos tal que $\varphi = \psi \circ \iota$.■

**1.3 EJEMPLO.** Sea $G$ un grupo cíclico de orden $n$ generado por $x$. Entonces las potencias de $x$, $x^s$, $0 \leq s \leq n-1$ forman una $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}[G]$ y se tiene que $x^n = 1$. Luego, si $X$ es la imagen de $x$ en el anillo de polinomios con coeficientes enteros $\mathbb{Z}[X]$, se tiene que $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^n - 1)$.

Consideremos la función trivial $\varphi$ de un grupo $G$ en los enteros $\mathbb{Z}$ que envía a cualquier elemento $g \in G$ en el $1 \in \mathbb{Z}$. Por 1.2, $\varphi$ da lugar a un homomorfismo de anillos $\mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$ único. Este homomorfismo se denota con $\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$ y lo llamaremos *aumentación* de $\mathbb{Z}[G]$. Entonces, si $\sum_{i\in I} \lambda_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$, $\epsilon(\sum_{i\in I} \lambda_i g_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i$. $(\epsilon(g_i) = 1.)$

**1.4 DEFINICION.** El núcleo del homomorfismo $\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$ se llama *ideal de aumentación* de $G$ y lo denotaremos con $IG$.

**1.5 DEFINICION.** Sea $(M, +)$ un grupo abeliano. Diremos que $M$ es un *G-módulo izquierdo* si existe $\kappa\colon G \times M \longrightarrow M$ dado por $\kappa(g, x) = gx$, tal que

(i) $1x = x; \qquad x \in M$

(ii) $(gg')x = g(g'x); \qquad g, g' \in G, \qquad x \in M$

(iii) $g(x_1 + x_2) = gx_1 + gx_2; \qquad g \in G, \qquad x_1, x_2 \in M.$

Es decir, $G$ opera en el grupo abeliano $M$ por la izquierda. $\kappa$ se llama *acción* de $G$ en $M$. De otra manera, podemos decir que un $G$-módulo $M$ consiste en un grupo abeliano $M$ junto con un homomorfismo

$$\kappa\colon G \longrightarrow Aut(M),$$

(procédase como en el problema I.1.3).

Por el teorema 1.2, $\kappa: G \longrightarrow \Lambda = Aut(M) \subset End(M)$ determina un homomorfismo único $\psi: \mathbb{Z}[G] \longrightarrow End(M)$, proporcionando a $M$ una estructura de $\mathbb{Z}[G]$-módulo izquierdo. Además, como cualquier homomorfismo de anillos envía elementos invertibles en elementos invertibles, y como los elementos de la parte aditiva de $\mathbb{Z}[G]$ son invertibles, si $M$ es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo izquierdo, entonces es un $G$-módulo izquierdo. Luego, hablaremos indistintamente de un $\mathbb{Z}[G]$-módulo izquierdo $M$ o de un $G$-módulo izquierdo $M$.

**1.6 DEFINICION.** Sea $M$ un grupo abeliano aditivo y $G$ un grupo (multiplicativo). Diremos que $M$ es un $G$-módulo *trivial* si $gx = x$ para toda $g \in G$, $x \in M$.

En otras palabras, $M$ es un $G$-módulo trivial si la acción $\kappa: G \times M \longrightarrow M$ es trivial, es decir, si deja fijos los elementos de $M$. Nótese que cualquier grupo abeliano $M$ puede verse como un $G$-módulo trivial para cualquier grupo $G$. Por ejemplo, cuando consideremos los números enteros $\mathbb{Z}$, siempre los tomaremos como un $G$-módulo trivial, es decir, $gn = n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, $g \in G$.

**1.7 EJEMPLO.** Consideremos $Hom_{\mathbb{Z}}(M, N)$, y $M$ y $N$ dos $\Lambda$-módulos. Definamos una estructura de $G$-módulo izquierdo en $Hom_{\mathbb{Z}}(M, N)$ como $G \times Hom_{\mathbb{Z}}(M, N) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(M, N)$ mediante $(g, \varphi) \longmapsto g\varphi g^{-1}$. Es inmediato comprobar (i) a (iii) de 1.5.

En adelante, consideraremos resoluciones proyectivas donde cada elemento de la cadena es un $G$-módulo proyectivo, y las llamaremos *$G$-resoluciones proyectivas* (o *$\mathbb{Z}[G]$-resoluciones proyectivas* de $\mathbb{Z}[G]$-módulos proyectivos).

**1.8 Nota.** Si $\Lambda = \mathbb{Z}[G]$, podemos eximirnos de considerar $\mathbb{Z}[G]$-módulos izquierdos y derechos utilizando el antiautomorfismo $g \longmapsto g^{-1}$ de $G$. (Véase el problema 1.7.) Luego, el producto tensorial de dos $\mathbb{Z}[G]$-módulos izquierdos o derechos $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ (también denotado con $M \otimes_G N$) tiene sentido. Entonces $M \otimes_G N$ o $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ se obtiene de $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, introduciendo las relaciones $g^{-1}x \otimes y = x \otimes gy$, o bien, si reemplazamos $x$ por $gx$ obtenemos las relaciones $x \otimes y = gx \otimes gy$. Es útil poder cambiar módulos izquierdos en derechos y viceversa. Sin embargo, esto puede dar lugar a confusiones con respecto a las acciones originales de $G$ en $M$.

## PROBLEMAS

**1.1** Compruebe la distributividad y asociatividad multiplicativa de $\mathbb{Z}[G]$.

**1.2** En la definición 1.1, al cambiar $\mathbb{Z}$ por cualquier otro anillo conmutativo $\Lambda$ tendremos $\Lambda[G]$, el *anillo del grupo* $G$. Si, en lugar de un anillo tenemos un campo $K$, tendremos el *álgebra del grupo* $G$, $K[G]$.

(i) Si $G$ es un grupo cíclico de orden dos, escriba las tablas de suma y multiplicación del álgebra de $G$, $\mathbb{Z}/2[G]$.

(ii) Pruebe que: $M$ es un $K[G]$-módulo semisimple si, y sólo si, toda sucesión exacta corta de $K[G]$-módulos se escinde. (Véase el problema I.4.6.)

**1.3** Demuestre que los elementos $g-1$, con $1 \neq g \in G$, forman una base para $IG$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

**1.4** Pruebe que, si $S$ es un conjunto de generadores de $G$, entonces los elementos $s-1$, $s \in S$, generan a $IG$ como ideal izquierdo.

**1.5** Pruebe que una extensión de $\mathbb{Z}$-módulos de $K$ por $G$,

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

determina un homomorfismo $\rho\colon G \longrightarrow Aut(K)$, $K$ abeliano aditivo.

**1.6** Pruebe que, si $0 \longrightarrow K \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 1$ es una extensión de $K$ por $G$, $G$ un grupo multiplicativo, entonces $K$ es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo izquierdo, i.e., $G$ actúa en $K$ por conjugación.

**1.7** Sean $G_1$ y $G_2$ grupos. Demuestre que $\mathbb{Z}[G_1] \otimes \mathbb{Z}[G_2] \cong \mathbb{Z}[G_1 \times G_2]$ como $(G_1 \times G_2)$-módulo derecho.

**1.8** Sea $M$ un $\mathbb{Z}[G]$-módulo izquierdo. Pruebe que, si definimos $xg = g^{-1}x$, $M$ posee una estructura de $\mathbb{Z}[G]$-módulo derecho. Observe que, bajo esta identificación,

$$Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(M,N) \cong Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(N,M)$$

para toda $n \geq 0$.

**1.9** Diremos que el funtor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es *adjunto izquierdo* del funtor

$G\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ si para toda $X \in \mathbf{C}$ y $Y \in \mathbf{D}$ existe una equivalencia natural

$$T = T_{X,Y}\colon \mathbf{D}(FX, Y) \longrightarrow \mathbf{C}(X, GY)$$

de funtores $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{Conj}$.

Sea $(\_)^*\colon \mathbf{An}_1 \longrightarrow \mathbf{Gr}$ el funtor "unidades" que a cada anillo $\Lambda$ con 1 le asocia su grupo de unidades $\Lambda^*$. Sea $\mathbb{Z}[\_]\colon \mathbf{Gr} \longrightarrow \mathbf{An}_1$ el funtor que asocia a cada grupo $G$ el anillo entero de $G$, $\mathbb{Z}[G]$. Pruebe que $\mathbb{Z}[\_]$ es un funtor adjunto izquierdo de $(\_)^*$.

**1.10** Sea $\mathbf{Gr(2)}$ la categoría cuyos objetos son homomorfismos de grupos y cuyos morfismos son cuadrados conmutativos en la categoría de grupos. Sea $V\colon \mathbf{XMod} \longrightarrow \mathbf{Gr(2)}$ la regla que a cada módulo cruzado $(D, G, \partial)$ le asocia el homomorfismo de grupos $\partial\colon D \longrightarrow G$, es decir, $V$ olvida la acción de $G$ en $D$. Sea $U\colon \mathbf{Gr(2)} \longrightarrow \mathbf{XMod}$ la regla que asocia a cada homomorfismo $\lambda\colon H \longrightarrow G$ el módulo cruzado inducido $(D, G, \partial)$ (véanse los problemas I.6.8 y II.1.9.b). Demuestre que $U$ y $V$ son funtores y que $U$ es adjunto izquierdo de $V$.

**1.11** Proporcione una definición adecuada de homomorfismo de $G$-módulos, y compruebe que los $G$-homomorfismos forman un grupo y que con éstos homomorfismos los $G$-módulos forman una categoría abeliana.

## IV.2 LA (CO)HOMOLOGÍA DE UN GRUPO

Consideremos un caso especial de III.3.1: $\Lambda$ será el anillo entero $\mathbb{Z}[G]$ de un grupo $G$, $P$ una $G$-resolución proyectiva reducida del $G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ y $N$ un $G$-módulo izquierdo. Entonces se tiene

$$P_{\mathbb{Z}}\colon \quad \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

y se considera $P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$:

$$P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N\colon \cdots \longrightarrow P_n \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow 0$$

que es una cadena y, por lo tanto, podemos medir su inexactitud mediante $H_n(P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N)$. Por III.3.1,

$$H_n(P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N) = Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N).$$

**2.1 DEFINICION.** El *grupo de homología de grado $n$ de un grupo $G$ con coeficientes en un $G$-módulo izquierdo $N$* es

$$H_n(G, N) = Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N)$$

Obviamente, podemos definir también la homología de grado $n$ de un grupo $G$ con coeficientes en un $G$-módulo derecho $N$ como:

$$H_n(G, N) = Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(N, \mathbb{Z}).$$

Utilizaremos ambas definiciones suponiendo que $N$ es un $G$-módulo izquierdo o derecho, según corresponda.

Ahora consideremos un caso especial de III.4.1: $\Lambda$ será el anillo entero $\mathbb{Z}[G]$, $P$ una $G$-resolución proyectiva reducida del $G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ y $N$ un $G$-módulo izquierdo. Entonces se tiene

$$P_{\mathbb{Z}}\colon \quad \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

y se considera $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_{\mathbb{Z}}, N)$:

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_{\mathbb{Z}}, N)\colon \cdots \longleftarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_n, N) \longleftarrow \cdots \longleftarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_0, N) \longleftarrow 0$$

que es una cocadena y, por lo tanto, podemos medir su inexactitud mediante $H^n(Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_{\mathbb{Z}}, N))$. Por III.4.1,

$$H^n(Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_{\mathbb{Z}}, N)) = Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N).$$

**2.2 DEFINICION.** El *grupo de cohomología de grado $n$ de un grupo $G$ con coeficientes en un $G$-módulo izquierdo $N$* es

$$H^n(G, N) = Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N).$$

Obsérvese que, como $Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \_\_)$ y $Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \_\_)$ son funtores covariantes por III.3.2 y III.4.2, tanto $H_n(G, \_\_)$ como $H^n(G, \_\_)$ son funtores covariantes, de la categoría de $G$-módulos en la categoría de grupos abelianos. Además, tendremos sucesiones exactas largas de homología en la segunda variable únicamente, pues, si $G_1$ y $G_2$ son dos grupos distintos, entonces $H_n(G_1, \_\_)$, $H_n(G_2, \_\_)$, $H^n(G_1, \_\_)$ y $H^n(G_2, \_\_)$ estan definidos sobre anillos diferentes $\mathbb{Z}[G_1]$ y $\mathbb{Z}[G_2]$.

**2.3 TEOREMA.** Sea $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ una sucesión exacta corta de $G$-módulos. Entonces existen homomorfismos

$$\kappa_n: H_n(G, N'') \longrightarrow H_{n-1}(G, N')$$

y

$$\kappa^n: H^n(G, N'') \longrightarrow H^{n+1}(G, N')$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$, tales que las siguientes sucesiones son exactas

$$\cdots \longrightarrow H_n(G, N') \longrightarrow H_n(G, N) \longrightarrow H_n(G, N'') \xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}(G, N') \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow H^n(G, N') \longrightarrow H^n(G, N) \longrightarrow H^n(G, N'') \xrightarrow{\kappa^n} H^{n+1}(G, N') \longrightarrow \cdots$$

**Demostración.** Como

$$H_n(G, \_\_) = Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \_\_) \quad \text{y} \quad H^n(G, \_\_) = Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \_\_)$$

basta aplicar III.3.3 y III.4.3.■

**2.4 PROPOSICION.** Sea $P$ un $\mathbb{Z}[G]$-módulo proyectivo e $I$ un $\mathbb{Z}[G]$-módulo inyectivo. Entonces

$$H_n(G, P) = 0 \quad \text{y} \quad H^n(G, I) = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

**Demostración.** Es inmediata de III.3.6 y III.4.6.■

**2.5 DEFINICION.** Sea $G$ un grupo y $N$ un $G$-módulo. El *grupo de coinvariantes* de $N$, denotado con $N_G$, es el cociente de $N$ por el subgrupo aditivo generado por los elementos de la forma $gy - y$, $g \in G$, $y \in N$.

Es decir, $N_G = N/T$, donde $T = < gy - y > \quad (g \in G, y \in N)$.

**2.6 DEFINICION.** Sea $G$ un grupo y $N$ un $G$-módulo. El *subgrupo de invariantes de* $N$, denotado con $N^G$, consiste en todos los elementos $y \in N$ tales que la acción de $G$ es trivial. Es decir,

$$N^G = \{ y \in N \mid gy = y \quad \text{para toda} \quad g \in G\}.$$

Obsérvese que $N^G$ es el submódulo más grande de $N$ en el cual $G$ actúa trivialmente, y $N_G$ es el más grande de los cocientes de $N$ en el cual la acción de $G$ sobre $N$ es trivial.

Como $gy - y = (g-1)y$ y los elementos $(g-1) \in \mathbb{Z}[G]$ generan $IG$, escribiremos $T = IG \circ N$. Si aplicamos el funtor $\_ \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ a la sucesión exacta corta

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

obtenemos la sucesión exacta

$$IG \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N.$$

Luego, $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \cong N$ y, bajo este isomorfismo, $im(IG \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N)$ va a $IG \circ N$. Por lo tanto, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \cong N/IG \circ N = N/T = N_G$.

**2.7 TEOREMA.** Sea $G$ un grupo y $N$ un $G$-módulo. Entonces

$$H_0(G,N) = N_G \quad \text{y} \quad H^0(G,N) = N^G.$$

**Demostración.** Por definición, $H_0(G,N) = Tor_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$. Luego, $H_0(G,N) = N_G$. Análogamente, por definición,

$$H^0(G,N) = Ext^0_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) = Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N).$$

Un homomorfismo $\varphi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow N$ está determinado totalmente por $\varphi(1) = y \in N$. Como $\varphi$ es un homomorfismo de $G$-módulos, $gy = \varphi(g1) = \varphi(1) = y$ para toda $g \in G$, i.e., $\varphi$ es un homomorfismo de $G$-módulos si, y sólo si, $\varphi(1) = y$ permanece fijo bajo la acción de $G$; luego, $H^0(G,N) = N^G$.■

**2.8 COROLARIO.** Si $N$ es un $G$-módulo trivial, entonces

$$H_0(G,N) = N \quad \text{y} \quad H^0(G,N) = N.\blacksquare$$

Veamos a continuación algunas propiedades que utilizaremos posteriormente.

**2.9 PROPOSICION.** Sea $H \rightarrowtail G \overset{p}{\twoheadrightarrow} Q$ una sucesión exacta de grupos. Entonces

(i) $\mathbb{Z}[Q] \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}$ como $G$-módulos derechos.

(ii) $Tor_n^{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}, N) \cong Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q], N)$ para $N$ un $G$-módulo izquierdo.

**Demostración.**

(i) Los elementos $g_i \otimes 1$ forman una base para $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}$, donde $g_i \in G$. El isomorfismo se da mediante

$$\eta \colon \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[Q]$$
$$(g_i \otimes 1) \longmapsto 1 \cdot p(g_i) = Hg_i$$

Es decir, $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}$ es libre en el conjunto de clases laterales derechas $G/H$. La acción derecha de $G$ inducida por el producto en $\mathbb{Z}[G]$ corresponde a la acción derecha de $G$ en $\mathbb{Z}[Q]$ mediante $p$.

(ii) Sea $P$ una $G$-resolución proyectiva de $N$. Es fácil comprobar que $P$ es también una $H$-resolución proyectiva de $N$. Por la parte (i),

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} P \cong (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G]) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P \cong \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P.$$

Tomando homología,

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} P) & = & Tor_n^{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}, N) \\ \wr\| & & \wr\| \\ H_n(\mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P) & = & Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q], N).\blacksquare \end{array}$$

**2.10 LEMA.** Sea $H \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ una sucesión exacta corta de grupos. Entonces la siguiente sucesión de $Q$-módulos es exacta

$$0 \longrightarrow H_1(H, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \longrightarrow IQ \longrightarrow 0.$$

**Demostración.** Consideremos la sucesión exacta de $G$-módulos

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}.$$

Aplicando el funtor $\mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \_$ obtenemos

$$\cdots \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q], IG) \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q], \mathbb{Z}[G]) = 0 \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q], \mathbb{Z}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \longrightarrow \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

Cada término es un $Q$-módulo, y $\mathbb{Z}[Q] \cong \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ es la aumentación de $\mathbb{Z}[Q]$. Finalmente, por 2.9(ii)

$$H_1(H, \mathbb{Z}) = Tor_1^{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q], \mathbb{Z}). \blacksquare$$

**2.11 PROPOSICION.** Consideremos la sucesión exacta corta

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}.$$

Entonces $H_n(G, N) \cong Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(IG, N)$ y $H^n(G, N) \cong Ext_{\mathbb{Z}[G]}^{n-1}(IG, N)$ para $n > 1$.

**Demostración.** Asociada a $IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ existe una sucesión exacta larga (III.3)

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(IG, N) \longrightarrow Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], N) \longrightarrow Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(IG, N) \longrightarrow Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], N) \longrightarrow Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) \longrightarrow \cdots$$

Como $\mathbb{Z}[G]$ es proyectivo, $Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], N) = 0 = Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], N)$. Luego, $H_n(G, N) = Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) \cong Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(IG, N)$.

Análogamente para cohomología.$\blacksquare$

## PROBLEMAS

**2.1** Sean $\Lambda$ y $\Lambda'$ dos anillos y $h: \Lambda' \longrightarrow \Lambda$ un homomorfismo de anillos. Sea $N'$ un $\Lambda'$-módulo. Definamos en $N'$ una estructura de $\Lambda$-módulo mediante $h: \Lambda \times N' \longrightarrow N'$ dado por $(\lambda, y) \longmapsto \lambda y = h(\lambda)y$.

(i) Pruebe que $N'$ posee una estructura de $\Lambda$-módulo. Denotaremos con $C_h N'$ el $\Lambda$-módulo $N'$ cuya estructura se definió mediante $h$.

(ii) Pruebe que $C_h \_ : \mathbf{Mod}_{\Lambda'} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\Lambda}$ es un funtor covariante que llamaremos *funtor de cambio de anillos inducido por* $h$, o bien, *restricción de escalares*.

(iii) Pruebe que el funtor $F: \mathbf{Mod}_{\Lambda} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\Lambda'}$ dado por $F(N) = \Lambda' \otimes_{\Lambda} N$ es adjunto izquierdo de $C_h \_ : \mathbf{Mod}_{\Lambda'} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\Lambda}$. (Considere $\Lambda'$ como un $\Lambda$-módulo derecho mediante $h$, $F(N)$ posee una estructura de $\Lambda'$-módulo a través de la estructura de $\Lambda'$-módulo de $\Lambda'$) $F$ se llama a menudo *extensión de escalares*.

**2.2** Sea $\mathbf{P}$ una categoría cuyos objetos son las parejas $(G, N)$, donde $G$ es un grupo, $N$ un $G$-módulo, y cuyos morfismos son de la forma

$$(h, \varphi): (G, N) \longrightarrow (G', N')$$

donde $h: G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos y $\varphi: N \longrightarrow N'$ es un homomorfismo de $G$-módulos con $N' = C_h N$, i.e., $N'$ es un $G$-módulo vía $h$.

Dado $(h, \varphi)$, sea $P$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$ y $P'$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G']$. Sea $f: P \longrightarrow P'$ un morfismo de cadenas compatible con $h$, i.e., $f(gx) = h(g)f(x)$, $g \in G$, $x \in P$. Pruebe que

(i) existe un morfismo de cadenas bien definidas

$$f \otimes \varphi: P \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow P' \otimes_{\mathbb{Z}[G']} N'.$$

(ii) $f \otimes \varphi$ induce un morfismo bien definido

$$(f, \varphi)_*: H_*(G, N) \longrightarrow H_*(G, N')$$

y que $H_*(\_ , \_ )$ es un funtor de $\mathbf{P}$ en $\mathbf{Ab}$ covariante.

(iii) Establezca resultados análogos a (i) y (ii) para $H^*(\_ , \_ )$.

**2.3**

a) Sean $M$ y $N$ $G$-módulos. Compruebe que $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N = (M \otimes N)_G$ donde $G$ actúa diagonalmente en $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, es decir, $g(x \otimes y) = gx \otimes gy$.

b) Pruebe que $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \cong N \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$.

**2.4**

a) Sea $B_n$ el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por la lista $(g_0, \ldots, g_n)$ de elementos de $G$ con la acción de $G$ dada por $g \cdot (g_0, \ldots, g_n) = (gg_0, \ldots, gg_n)$. Sea

$\partial_n\colon B_n \longrightarrow B_{n-1}$ dada por $\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$, donde $d_i(g_0,\ldots,g_n) = (g_o,\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_n)$ y $\epsilon\colon B_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\epsilon(g_0) = 1$.

Compruebe que

$$B_*\colon \cdots \longrightarrow B_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow B_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es una resolución de $\mathbb{Z}$. (Sugerencia: utilice el comentario posterior al teorema III.1.9 y defina una homotopía de contracción $h\colon B_n \longrightarrow B_{n+1}$ como $h(g_0,\ldots,g_n) = (1,g_0,\ldots,g_n)$ si $n \geq 0$, y $h(1) = (1)$ si $n = -1$.)

b) Tome como base del $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre $B_n$ la lista cuya primera componente es 1 (puesto que éstas representan las $G$-órbitas de listas de $n+1$ componentes).

Escriba tal lista en la forma $(1, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1g_2\cdots g_n)$ e introduzcamos la notación "barra"

$$[g_1|g_2|\cdots|g_n] = (1, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1g_2\cdots g_n).$$

Si $n = 0$, el único elemento de la base se denotará con $[\quad]$ y, si identificamos $B_0$ con $\mathbb{Z}[G]$, obtenemos $[\quad] = 1$.

Entonces $\partial_n\colon B_n \longrightarrow B_{n-1}$ en términos de esta $\mathbb{Z}[G]$-base $\{[g_1|\cdots|g_n]\}$ está dada por $\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$, donde $d_i$ es el $\mathbb{Z}[G]$-homomorfismo dado por

$$d_i[g_1|\cdots|g_n] = \begin{cases} g_1[g_2|\cdots|g_n] & \text{si } i = 0 \\ [g_1|\cdots|g_{n-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}|\cdots|g_n] & \text{si } 0 < i < n \\ [g_1|\cdots|g_{n-1}] & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Calcule explícitamente $\partial_3([g_1|g_2|g_3])$, $\partial_2([g_1|g_2])$, $\partial_1([g_1])$ y $\epsilon(1)$. La resolución $B_*$ se llama *resolución barra* o *resolución estándar no normalizada* de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$.

c) Sea $D_*$ el subcomplejo de $B_*$ generado por los elementos $(g_0,\ldots,g_n)$ tales que $g_i = g_{i+1}$ para alguna $i$. En la notación "barra", $D_*$ es el $G$-subcomplejo de $B_*$ generado por los elementos $[g_1|\ldots|g_n]$ tales que $g_i = 1$ para alguna $i$. Compruebe que $F_* = B_*/D_*$ es una resolución de $\mathbb{Z}$, llamada *resolución barra* o *resolución estándar normalizada* de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$. (Sugerencia: compruebe que la homotopía de contracción $h$ utilizada en (a) envía a $D_*$ en sí mismo induciendo una homotopía de contracción en $F_*$.)

## IV.3 $H_1(G,N)$ Y $H^1(G,N)$

En esta sección estudiaremos la (co)homología de grado uno de un grupo $G$ con coeficientes en un $G$-módulo $N$.

**3.1 LEMA.** Sea $G$ un grupo, $IG$ su ideal de aumentación. Entonces el grupo aditivo $IG/(IG)^2$ es isomorfo al grupo multiplicativo $G/[G,G]$ donde $[G,G]$ es el subgrupo conmutador de $G$.

**Demostración.** Los elementos de la forma $g-1$, con $1 \neq g \in G$, forman una base de $IG$ (véase el problema 1.3). Definamos $\varphi: G \longrightarrow IG/(IG)^2$ mediante $g \longmapsto (g-1)+(IG)^2$.

Obsérvese que $\varphi$ es un homomorfismo, pues $(g_1g_2-1)-(g_1-1)-(g_2-1) = (g_1-1)(g_2-1) \in (IG)^2$.

Como $[G,G] \subset ker\ \varphi$ e $IG/(IG)^2$ es abeliano, $\varphi$ induce

$$\psi: G/[G,G] \longrightarrow IG/(IG)^2, \quad \text{donde} \quad g[G,G] \longmapsto (g-1)+(IG)^2.$$

Por otro lado, definimos $\varphi': IG \longrightarrow G/[G,G]$ mediante $\varphi'(g-1) = g[G,G]$. Sea $x \in (IG)^2$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= (\sum_{i\in I} \lambda_i(g_i-1))(\sum_{j\in I} \mu_j(g_j-1)) \\ &= \sum_{i,j\in I} \lambda_i\mu_j(g_i-1)(g_j-1) \\ &= \sum_{i,j\in I} \lambda_i\mu_j[(g_ig_j-1)-(g_i-1)-(g_j-1)] \end{aligned}$$

Luego,

$$\varphi'(x) = \prod_{i,j\in I} (g_ig_jg_i^{-1}g_j^{-1})^{\lambda_i\mu_j}[G,G] = [G,G].$$

Así que $x \in ker\ \varphi'$. Por lo tanto, $\varphi'$ induce $\psi': IG/(IG)^2 \longrightarrow G/[G,G]$. Es fácil comprobar que $\psi$ y $\psi'$ son inversos uno del otro.■

**3.2 TEOREMA.** $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong IG/(IG)^2$.

**Demostración.** Por 2.1, $H_1(G,\mathbb{Z}) = Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. Consideremos la presentación proyectiva de $\mathbb{Z}$

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}.$$

Apliquémosle el funtor $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \_$ y obtendremos, por los resultados de §III.3, la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, IG) \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\kappa_1}$$

$$\longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

Como $\mathbb{Z}[G]$ es proyectivo, $H_1(G, \mathbb{Z}[G]) = Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) = 0$. Como $\mathbb{Z}$ es un $G$-módulo trivial,

$$\begin{aligned} H_0(G, \mathbb{Z}[G]) &= Tor_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) \\ &= \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} H_0(G, \mathbb{Z}) &= Tor_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ &= \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Así, el homomorfismo

$$\varphi_{0^*} \colon H_0(G, \mathbb{Z}[G]) \longrightarrow H_0(G, \mathbb{Z})$$

es suprayectivo y, por lo tanto, $\varphi_{0^*} \neq 0$. Además, cualquier endomorfismo $\varphi_0 \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es, o bien monomórfico, o bien trivial. Pero como el inducido $\varphi_{0^*}$ es diferente de 0, $\varphi_0$ es monomorfismo. Luego, por exactitud,

$$\kappa_1 \colon Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow Tor_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, IG) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG$$

es un isomorfismo. Pero por 2.1 y 2.7,

$$\kappa_1 \colon H_1(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_0(G, IG) = (IG)_G = IG/IG \circ IG \ .\blacksquare$$

**3.3 COROLARIO.** $H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G/[G,G]$.$\blacksquare$

Consideremos ahora $H^1(G, \mathbb{Z})$. Por definición,

$$H^1(G, \mathbb{Z}) = Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

Aplicando el funtor contravariante $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\_\,, \mathbb{Z})$ a la presentación proyectiva de $\mathbb{Z}$, $IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ y utilizando los resultados de III.4 tenemos que $H^1(G, \mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, \mathbb{Z})$. Pero un homomorfismo $f \colon IG \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de $G$-módulos si, y sólo si,

$$f(x(y-1)) = xf(y-1) = f(y-1); \qquad x, y \in G,$$

es decir, si, y sólo si, $f((x-1)(y-1)) = 0$ (pues $x(y-1) = xy - 1 - (x-1)$). Luego, utilizando 3.1, obtenemos el siguiente

**3.4 TEOREMA.** $H^1(G,\mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(IG/(IG)^2,\mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(G/[G,G],\mathbb{Z})$.■

Obsérvese que, como $G/[G,G] \cong H_1(G,\mathbb{Z})$, $H^1(G,\mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$, siendo ésto un caso particular del teorema del coeficiente universal.

Sea $N$ un $G$-módulo trivial; entonces el lector podrá comprobar (véanse los problemas 3.1 y 3.3) que

$$H_1(G,N) \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} G/[G,G] \quad \text{y} \quad H^1(G,N) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(G/[G,G],N).$$

En seguida veamos una interpretación de $H^1(G,N)$ cuando $N$ es un $G$-módulo trivial. Para esto, introduciremos el concepto de derivación y veremos que existe una equivalencia natural de funtores $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,\_\_)$ y $Der(G,\_\_)$ que nos permitirá hacer dicha interpretación.

**3.5 DEFINICION.** Una *derivación* u *homomorfismo cruzado* es una función $f\colon G \longrightarrow N$ donde $(G,\cdot)$ es un grupo y $N$ un $G$-módulo tal que

$$f(x\cdot y) = x \circ f(y) + f(x)$$

donde $\circ$ denota la acción de $G$ en $N$.

Si $N$ es un $G$-módulo trivial, entonces $f$ es un homomorfismo del grupo multiplicativo $G$ en el grupo abeliano $N$. Obsérvese que $f(1) = 0$. Si definimos la suma de dos derivaciones $f$ y $g$ de $G$ en $N$ como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, queda claro que $f+g$ es una derivación. Luego, el conjunto de todas las derivaciones de $G$ en $N$, junto con la suma de derivaciones, se denotará con $Der(G,N)$. Es inmediato comprobar que $Der(G,N)$ es un grupo abeliano bajo dicha suma.

El conjunto de derivaciones $f\colon G \longrightarrow N$ de la forma $f_a(x) = xa - a$ con $a \in N$ fija, se llama *conjunto de derivaciones principales* $PDer(G,N)$ *de* $G$ *en* $N$. Como $f_a + f_b = f_{(a+b)}$ y $f_{(-a)} = -f_a$, $PDer(G,N)$ es un subgrupo de $Der(G,N)$.

Sea $g\colon N \longrightarrow N'$ un homomorfismo de $G$-módulos y $f\colon G \longrightarrow N$ una derivación. Entonces, la composición $g\circ f\colon G \longrightarrow N'$ es una derivación. Luego, es fácil comprobar que

$$Der(G,\_\_)\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

es un funtor covariante.

**3.6 PROPOSICION.** Los funtores

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,\_\_),\ Der(G,\_\_)\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

son equivalentes naturalmente.

**Demostración.** Queremos ver que, para cada $N \in \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$, existe

$$t_N : Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N) \longrightarrow Der(G, N)$$

tal que $t_N$ es un isomorfismo para cada $N$ y que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} N & \quad & Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,N) & \xrightarrow{t_N} & Der(G,N) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,\varphi)} & & \downarrow{\scriptstyle Der(G,\varphi)} \\ N' & & Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,N') & \xrightarrow{t_{N'}} & Der(G,N') \end{array}$$

Sea $h \in Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N)$. Definamos $t_N(h) = f_h : G \longrightarrow N$ mediante $f_h(x) = h(x-1)$. Veamos que $f_h$ es una derivación:

$$f_h(xy) = h(xy-1) = h(x(y-1)+(x-1)) = xh(y-1)+h(x-1) = xf_h(y)+f_h(x).$$

Inversamente, sea $f : G \longrightarrow N$ una derivación. Definamos $h_f : IG \longrightarrow N$ mediante $h_f(x-1) = f(x)$. Veamos que $h_f$ es un homomorfismo de $G$-módulos:

$$\begin{aligned} h_f(x(y-1)) &= h_f((xy-1)-(x-1)) \\ &= f(xy) - f(x) \\ &= f(x) + x(f(y)) - f(x) \\ &= x \circ h_f(y-1). \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $t_N$ es un homomorfismo de grupos abelianos y que $f_h$ y $h_f$ son mutuamente inversos.

La conmutatividad del diagrama anterior es inmediata.∎

**3.7 TEOREMA.** Sea $G$ un grupo y $N$ un $G$-módulo. Entonces

$$H^1(G,N) \cong Der(G,N)/PDer(G,N).$$

**Demostración.** Por definición, $H^1(G,N) = Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N)$.

Considérese la $\mathbb{Z}[G]$-presentación libre de $\mathbb{Z}$, $IG \overset{i}{\rightarrowtail} \mathbb{Z}[G] \overset{p}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}$. Por los resultados de III.4 obtenemos una sucesión larga

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \xrightarrow{p^*} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N) \xrightarrow{i^*} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N) \longrightarrow \cdots\ .$$

Como $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], N) \cong N$ y $Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], N) = 0$, pues $\mathbb{Z}[G]$ es libre, tenemos que

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) \xrightarrow{p^*} N \xrightarrow{i^*} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N) \longrightarrow H^1(G, N) \longrightarrow 0$$

es exacta. Luego, $H^1(G, N) \cong coker\ i^* = Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N)/i^*(N)$, donde $i^*(a)(x-1) = xa - a$, $a \in N$, $x \in G$. Por la proposición 3.6, existe una derivación $f_{i^*}: G \longrightarrow N$ asociada a $i^*(a)$ de la forma $f_{i^*}(x) = (x-1)a$. Dichas derivaciones son las derivaciones principales $PDer(G, N)$. Luego, por 3.6,

$$H^1(G, N) = Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N)/i^*(N) \cong Der(G, N)/PDer(G, N). \blacksquare$$

Lo que nos dice 3.7 es que $H^1(G, N)$ mide el "tamaño" de las derivaciones que no son principales.

**3.8 EJEMPLO.** Sea $G = \mathbb{Z}/n$ el grupo de los enteros módulo n. Entonces, por 3.3, $H_1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n$, pues $\mathbb{Z}/n$ es abeliano y, por lo tanto $[\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n] = \{1\}$.

**3.9 EJEMPLO.** Sea $G = \mathbb{Z}/n$. Entonces, por 3.4,

$$H^1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) = 0,$$

por el problema I.5.4.

## PROBLEMAS

**3.1** Con un procedimiento similar al de 3.2, pruebe que

$$H_1(G, N) \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} IG/(IG)^2 \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} G/[G, G]$$

para $N$ un $G$-módulo trivial.

**3.2** Proporcione la demostración detallada del teorema 3.4.

**3.3** Con argumentos similares a los del teorema 3.4, pruebe que, para $N$ un $G$-módulo trivial, se tiene que

$$H^1(G, N) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(IG/(IG)^2, N) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(G/[G, G], N).$$

**3.4** En la proposición 3.6, pruebe que $t_N$ es un homomorfismo y que $f_h$ y $h_f$ son inversos uno del otro. Pruebe que el diagrama conmuta.

**3.5** Por 3.3, $H_1(H,\mathbb{Z}) \cong H/[H,H]$. Luego, la sucesión exacta de 2.10 se puede escribir como sigue:

$$0 \longrightarrow H/[H,H] \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \xrightarrow{\rho} IQ \longrightarrow 0$$

(i) Proporcione una descripción explícita de $\eta$.

(Sugerencia: calcule $Tor_1^H(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ mediante la presentación $H$-libre de $\mathbb{Z}$, $IH \rightarrowtail \mathbb{Z}[H] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ y mediante la $G$-presentación libre de $\mathbb{Z}$, $IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ y vea que $\eta(h[H,H]) = 1_Q \otimes (h-1)$.)

(ii) Como consecuencia de (i), muestre que la $Q$-acción en $H/[H,H]$ está dada por conjugación en $G$, es decir

$$g \circ h[H,H] = (ghg^{-1})[H,H].$$

**3.6** Sea $G$ un grupo y $P$ una resolución cruzada libre (proyectiva) de $G$

$$P: \cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} L \xrightarrow{\partial_0} G \longrightarrow 1$$

Sea $N$ un $G$-módulo y $d_G\colon G \longrightarrow N$ una derivación.

a) Pruebe que $N$ tiene una estructura de $L$-módulo a través de $\partial_0$ y que $d_G \circ \partial_0$ es una derivación de $L$ en $N$.

b) Definamos los siguientes homomorfismos de grupos abelianos

$$\partial_0^*\colon Der_G(G,N) \longrightarrow Der_L(L,N)$$

$$d_G \longmapsto d_G \circ \partial_0 = d_L$$

y

$$\partial_1^*\colon Der_L(L,N) \longrightarrow Hom_L(C_1,N)$$

$$d_L \longmapsto d_L \circ \partial_1 = \omega.$$

Pruebe que $\omega$ es un homomorfismo y que

$$d_L\partial_1(xy) = d_L\partial_1(x) + d_L\partial_1(y).$$

c) Compruebe que

$$Hom(P,N)\colon Der_G(G,N) \xrightarrow{\partial_0^*} Der_L(L,N) \xrightarrow{\partial_1^*} Hom_L(C_1,N) \longrightarrow Hom_G(C_2,N) \longrightarrow \cdots$$

es un complejo.

**3.7** Sea $P\colon \cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} L \xrightarrow{\partial_0} G \longrightarrow 1$ una resolución cruzada libre (proyectiva) de $G$, con $L$ un grupo libre. Sea $H = ker\ \partial_0$ y considere la sucesión exacta corta $1 \longrightarrow H \longrightarrow L \xrightarrow{\partial_0} G \longrightarrow 1$. Por IV.2.10, la siguiente sucesión de $G$-módulos es exacta

$$1 \longrightarrow H/[H,H] \xrightarrow{k} \mathbb{Z}[G] \otimes_L IL \xrightarrow{g} IG \longrightarrow 1$$

donde $k(h[H,H]) = 1_G \otimes (l-1)$. Como $C_1$ es un $L$-módulo cruzado libre (proyectivo), entonces $C_1/[C_1,C_1]$ es un $G$-módulo libre, y la sucesión

$$1 \longrightarrow ker\ \partial_1 \xrightarrow{k_1} C_1/[C_1,C_1] \xrightarrow{g_1} H/[H,H] \longrightarrow 1$$

es una presentación $G$-libre de $H/[H,H]$. Sea

$$\hat{P}\colon \cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1/[C_1,C_1] \xrightarrow{f} \mathbb{Z}[G] \otimes_L IL \longrightarrow IG \longrightarrow 1$$

donde

$$f = kg_1\colon C_1/[C_1,C_1] \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_L IL$$
$$c[C_1,C_1] \longmapsto 1_G \otimes (\partial, c-1) \qquad (c \in C_1).$$

a) Compruebe que $\hat{P}$ es exacta y que $C_n$ y $C_1/[C_1,C_1]$ son $G$-módulos libres para $k \geq 2$. (Utilice los problemas I.6.11c y III.1.13.)

b) Sea $L$ un grupo libre sobre el conjunto $S - 1 = \{s - 1 \mid s \in S\}$. Compruebe que $\mathbb{Z}[G] \otimes_L IL$ es $G$-libre y que $\hat{P}$ es una resolución libre (proyectiva) de $IG$.

c) Aplicando el funtor contravariante $Hom_G(\_\,, N)$ a $\hat{P}$ se tiene que $H^0(Hom(\hat{P}, N)) = Hom_G(IG, N)$. Por otro lado, como en III.3.6, definamos un isomorfismo natural

$$\eta\colon Der(G,N) \longrightarrow Hom_G(IG,N)$$

dado por $\eta(d_G)(g-1) = d_G(g)$, con $g \in G$. Luego, $H^0(Hom(\hat{P},N)) = Der(G,N)$. Compruebe que el siguiente diagrama es un isomorfismo de complejos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
Hom_G(IG,N) & \longrightarrow & Hom_G(\mathbb{Z}[G] \otimes_L IL, N) & \longrightarrow & Hom_G(C/[C,C],N) & \longrightarrow & Hom_G(C_2,N) & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow\eta & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \\
Der_G(G,N) & \longrightarrow & Der_L(L,N) & \longrightarrow & Hom_L(C_1,N) & \longrightarrow & Hom_G(C_2,N) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

y, utilizando la Proposición 2.11, concluya que, para $m \geq 1$,

$$H^{m+1}(G,N) = H^m(Hom(P,N)).$$

**3.8** Sea $(H,\partial) \in Xext^n(G,N)$ una extensión cruzada. Si $P$ es una resolución cruzada libre (proyectiva) de $G$, entonces, por el problema III.2.7a, la identidad $1_G$ induce un morfismo $\alpha\colon P \longrightarrow (H,\partial)$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
P\colon & \cdots & \longrightarrow & C_m & \longrightarrow & C_{m-1} & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & G & \longrightarrow 1 \\
\big\downarrow\alpha & & & \big\downarrow\alpha_m & & \big\downarrow\alpha_{m-1} & & \big\downarrow\alpha_1 & & \big\downarrow\alpha_0 & & \big\|\!\!\downarrow & \\
(H,\partial)\colon & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N_{m-1} & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow 1
\end{array}$$

Pruebe que, si reemplazamos $P$ por $P^n$ (véase el problema III.2.7b), se tiene un morfismo inducido $(\nu,\alpha,1_G)\colon P^n \longrightarrow (H,\partial)$, y que éste es único, salvo homotopía. (Sugerencia: utilice los problemas III.2.8 y III.6.9a.)

## IV.4 H₂(G,N)

**4.1 LEMA.** Sea $H \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ una sucesión exacta corta de grupos y $N$ un $Q$-módulo izquierdo. Entonces la siguiente sucesión es exacta:

$$H_2(G,N) \longrightarrow H_2(Q,N) \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} H/[H,H] \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} IQ \longrightarrow 0$$

**Demostración.** Consideremos la sucesión exacta corta de 2.10,

$$H_1(H,\mathbb{Z}) \rightarrowtail \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \twoheadrightarrow IQ.$$

Aplicando el funtor $N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} \_$ obtenemos

$$Tor_1^{\mathbb{Z}[Q]}(N, H_1(H,\mathbb{Z})) \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[Q]}(N, \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG) \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[Q]}(N, IQ) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} H_1(H,\mathbb{Z}) \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} IQ \longrightarrow 0\ .$$

Pero $N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG = N \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG$; por 2.11 y problema III.3.8, $H_2(Q,N) \cong Tor_1^{\mathbb{Z}[Q]}(N, IQ)$; y por 3.3, $H_1(H,\mathbb{Z}) \cong H/[H,H]$. También, por 2.11 aplicado a un $G$-módulo izquierdo $N$, $H_2(G,N) \cong Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(N, IG)$; nos resta encontrar un homomorfismo de $Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(N, IG)$ en $Tor_1^{\mathbb{Z}[Q]}(N, \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG)$ que sea suprayectivo. Para esto, apliquemos los funtores

$$\_ \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \quad \text{y} \quad \_ \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} (\mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG)$$

a una presentación $Q$-proyectiva de $N$, $N' \rightarrowtail P \twoheadrightarrow N$ y obtendremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos que nos muestra la suprayectividad:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(P, IG) & \longrightarrow & Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(N, IG) & \longrightarrow & N' \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG & \longrightarrow & P \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downdownarrows & & \downdownarrows & \\
\cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Tor_1^{\mathbb{Z}[Q]}(N, \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG) & \longrightarrow & N' \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG & \longrightarrow & P \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG & \longrightarrow \cdots
\end{array}\ . \blacksquare$$

La sucesión de 4.1 se conoce como *sucesión exacta de cinco términos para homología.* Para cohomología se tiene una sucesión de cinco términos también (véase el problema 4.1).

Consideremos ahora una presentación libre de un grupo $G$,

$$R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G.$$

Por 4.1, existe una sucesión exacta de cinco términos

$$H_2(F,N) \longrightarrow H_2(G,N) \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[G]} R/[R,R] \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[F]} IF \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \longrightarrow 0.$$

Utilizando el problema 4.9 tenemos que $H_2(F,N)=0$ y, por lo tanto

**4.2** $$H_2(G,N) \cong ker(N \otimes_{\mathbb{Z}[G]} R/[R,R] \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[F]} IF).$$

Por otro lado (véase el problema 3.1), como

$$H_1(G,N) = ker(N \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \longrightarrow N)$$

tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_1(G,N) \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail] & H_1(Q,N) \arrow[d, tail] & \\
H_2(G,N) \arrow[r] & H_2(Q,N) \arrow[r] & N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} H/[H,H] \arrow[r, "h"] & N \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"] & N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} IQ \arrow[r] \arrow[d, "k'"] & 0 \\
 & & & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
 & & & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Como $0 = k' \circ g \circ h = k \circ h \colon N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} H/[H,H] \longrightarrow N$, $h$ se factoriza a través de $H_1(G,N)$ y, por lo tanto, la siguiente sucesión es exacta:

$$H_2(G,N) \longrightarrow H_2(Q,N) \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} H/[H,H] \longrightarrow H_1(G,N) \longrightarrow H_1(Q,N) \longrightarrow 0$$

y coincide con la de 4.1 si $N$ es un $Q$-módulo trivial. Para el caso en que $N = \mathbb{Z}$, se tiene que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} H/[H,H] \cong H/[G,H]$, donde $[G,H]$ denota el subgrupo normal de $H$ generado por los elementos de la forma $ghg^{-1}h^{-1}$, $g \in G$, $h \in H$ (véase el problema 3.5). Por los resultados de IV.3, 4.1 se transforma en

$$H_2(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(Q,\mathbb{Z}) \longrightarrow H/[G,H] \longrightarrow G/[G,G] \longrightarrow Q/[Q,Q] \longrightarrow 0$$

Si en 4.2 consideramos $N = \mathbb{Z}$, obtenemos

**4.3**
$$\begin{aligned} H_2(G,\mathbb{Z}) &\cong ker(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} R/[R,R] \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[F]} IF) \\ &\cong ker(R/[F,R] \longrightarrow F/[F,F]) \\ &\cong (R \cap [F,F])/[F,R] \end{aligned}$$

Veamos ahora otra situación donde aparece $H_2(G,\mathbb{Z})$.

**4.4 DEFINICION.** Una *extensión central* de $G$ es una sucesión exacta de grupos
$$1 \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$
tal que $K \subset Z(E)$, donde $Z(E)$ denota el centro de $E$.

**4.5 DEFINICION.** Una *extensión central universal* de $G$ es una extensión central
$$1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1$$
tal que, dada cualquier extensión central
$$1 \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$
existe un homomorfismo único $h: U \longrightarrow E$ tal que el siguiente diagrama conmuta:
$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & U & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow h & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Obsérvese que, si existe una extensión central universal, ésta es única, salvo isomorfismo. Si una extensión central se escinde
$$1 \longrightarrow K \longrightarrow E \rightleftarrows G \longrightarrow 1,$$
entonces $E \cong K \times G$.

Recordemos que un grupo $G$ es *perfecto* si $G = [G,G]$. Sea $G$ un grupo perfecto y escojamos un homomorfismo $F \twoheadrightarrow G$ donde $F$ es un grupo libre. Sea $R = ker(F \twoheadrightarrow G)$. Entonces $[R,F]$ es un subgrupo normal de $F$. Como $G \cong F/R$, existe un epimorfismo $\psi: F/[R,F] \longrightarrow G$ tal que $ker\ \psi \subset Z(F/[R,F])$. Luego,
$$[F/[R,F], F/[R,F]] = [F,F]/[R,F]$$

es una extensión central perfecta de $G$ (véase el problema 4.4). Sea $1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1$ cualquier otra extensión central de $G$. Como $F$ es libre, existe un homomorfismo $h\colon F \longrightarrow U$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \| \\ U & \longrightarrow & G \end{array}$$

Como $1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1$ es una extensión central, $h([R,F]) = 1$. Luego, $h$ induce un homomorfismo $F/[R,F] \longrightarrow U$ y, si lo restringimos a $[F,F]/[R,F]$, tendremos un homomorfismo de $[F,F]/[R,F] \longrightarrow U$ que es único (véase el problema 4.5). Por lo tanto,

$$1 \longrightarrow ker\ \phi \longrightarrow [F,F]/[R,F] \xrightarrow{\phi} G \longrightarrow 1$$

es una extensión central universal de $G$. Pero $ker\ \phi$ no es otra cosa que $(R \cap [F,F])/[R,F]$. Por 4.3, $ker\ \phi = H_2(G,\mathbb{Z})$. Entonces $H_2(G,\mathbb{Z})$ es el núcleo de una extensión central universal

$$1 \longrightarrow H_2(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow [F,F]/[R,F] \longrightarrow G \longrightarrow 1\ .$$

## PROBLEMAS

**4.1** Sea $H \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ una sucesión exacta corta de grupos y $N$ un $G$-módulo. Pruebe que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow Der(Q,N) \longrightarrow Der(G,N) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}[Q]}(H/[H,H],N) \longrightarrow H^2(Q,N) \longrightarrow H^2(G,N).$$

**4.2** Establezca los isomorfismos de 4.3.

**4.3** Pruebe que las sucesiones del Lema 4.1 y del problema 4.1 son naturales.

**4.4** Demuestre que, si

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

es una extensión central de $G$, con $G$ un grupo perfecto, entonces el subgrupo conmutador $[U,U]$ de $U$ es perfecto y existe un epimorfismo de $[U,U] \twoheadrightarrow G$. A la extensión

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow [U,U] \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

se le llama *extensión central perfecta*.

**4.5** Sean $1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1$ y $1 \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ extensiones centrales. Demuestre que, si $U$ es perfecto, entonces existe a lo sumo un homomorfismo $h: U \longrightarrow E$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & U & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow h & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

**4.6** Con los datos del problema 4.5, pruebe que, si $U$ no es perfecto, entonces existe más de un homomorfismo de $U$ en $E$ que hace conmutar el diagrama del problema 4.5. (Sugerencia: considérese $E = G \times N$, con $N$ un grupo abeliano).

**4.7** Utilizando los problemas 4.4, 4.5 y 4.6, pruebe que una extensión central $1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1$ es universal si, y sólo si, $U$ es perfecta y toda extensión central de $U$ se escinde.

**4.8** Pruebe que si $G$ es un grupo libre con base $X$ entonces $IG$ es un $G$-módulo libre con base $X - 1 = \{x - 1 \mid x \in X\}$.

**4.9** Pruebe que si $G$ es un grupo libre entonces $H_n(G,N) = H^n(G,M) = 0$ para $n \geq 2$ y $G$-módulos $N$ y $M$. (Sugerencia: utilice el problema anterior para tener una $G$-resolución libre $IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$).

## **IV**.5 H$^n$(G,N) Y EXTENSIONES CRUZADAS

En esta sección interpretaremos la cohomología de un grupo $G$ con coeficientes en un módulo $N$ en términos de clases de $n$-extensiones cruzadas de $N$ por $G$.

Sea $M$ un módulo cruzado (problema I.1.9). Obsérvese que un $G$-módulo cruzado, a diferencia de un $G$-módulo, no es necesariamente abeliano. Sea $(H,\partial) \in Xext^n(G,N)$ una $n$-extensión cruzada de $N$ por $G$ (problemas III.6.7 y III.6.8).

Consideremos el diagrama del problema IV.3.8

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} P^n\colon 0 & \longrightarrow & J_n & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & G & \longrightarrow 1 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu} & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \| & \\ (H,\partial)\colon 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\partial_n} & N_{n-1} & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow 1 \end{array}$$

donde $P^n$ es la $n$-extensión cruzada libre (proyectiva) de $G$ (problemas III.2.6, 2.7 y 2.8). Por el problema III.6.13, existe una función bien definida

$$\nu_*\colon Opext^n(G,J_n) \longrightarrow Opext^n(G,N)$$

dada por $\nu_*[P^n] = [\nu P^n]$, donde $\nu P^n$ es la $n$-extensión cruzada de $N$ por $G$

$$\nu P^n\colon 0\longrightarrow N\longrightarrow N\vee C_{n-1}\longrightarrow C_{n-2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_1\longrightarrow L\longrightarrow G\longrightarrow 1\ ,$$

por lo que cada clase de equivalencia $[(H,\partial)] \in Opext^n(G,N)$ tiene un representante de la forma $\nu P^n$. De esto se desprende la siguiente

**5.1 PROPOSICION.**

a) La función $\varphi\colon Hom_L(J_n,N) \longrightarrow Opext^n(G,N)$ dada por $\varphi(\nu) = [\nu P^n]$ es suprayectiva.

b) Con respecto a la suma de Baer, $\varphi$ es un epimorfismo de grupos abelianos.

**Demostración.** a) Es inmediata por el análisis que precede a la proposición. b) Es claro que $Hom_L(J_n,N)$ y $Opext^n(G,N)$ son grupos abelianos.

Sean $\nu_1,\nu_2 \in Hom_L(J_n,N)$ y $P^n$ la $n$-extensión cruzada libre (proyectiva)

$$P^n\colon 0\longrightarrow J_n\longrightarrow C_{n-1}\longrightarrow C_{n-2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_1\longrightarrow L\longrightarrow G\longrightarrow 1\ .$$

Queremos ver que $[(\nu_1+\nu_2)P^n] = [\nu_1 P^n] + [\nu_2 P^n]$.

$$\begin{aligned}[\nu_1 P^n] + [\nu_2 P^n] &= \bigtriangledown_{N_*} \triangle_G^* (\nu_1 P^n \oplus \nu_2 P^n) \\ &= [\bigtriangledown_N (\nu_1 P^n \oplus \nu_2 P^n) \triangle_G] \\ &= [\bigtriangledown_N (\nu_1 \oplus \nu_2)(P^n \oplus P^n) \triangle_G].\end{aligned}$$

Pero $(P^n \oplus P^n)\triangle_G \equiv \triangle_{J_{n*}}(P^n)$ (problema III.6.14) y

$$[\bigtriangledown_N(\nu_1 \oplus \nu_2)(P^n \oplus P^n)\triangle_G] = [\bigtriangledown_N(\nu_1 \oplus \nu_2) \triangle_{J_n} (P^n)].$$

Por otro lado, si $t \in J_n$,

$$\begin{aligned}\bigtriangledown_N(\nu_1 \oplus \nu_2) \triangle_{J_n} (t) &= \bigtriangledown_N(\nu_1 \oplus \nu_2)(t,t) \\ &= \nu_1(t) + \nu_2(t) \\ &= (\nu_1 + \nu_2)(t).\end{aligned}$$

Además, es fácil comprobar que $\bigtriangledown_N(\nu_1 \oplus \nu_2)\triangle_{J_n}$ es un $L$-homomorfismo, así que

$$\bigtriangledown_N(\nu_1 \oplus \nu_2)\triangle_{J_n} = (\nu_1 + \nu_2) \in Hom_L(J_n, N).$$

Entonces $(\nu_1 + \nu_2)P^n \equiv \bigtriangledown_N(\nu_1 P^n \oplus \nu_2 P^n)\triangle_G$.■

**5.2 LEMA.** Sea $\nu \in Hom_L(J_n, N)$ un morfismo que puede extenderse sobre $C_{n-1}$ a

(i) una derivación $d_L: L \longrightarrow N$, si $n = 1$.

(ii) un $L$-homomorfismo $\omega: C_1 \longrightarrow N$, si $n = 2$.

(iii) un $G$-homomorfismo $\tau: C_{n-1} \longrightarrow N$, si $n \geq 3$.

Entonces, la extensión

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow C_{n-1} \vee N \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow 1$$

se escinde ($J_1 = K,\ J_0 = G$).

**Demostración.** Sea $n = 1$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\nu"'] & L \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, "d_L"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\psi"] & N \vee L \arrow[r, "h"] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

con $d_L: L \longrightarrow N$ una derivación que extiende a $\nu$, i.e., $d_L i = \nu$. Luego, $\psi\nu = \psi d_L i = \varphi i$, y $(\varphi - \psi d_L)i = 0$. Como $G = L/iK$, existe un homomorfismo único $s\colon G \longrightarrow N \vee L$ tal que $\varphi - \psi d_L = s\partial_0$, i.e., el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & L \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[dr, "\varphi-\psi d_L"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "s"] & 1 \\ & & & N \vee L & \end{tikzcd}$$

Luego, $h\varphi = hs\partial_0$ y, como $h\varphi = \partial_0$, se tiene que $hs = 1_G$. Por lo tanto, para $n = 1$, la extensión se escinde.

Sea $n = 2$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\nu"] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi"] & L \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\psi"] & N \vee C_1 \arrow[r] & L \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

donde $N$ posee una estructura de $L$-módulo a través de $\partial_0$, i.e., ${}^{y}x = {}^{\partial_0(y)}\ x \quad (y \in L, x \in N)$. Sea $\omega\colon C_1 \longrightarrow N$ un $L$-homomorfismo que preserva las acciones y tal que $\omega i = \nu$. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J_2 \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, "\omega"'] & J_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\psi"] & N \vee C_1 \arrow[r] & J_1 \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

y $\varphi - \psi\nu$ se factoriza a través de un homomorfismo $s\colon J_1 \longrightarrow N \vee C_1$. Para $n \geq 3$, la demostración es similar: $(Hom_L(J_n, N) = Hom_G(J_n, N)$ para $n \geq 2)$.■

**5.3 PROPOSICION.** Sea $n \geq 2$, $\nu \in Hom_L(J_n, N)$. Si la extensión

$$E\colon 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\psi} N \vee C_{n-1} \xrightarrow{h} J_{n-1} \longrightarrow 1$$

se escinde, entonces $\nu P^n \equiv (0)$.

**Demostración.** Como $E$ se escinde $N \vee C_{n-1} \cong N \ltimes J_{n-1}$. Puesto que $\psi(N) \subset Z(N \vee C_{n-1})$, se tiene que $N \ltimes J_{n-1} \cong N \ltimes J_{n-1}$. Luego, $E$ es equivalente a la extensión

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N \times J_{n-1} \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow 1$$

que se escinde por la izquierda mediante un homomorfismo

$$s'\colon N \vee C_{n-1} \cong N \times J_{n-1} \longrightarrow N$$

el cual hace conmutar al siguiente diagrama y, por lo tanto, $\nu P^n \equiv (0)$:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\nu P^n\colon 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N\vee C_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-2} & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\partial_0} & G & \longrightarrow 1\\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle s'} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \| & \\
(0)\colon 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G & \longrightarrow 1.\blacksquare
\end{array}$$

**5.4 TEOREMA.** El epimorfismo $\phi\colon Hom_L(J_n, N) \longrightarrow Opext^n(G, N)$ induce un isomorfismo $\Phi\colon H^{n+1}(G, N) \longrightarrow Opext^n(G, N)$ de grupos abelianos.

**Demostración.** Sea $P^n$ la $n$-extensión cruzada libre (proyectiva) de $G$

$$P^n\colon \cdots\longrightarrow 0\longrightarrow J_n\longrightarrow C_{n-1}\longrightarrow C_{n-2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_1\longrightarrow L\longrightarrow G\longrightarrow 1\ .$$

Entonces obtenemos el complejo (problema IV.3.6 c)

$$Hom(P^n, N)\colon Der(L, N)\longrightarrow Hom_L(C_1, N)\longrightarrow Hom_G(C_2, N)\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow Hom_G(C_{n-1}, N)\longrightarrow Hom_G(J_n, N)\longrightarrow 0$$

donde, por definición,

$$H^n(Hom(P^n, N)) = Hom_G(J_n, N)/\delta(Hom_G(C_{n-1}, N)) = coker\ \delta.$$

Luego, $H^m(Hom(P^n, N)) = H^{m+1}(G, N)$ para $m \geq 1$ (problema IV.3.7). Si, en particular $m = n$, la regla $\nu \longmapsto \nu P^n$ induce la función

$$\Phi\colon H^{n+1}(G, N) = Hom_G(J_n, N)/\delta(Hom_G(C_{n-1}, N)) \longrightarrow Opext^n(G, N)$$

pues

$$\nu + \delta(Hom_G(C_{n-1}, N) \longmapsto \varphi(\nu) = [\nu P^n].$$

Es fácil ver que $\Phi$ esta bien definida (pues $\Phi(\delta(Hom_G(C_{n-1}, N))) = [(0)]$), es un homomorfismo y es suprayectivo (Proposición 5.1).

Veamos que $\Phi$ es inyectivo: supongamos que $\mu P^n \equiv \nu P^n$, donde $\mu P^n$ y $\nu P^n$ son representantes de cualesquiera dos elementos en $Opext^n(G, N)$. Luego, existe una colección finita (problema III.6.11)

$$\{\ (H_i, \partial_i) \in Xext^n(G, N)\ \}, \quad 1 \leq i \leq r$$

donde $\mu P^n = (H_i, \partial_1)$ y $\nu P^n = (H_r, \partial_r)$ junto con morfismos de extensiones cruzadas

$$\alpha_{k-1} = (1_N, \alpha_{k-1}, 1_G)\colon (H_{k-1}, \partial_{k-1}) \longrightarrow (H_k, \partial_k)$$

$$\alpha_k = (1_N, \alpha_k, 1_G): (H_{k+1}, \partial_{k+1}) \longrightarrow (H_k, \partial_k)$$

para todo entero positivo $k$, tal que $2 \leq k \leq r-1$. La identidad $1_G: G \longrightarrow G$ induce un morfismo

$$(\nu_i, \beta_i, 1_G): P^n \longrightarrow (H_i, \partial_i)$$

de $n$-extensiones cruzadas (problema III.6.8.b)

$$\begin{array}{ccc}
P^n & \xrightarrow{(\nu_1,\beta_1,1_G)} & \mu P^n \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_1} \\
\| & & (H_2, \partial_2) \\
 & & \big\uparrow{\scriptstyle \alpha_2} \\
P^n & \xrightarrow{(\nu_3,\beta_3,1_G)} & (H_3, \partial_3) \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_3} \\
\| & & \vdots \\
 & & \big\uparrow \\
P^n & \longrightarrow & (H_{r-3}, \partial_{r-3}) \\
 & & \big\downarrow \\
\| & & (H_{r-2}, \partial_{r-2}) \\
 & & \big\uparrow \\
P^n & \longrightarrow & (H_{r-1}, \partial_{r-1}) \\
\| & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{r-1}} \\
P^n & \xrightarrow{(\nu_r,\beta_r,1_G)} & \nu P^n
\end{array}$$

donde $\nu_1 = \mu$ y $\nu_r = \nu$. Las composiciones

$$\alpha_{k-1}(\nu_{k-1}, \beta_{k-1}, 1_G) \quad \text{y} \quad \alpha_k(\nu_{k+1}, \beta_{k+1}, 1_G), \quad 2 \leq k \leq r-1, \quad k \text{ par},$$

dan lugar a los morfismos

$$(\nu_{k-1}, \alpha_{k-1}\beta_{k-1}, 1_G): P^n \longrightarrow (H_k, \partial_k) \text{ y } (\nu_{k+1}, \alpha_k\beta_{k+1}, 1_G): P^n \longrightarrow (H_k, \partial_k)$$

que (problema III.6.9a) son homotópicos

$$\begin{array}{cccccccccccc}
P^n: & 0 & \longrightarrow & J_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & L & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & & {\scriptstyle \nu_{k-1}}\big\downarrow\big\downarrow{\scriptstyle \nu_{k+1}} & \swarrow{\scriptstyle (\Sigma_k)_{n-1}} & & & & & \big\|{\scriptstyle 1_G} & & \\
(H_k, \partial_k): & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & (N_k)_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

y $\nu_{k-1} - \nu_{k+1} = (\Sigma_k)_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1}(\Sigma_k)_n$.

Como $\partial_{n+1}(\Sigma_k)_n = 0$, tenemos que $\nu_{k-1} - \nu_{k+1} = (\Sigma_k)_{n-1}\partial_n$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mu - \nu &= \nu_1 - \nu_r \\
&= \nu_1 - \nu_3 + \nu_3 - \cdots - \nu_{r-2} + \nu_{r+2} - \nu_r \\
&= (\Sigma_2)_{n-1}\partial_n + (\Sigma_4)_{n-1}\partial_n + \cdots + (\Sigma_{r-1})_{n-1}\partial_n \\
&= ((\Sigma_2)_{n-1} + (\Sigma_4)_{n-1} + \cdots + (\Sigma_{r-1})_{n-1})\partial_n \ .
\end{aligned}$$

Como $\partial_n$ es la inclusión, $\mu - \nu$ puede extenderse a un homomorfismo $\omega\colon C_{n-1} \longrightarrow N$ dado por

$$\begin{aligned}\omega &= (\Sigma_2)_{n-1} + (\Sigma_4)_{n-1} + \cdots + (\Sigma_{r-1})_{n-1}\\ &= \sum_{k=2}^{r-1} (\Sigma_k)_{n-1},\ k \text{ par.}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu - \nu \in \partial(Hom_G(C_{n-1}, N))$. Luego, $\mu = \nu$.■

## PROBLEMAS

**5.1** Sea $G$ un $p$-grupo y $C$ un subgrupo cíclico de $G$ de índice $p$, i.e., $\mid G \mid = p^n$ y $\mid C \mid = p^{n-1}$, $n \geq 2$. Compruebe que, si $\partial$ denota la inclusión de $C$ en $G$, entonces $(C, G, \partial)$ es un módulo cruzado.

**5.2** Sea $(G, \partial) = 0 \longrightarrow C \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$ la extensión cruzada correspondiente al problema 5.1, donde $Q = G/\partial C$ es un grupo abeliano de orden $p$. Demuestre que, si $Q$ actúa trivialmente sobre $C$, entonces $G$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/p^{n-1} \times \mathbb{Z}/p$, o a $\mathbb{Z}/p^n$.

## IV.6 APLICACIONES

A continuación calcularemos la homología y cohomología de un grupo cíclico (multiplicativo) $C_n$ con coeficientes en un $C_n$-módulo $M$.

**6.1 PROPOSICION.** Sea $C_n$ un grupo cíclico de orden $n$ con generador $g$. Entonces

$$W\colon \cdots \xrightarrow{D} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{N} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{D} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde $D = g - e$, y $N = e + g + g^2 + \cdots + g^{n-1}$ es una $C_n$-resolución libre de $\mathbb{Z}$.

**Demostración.** $\mathbb{Z}C_n$ es el anillo de todos los polinomios $u = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i g^i$ con coeficientes enteros tales que $g^n = e$. Dos elementos particulares de $\mathbb{Z}C_n$ son $N$ y $D$. Obsérvese que $ND = 0 = DN$, de manera que $W$ es semiexacta. Como $ker\ \epsilon = IC_n = im\ D$, pues $IC_n$ es libre en $g - e$, $W$ es exacta en grado cero.

Supongamos que $u = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i g^i \in ker\ D$. Entonces $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1}$ y, por lo tanto, $u = \lambda_0 N \in im\ N$. Por otro lado, si $u \in ker\ N$ entonces

$$Nu = 0 = \sum_{j=0}^{n-1} (\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i) g^j.$$

Luego, $\sum \lambda_i = 0$ y

$$u = -D[\lambda_0 e + (\lambda_0 + \lambda_1)g + \cdots + (\lambda_0 + \cdots + \lambda_{n-1})g^{n-1}] \in im\ D.$$

Como $\mathbb{Z}C_n$ es conmutativo, $W$ es una $C_n$-resolución libre de $\mathbb{Z}$.■

**6.2 PROPOSICION.** Sea $C_n$ un grupo cíclico de orden $n$ y $M$ un $C_n$-módulo. Entonces

$$H_i(C_n, M) = \begin{cases} M_{C_n} & i = 0 \\ ker\ D/N(M) & i = 2n-1 \\ ker\ N/D(M) & i = 2n \end{cases}$$

y

$$H^i(C_n, M) = \begin{cases} M^{C_n} & i = 0 \\ ker\ N/D(M) & i = 2n-1 \\ ker\ D/N(M) & i = 2n \end{cases} .$$

**Demostración.** Aplíquese $\_ \otimes_{\mathbb{Z}C_n} M$ y $Hom_{\mathbb{Z}C_n}(\_, M)$ a la resolución $W$ de 6.1 y calcúlese la homología y la cohomología respectiva.■

La proposición precedente implica que $M = \mathbb{Z}$ no admite una resolución proyectiva finita como $C_n$-módulo trivial.

**6.3 PROPOSICION.** Sea $C$ un grupo cíclico infinito con generador $g$ y $M$ un $C$-módulo. Entonces

$$H_i(C,M) = \begin{cases} M_C & i=0 \\ M^C & i=1 \\ 0 & i\neq 0,1 \end{cases} \quad \text{y} \quad H^i(C,M) = \begin{cases} M^C & i=0 \\ M_C & i=1 \\ 0 & i\neq 0,1 \end{cases}$$

**Demostración.** Considérese la resolución sobre $\mathbb{Z}C$ de $\mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}C \xrightarrow{g-e} \mathbb{Z}C \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

aplíquese $\_ \otimes_{\mathbb{Z}C} M$ y $Hom_{\mathbb{Z}C}(\_, M)$ y calcúlese la homología y cohomología.■

Recordemos que un grupo $E$ es el producto directo de dos de sus subgrupos normales $N$ y $G$ si $NG = E$ y $N \cap G = \{1\}$. Si pedimos que únicamente uno de sus subgrupos, digamos $N$, sea normal y cumpla que $NG = E$ y $N \cap G = \{1\}$, entonces diremos que $E$ es el *producto semidirecto* de $N$ y $G$ y lo denotaremos con $E = N \ltimes G$. Por el segundo teorema del isomorfismo tenemos que $G/N \cap G \cong NG/N$, es decir $G \cong E/N$, de donde se desprende que la sucesión

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

es una extensión de $N$ por $G$ (i.e., una sucesión exacta corta de grupos).

La equivalencia de dos extensiones de grupos se define de manera análoga a III.6.5, salvo que ahora incluímos la posibilidad de que los grupos sean no abelianos. Sin embargo, el problema que trataremos será el de clasificar las extensiones de un grupo abeliano aditivo $N$ por $G$, salvo equivalencia. Esto es, encontrar todos los grupos $E$ tales que tengan a $N$ como subgrupo normal y a $G$ como cociente.

Por el problema 1.6, $G$ actúa en $N$ por conjugación, es decir, si $e \in E$, $n \in N$ y $g = p(e)$, entonces $p(e)i(n) = ei(n)e^{-1}$ o bien, $ei(n) = i(gn)e$. Supongamos que la extensión de $N$ por $G$ se escinde, esto es, que existe un homomorfismo $s: G \longrightarrow E$ tal que $ps = 1_G$. Está claro que se tiene una biyección de los conjuntos $N \times G$ y $E$, dada por $(n, g) \longmapsto i(n)s(g)$. Para hacer de esta biyección un isomorfismo de grupos, es necesario que un elemento de $E$ de la forma $(i(n)s(g))(i(n')s(g'))$ se pueda escribir como $i(n'')s(g'')$. Pero

$$\begin{aligned} i(n)s(g)i(n')s(g') &= i(n)i(gn')es(g') \\ &= i(n)i(gn')s(g)s(g') \\ &= i(n+gn')s(gg') \end{aligned}$$

donde $s(g) = e$, de aquí que el producto de dos elementos de $N \times G$ deba ser de la forma $(n, g)(n', g') = (n + gn', gg')$. Por lo tanto, hemos encontrado que $N \times G$, con este producto chistoso, debe ser precisamente $N \ltimes G$. En resumen, si

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

se escinde, entonces es de la forma

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N \ltimes G \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

Obsérvese que la proyección $p'\colon N \ltimes G \longrightarrow N$ no es un homomorfismo, pero sí es una derivación (véase el problema 6.5 b).

El producto semidirecto $\ltimes$ posee la siguiente propiedad universal.

**6.4 TEOREMA.** Sean $E$, $G$ grupos y $N$ un $G$-módulo. Entonces, para todo homomorfismo de grupos $q\colon E \longrightarrow G$ y para toda derivación $q'\colon E \longrightarrow N$, existe un homomorfismo único $h\colon E \longrightarrow N \ltimes G$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} N & \xleftarrow{q'} & E & \xrightarrow{q} & G \\ \| & & \downarrow h & & \| \\ N & \xleftarrow{p'} & N \ltimes G & \xrightarrow{p} & G \end{array} \quad . \blacksquare$$

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es que el conjunto de escisiones de $G$ en $N \ltimes G$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de derivaciones de $G$ en $N$ (basta tomar $E = G$ y $p = 1_G$ en 6.4).

También 6.4 nos dice que solamente existe, salvo equivalencia, una extensión escindible de $N$ por $G$, dada una acción de $G$ en $N$. A continuación, dada una extensión escindible, clasificaremos todas las posibles escisiones.

Sean $s_1, s_2\colon G \longrightarrow N \ltimes G$ dos escisiones. Diremos que son $N$-conjugadas si existe $n \in N$ tal que $s_1(g) = i(n)s_2(g)i(n)^{-1}$ para toda $g \in G$. Calculemos $s_1(g)$ en términos de derivaciones:

$$\begin{aligned} s_1(g) &= (q_1(g), g) \\ &= i(n)(q_2(g), g)i(n)^{-1} \\ &= (n + q_2(g), g)(-n, 1) \\ &= (n + q_2(g) - gn, g) \ . \end{aligned}$$

Luego, $q_1(g) = n + q_2(g) - gn$. Por lo tanto, $q_1$ y $q_2$ corresponden a escisiones $N$-conjugadas si, y sólo si, $q_2 - q_1$ es de la forma $gn - n$ para alguna $n$ fija, es decir, si, y sólo si, es una derivación principal. Lo anterior implica la siguiente

**6.5 PROPOSICION.** Sea $N$ un $G$-módulo y

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N \ltimes G \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

una extensión escindible. Entonces las clases $N$-conjugadas de dicha extensión están en correspondencia biyectiva con las clases de cohomología de $H^1(G,N)$.■

Como una aplicación de la resolución estándar no normalizada (problema 2.4b) veamos el siguiente lema, que nos será muy útil posteriormente.

**6.6 LEMA.** Sea $G$ un grupo de orden $k$. Entonces

$$kH^i(G,N) = 0 = kH_i(G,N)$$

para todo $G$-módulo $N$ y para toda $i > 0$.

**Demostración.** Sea

$$F\colon \cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

la resolución estándar no normalizada de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$. Consideremos $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(F,N)$, i.e.,

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(F_0,N) \longrightarrow \cdots .$$

Sea $h \in Hom_{\mathbb{Z}[G]}(F_n,N)$ y definamos $f \in Hom_{\mathbb{Z}[G]}(F_{n-1},N)$ mediante

$$f(g_1,\ldots,g_{n-1}) = \sum_{g\in G} h(g_1,\ldots,g_{n-1},g).$$

Considérese la fórmula para $\delta h$. Luego, súmese

$$\delta h(g_1,\ldots,g_n) = g_1 h(g_2,\ldots,g_n) + \sum_{i=1}^{n-2}(-1)^i h(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g) + \\ + (-1)^{n-1}h(g_1,\ldots,g_ng) + (-1)^n h(g_1,\ldots,g_n)$$

sobre todas las $g = g_{n+1}$. Obsérvese que $g_n g$ varía conforme varía $g$. Luego, si $\delta h = 0$, entonces

$$0 = g_1 f(g_2, \ldots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n) +$$
$$+ (-1)^{n-1} f(g_1, \ldots, g_{n-1}) + k(-1)^n h(g_1, \ldots, g_n).$$

Luego, $\delta f = k(-1)^n h$ y, por lo tanto, $kh$ es una cofrontera. El caso para homología es semejante.■

**6.7 EJEMPLO.** Como vimos en 6.2,

$$H^i(C_3, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & i \text{ impar} \\ \mathbb{Z}/3 & i \text{ par} \end{cases}$$

Luego, es claro que $3 \cdot H^i(C_3, \mathbb{Z}) = 0$.

**6.8 TEOREMA.** (Schur-Zassenhaus.) Sea $E$ un grupo finito de orden $nk$ con $(n, k) = 1$. Supongamos que $N$ es un subgrupo normal de $E$ de orden $k$. Entonces $E$ contiene subgrupos de orden $n$ y cualesquiera dos subgrupos de orden $n$ de $E$ son conjugados.

**Demostración.** Considérese la extensión

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

Por 6.6, $kH^i(G, N) = 0$ para toda $i > 0$. En particular, si $k \neq 0$, $kH^2(G, N) = 0$, lo que implica que $H^2(G, N) = 0$. Por 5.4, $Opext^1(G, N)$ consiste solamente en un elemento, por lo que la extensión se escinde y $E = N \ltimes G$. Luego, $E$ tiene subgrupos de orden $k$.

Sea $H \subset E$ un subgrupo de orden $n$ de $E$. Es evidente que $H \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrowtail G$ es un isomorfismo. Luego, la extensión se escinde.

Tambien $H^1(G, N) = 0$; luego, (dejamos al lector probar que) cualesquiera dos grupos de orden $n$ son conjugados.■

**6.9 TEOREMA.** Sea $G$ un grupo de orden $k \neq 0$ y $N$ un $KG$-módulo, $K$ un campo cuya característica no divida a $k$. Entonces $H^i(G, N) = 0$ para toda $i > 0$.

**Demostración.** Consideremos $k: N \longrightarrow N$ la multiplicación por $k$. Como la característica de $K$ no divide a $k$, $k$ es un isomorfismo de $G$-módulos cuyo inverso es $1/k: N \longrightarrow N$. Luego,

$$k^*: H^i(G, N) \longrightarrow H^i(G, N)$$

es un isomorfismo. Como $H^i(G, \_)$ es un funtor aditivo, $k^*$ resulta ser la multiplicación por $k$. Por 6.6, $kH^i(G, N) = 0$ para $i > 0$. Como $k \neq 0$, $H^i(G, N) = 0$ para toda $i > 0$.■

## PROBLEMAS

**6.1** Calcule explícitamente $H_*(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$ y $H^*(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$, sin utilizar 6.2.

**6.2** Calcule explícitamente $H_*(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}/2)$ y $H^*(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}/2)$, sin utilizar 6.2.

**6.3** Calcule explícitamente $H_*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ y $H^*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

**6.4** Calcule explícitamente $H_*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2)$ y $H^*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3)$.

**6.5**

a) Compruebe que el producto semidirecto $N \ltimes G$, definido después de 6.3, es asociativo con elemento neutro $(0, 1)$ y con inverso $(n, g)^{-1} = (-g^{-1}n, g^{-1})$.

b) Compruebe que la proyección $p': N \ltimes G \longrightarrow N$ es una derivación.

**6.6**

a) Pruebe el Teorema 6.4. (Sugerencia: considere $N$ como un $E$-módulo usando $q$, y defina $h(e) = (q'(e), q(e))$, $e \in E$).

b) Compruebe el inverso del Teorema 6.4: todo homomorfismo de grupos $h: E \longrightarrow N \ltimes G$ determina un homomorfismo $q: E \longrightarrow G$ y una derivación $q': E \longrightarrow N$.

**6.7** En el Teorema 6.6, proporcione los detalles de la unicidad, salvo conjugación, del subgrupo de orden $k$.

**6.8** En el Teorema 6.7, pruebe que, si $k: N \longrightarrow N$, $k^*$ es un isomorfismo que es precisamente la multiplicación por $k$.

**6.9** Sean $W, W'$ y $W''$ $KG$-módulos, y $K$ un campo cuya característica no divida al orden de un grupo $G$. Pruebe que toda sucesión exacta corta $W' \rightarrowtail W \twoheadrightarrow W''$ se escinde si, y sólo si,

$$0 \longrightarrow Hom_{KG}(W'', W') \longrightarrow Hom_{KG}(W, W') \longrightarrow Hom_{KG}(W', W') \longrightarrow 0$$

es exacta. (Sugerencia: proporcione a $Hom_K(\_, W')$ una acción de $G$ mediante la acción diagonal como sigue: si $\varphi: W \longrightarrow W'$ es una transformación lineal, $(g\varphi)(w) = g\varphi(g^{-1}w)$, $g \in G$, $w \in W$.)

**6.10** En la notación del problema 6.9, pruebe que $\varphi: W \longrightarrow W'$ es un homomorfismo de $G$-módulos si, sólo si, $\varphi$ es invariante en el $G$-módulo $Hom_K(W, W')$.

**6.11** Utilizando los problemas 6.9 y 6.10, demuestre el siguiente teorema (Maschke): sea $G$ un grupo de orden $k$ y $K$ un campo cuya característica no divida a $k$. Entonces todo $KG$-módulo es semisimple. (Sugerencia: utilice el problema 1.2 y pruebe que la siguiente sucesión es exacta utilizando el Teorema 6.10 para $i = 1$:

$$0 \longrightarrow H^0(G, Hom_k(W'', W)) \longrightarrow H^0(G, Hom_k(W, W)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^0(G, Hom_k(W', W'')) \longrightarrow 0.)$$

**6.12**

a) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a^p \equiv 1 \ (mod\ p^{n-1})$, $n \geq 3$. Pruebe que, si $p$ es un primo impar, entonces $a \equiv 1 \ (mod\ p^{n-2})$ y que, si $p = 2$, entonces $a \equiv +-1 \ (mod\ 2^{n-2})$.

b) Sea $(G, \partial): 0 \longrightarrow C \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$ la extensión cruzada correspondiente a los problemas 5.1 y 5.2. Pruebe que, si $p$ es un primo impar, la acción de $Q$ sobre $C$ está dada como la multiplicación por $1 + p^{n-2}$ (utilice la parte a)).

c) Sea $(C, G, \partial)$ el módulo cruzado del problema 5.1. Demuestre que, si $p$ es un primo impar y la acción de $Q$ sobre $C$ es no trivial, entonces $G$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/p^{n-1} \ltimes \mathbb{Z}/p$. (Sugerencia: utilice la proposición 6.2 para comprobar que $H^2(Q, C) = 0$, lo cual implica que la única clase de equivalencia de extensiones cruzadas de $C$ por $Q$ es la de la extensión trivial.)

**6.13**

a) En la terminología del problema 6.12 considere el caso $p = 2$. Sea $a$ un generador de $C \cong \mathbb{Z}/2^{n-1}$, $n \geq 3$, y $t \in Q$. Entonces $t_a = s(t)a(s(t))^{-1} = ra$ para alguna $r$. Utilice el problema 6.12a y compruebe que $r$ tiene tres posibilidades: $-1$, $1 + 2^{n-2}$ y $-1 + 2^{n-2}$.

b) Sea $p = 2$ y $(C, G, \partial)$ el módulo cruzado del problema 5.1. Demuestre que si $Q$ actúa sobre $C$ como multiplicación por $r = -1$, entonces $G$ es isomorfo al grupo diedro $D_{2m} = \mathbb{Z}/m \ltimes \mathbb{Z}/2$ o al grupo cuaternio generalizado $Q_{4m}$. (Sugerencia: compruebe que $Opext^1(Q, C) \cong \mathbb{Z}/2$.)

c) Sea $p = 2$ y $(C, G, \partial)$ el módulo cruzado del problema 5.1. Demuestre que, si $Q$ actúa sobre $C$ como multiplicación por $r = 1 + 2^{n-2}$, entonces $G$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}/p^{n-1} \ltimes \mathbb{Z}/p$, $n \geq 3$.

d) Sea $p = 2$ y $(C, G, \partial)$ el módulo cruzado del problema 5.1. Demuestre que, si $Q$ actúa sobre $C$ como multiplicación por $r = -1+2^{n-2}$, entonces la sucesión $0 \longrightarrow C \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$ se escinde y $G$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2^{n-1} \ltimes \mathbb{Z}/2$, $n \geq 4$.

**6.14** Compruebe que los grupos $\mathbb{Z}/p^n$, $\mathbb{Z}/p^{n-1} \times \mathbb{Z}/p$, $\mathbb{Z}/p^{n-1} \ltimes \mathbb{Z}/p$, $D_{2m}$, $Q_{4m}$ y $\mathbb{Z}/2^{n-1} \ltimes \mathbb{Z}/2$, dados en los problemas 5.2, 6.12 y 6.13, son $p$-grupos que contienen subgrupos cíclicos de índice $p$, y concluya que si $G$ es un $p$-grupo y $C$ un subgrupo cíclico de índice $p$ ($p$ primo), entonces $G$ es isomorfo a alguno de los grupos arriba citados.

# Capítulo V

# K-TEORÍA ALGEBRAICA CLÁSICA

En este capítulo se estudian los $K$-grupos algebraicos de dimensión baja. En la sección 1 se presenta la construcción de Grothendieck y se proporcionan varios cálculos explícitos de $K_0\Lambda$ para diversos anillos $\Lambda$. En la sección 2 se estudia el funtor $K_1$, se prueba el Lema de Whitehead, se relaciona con la cohomología de grupos y se dan cálculos de $K_1\Lambda$ para diversos anillos $\Lambda$. En la sección 3 se analiza el grupo de Steinberg, se define $K_2\Lambda$, se utiliza el concepto de extensión central universal para enlazarlo con la cohomología de grupos y se dan cálculos explícitos. Como lectura posterior véanse [Mi], [L-S] y [S], de donde hemos seguido varias demostraciones.

## V.1 $K_0\Lambda$

A continuación describiremos la construcción de Grothendieck para anillos y módulos. Sea $\Lambda$ un anillo cualquiera, no necesariamente conmutativo, y ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$, la categoría de $\Lambda$-módulos izquierdos. Sea $\mathbf{C}$ una subcategoría de ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$. La construcción de Grothendieck consiste en asociarle a ciertas subcategorías de ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$ cierto grupo abeliano que denotaremos con $K_0\mathbf{C}$. Específicamente, sea $M$ un $\Lambda$-módulo en $\mathbf{C}$. Sea $\langle M\rangle$ la clase de isomorfismo de $M$ i.e., la clase de todos los $\Lambda$-módulos izquierdos isomorfos a $M$. Sea $F$ el grupo abeliano libre con base $\{\ \langle M\rangle \mid M \in \mathbf{C}\}$ y sea $R$ el subgrupo de $F$ generado por las expresiones de la forma $\langle M\rangle - \langle M'\rangle - \langle M''\rangle$ donde $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ recorre todas las sucesiones exactas cortas en $\mathbf{C}$. Entonces definimos

$$K_0\mathbf{C} = F/R$$

y lo llamaremos *grupo de Grothendieck* de $\mathbf{C}$.

Denotaremos con $[M]$ la imagen de $\langle M\rangle$ en $K_0\mathbf{C}$. Entonces, siempre que se tenga una sucesión exacta corta en $\mathbf{C}$

$$M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$$

tendremos una expresión de la forma $[M] = [M'] + [M'']$ en $K_0\mathbf{C}$, es decir $K_0\mathbf{C}$ está generado por $\{\ [M] \mid M \in \mathbf{C}\ \}$ sujeta a las relaciones de la forma $[M] = [M'] + [M'']$.

Apliquemos la construcción de Grothendieck a una subcategoría específica de ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$. Sea ${}_\Lambda\mathbf{P}$ la categoría de $\Lambda$-módulos (izquierdos) proyectivos finitamente generados. Por abuso de notación, denotaremos $K_0({}_\Lambda\mathbf{P})$ simplemente con $K_0\Lambda$. Entonces tenemos la siguiente

**1.1 DEFINICION.** $K_0\Lambda$ es el grupo abeliano $F/R$, donde $F$ es el grupo abeliano libre cuyos generadores $\langle P\rangle$ son las clases de isomorfismo de $\Lambda$-módulos proyectivos finitamente generados y $R$ es el subgrupo de $F$ generado por todas las expresiones de la forma

$$\langle P\rangle + \langle Q\rangle - \langle P \oplus Q\rangle.$$

$K_0\Lambda$ se llama *grupo de clases proyectivas de* $\Lambda$.

Es obvio que como $P, Q \in {}_\Lambda\mathbf{P}$, la sucesión exacta corta

$$P \rightarrowtail M \twoheadrightarrow Q$$

se escinde y $M \cong P \oplus Q$. También es fácil comprobar que $K_0\Lambda$ satisface la propiedad universal siguiente:

**1.2 PROPOSICION.** Sea $\varphi\colon \mathbf{C} \longrightarrow G$ una función de $\mathbf{C}$ en un grupo abeliano aditivo $G$ tal que, para $M \in \mathbf{C}$, $\varphi(\langle M\rangle)$ dependa únicamente de la clase de isomorfismos de $M$ y tal que $\varphi(\langle M\rangle) = \varphi(\langle M'\rangle) + \varphi(\langle M''\rangle)$ para cada sucesión exacta corta $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M'' \in \mathbf{C}$. Entonces existe un homomorfismo de grupos único $\psi\colon K_0\mathbf{C} \longrightarrow G$ tal que $\varphi(\langle M\rangle) = \psi([M])$.■

La construcción de Grothendieck se puede hacer en un contexto más general, pero la idea es siempre la misma y queda fuera del propósito de este texto.

**1.3 EJEMPLO.** Sea $K$ un campo y $\mathbf{EV}$ la subcategoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $K$ de la categoría ${}_K\mathbf{Mod}$; es decir, los $K$-módulos proyectivos finitamente generados. La aplicación $\varphi\colon \mathbf{EV} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\langle V\rangle \longmapsto dim\ V$ induce $\psi\colon K_0\mathbf{EV} = K_0K \longrightarrow \mathbb{Z}$ pues $dim\ (V \oplus W) = dim\ V + dim\ W$; $\psi$ está dado por

$$[V] \longmapsto dim\ V.$$

Como $\psi([K]) = 1$, $\psi$ es suprayectivo. Si $\psi([V] - [W]) = 0$, entonces $dim\ V = dim\ W$ y $V \cong W$, luego $[V]-[W] = 0$ y, por lo tanto, $\psi$ es inyectivo. Entonces $K_0K = K_0\mathbf{EV} \cong \mathbb{Z}$.

Obsérvese que el cálculo de $K_0$ de un campo mide, hasta cierto punto, cuánto les falta a los $\Lambda$-módulos proyectivos finitamente generados para poseer una teoría de dimensión como la de los espacios vectoriales. Así, podemos considerar aquella parte de la $K$-Teoría Algebraica correspondiente a $K_0$ como un intento de generalizar ciertas propiedades elementales del Algebra Lineal a módulos sobre un anillo cualquiera.

**1.4 EJEMPLO.** Consideremos el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$ y sea $\mathbf{Abf}$ la categoría de los $\mathbb{Z}$-módulos finitos. Sea $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ el grupo multiplicativo de los números racionales positivos y definamos $\varphi\colon \mathbf{Abf} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ dada por la cardinalidad. Claramente, $\varphi$ es multiplicativo sobre sucesiones exactas cortas. Por lo tanto, $\varphi$ induce un morfismo de grupos $\psi\colon K_0\mathbf{Abf} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ tal que $\psi([M]) = card\ M$. Como $\psi([M] - [N]) = 1$ implica que $card\ M = card\ N$ y que $M$ y $N$ tienen los mismos factores de composición $C_i$, $[M] = \sum[C_i] = [N]$. Luego, $\varphi$ es inyectiva. Además, como $\varphi(\mathbb{Z}/p) = p$ y $\mathbb{Q}^+$ está generado por los números primos positivos, $\varphi$ es suprayectiva. Como $\varphi$ es inyectiva y suprayectiva, $\psi$ también lo es. Por lo tanto, $K_0\mathbf{Abf} \cong \mathbb{Q}^+$, y decimos que es un grupo abeliano libre con base $\{ [\mathbb{Z}/p] \mid p \text{ es primo} \}$.

**1.5 EJEMPLO.** Consideremos **Abfg** la categoría de los $\mathbb{Z}$-módulos finitamente generados. Si $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, tenemos la siguiente sucesión exacta en **Abfg**

$$\mathbb{Z} \overset{n}{\rightarrowtail} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n.$$

Entonces $[\mathbb{Z}/n] = [\mathbb{Z}] - [\mathbb{Z}] = 0 \in K_0\mathbf{Abfg}$. Por el teorema fundamental de los grupos abelianos, $K_0\mathbf{Abfg}$ es un grupo cíclico generado por un solo elemento $[\mathbb{Z}]$. Por la propiedad universal, el homomorfismo inducido por el rango $rg\colon K_0\mathbf{Abfg} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dado por $M \longmapsto (\textit{rango de } M)$, junto con el hecho de que $rg(\mathbb{Z}) = 1$, implica que $K_0\mathbf{Abfg} \cong \mathbb{Z}$. Observemos que, aunque **Abf** es una subcategoría de **Abfg**, la estructura de $K_0\mathbf{Abfg} \cong \mathbb{Z}$ es diferente de la de $K_0\mathbf{Abf} \cong \mathbb{Q}^+$.

En el ejemplo 1.4 vimos que, si $[M] = [N]$, entonces no siempre $M \cong N$. A continuación, veamos un criterio que establecerá cuándo $[M] = [N]$ en $K_0\Lambda$.

**1.6 PROPOSICION.** Sean $P$ y $Q$ dos $\Lambda$-módulos proyectivos finitamente generados. Entonces $[P] = [Q]$ en $K_0\Lambda$ si, y sólo si, existe un entero $n \geq 0$ tal que $P \oplus \Lambda^n \cong Q \oplus \Lambda^n$.

**Demostración.** Supongamos que $P \oplus \Lambda^n \cong Q \oplus \Lambda^n$, entonces $[P \oplus \Lambda^n] = [Q \oplus \Lambda^n]$; luego $[P] + [\Lambda^n] = [Q] + [\Lambda^n]$ y, por lo tanto, $[P] = [Q]$ pues, como $K_0\Lambda$ es un grupo abeliano, podemos cancelar.

Supongamos ahora que $\langle P\rangle \equiv \langle Q\rangle \pmod R$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle P\rangle - \langle Q\rangle = &\sum_i (\langle P_i\rangle + \langle Q_i\rangle - \langle P_i \oplus Q_i\rangle) \\ &- \sum_j (\langle T_j\rangle + \langle S_j\rangle - \langle T_j \oplus S_j\rangle)\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}&\langle P\rangle + (\sum_j (\langle T_j\rangle + \sum_j \langle S_j\rangle + \sum_i \langle P_i \oplus Q_i\rangle) = \\ &= \langle Q\rangle + (\sum_i \langle P_i\rangle + \sum_i \langle Q_i\rangle + \sum_j \langle T_j \oplus S_j\rangle).\end{aligned}$$

Así que $P \oplus N \cong Q \oplus N$, donde $N$ denota los términos entre paréntesis de la igualdad anterior, que claramente son isomorfos. Como $N$ es un $\Lambda$-módulo proyectivo finitamente generado, pues es una suma directa de tales módulos, existe un $\Lambda$-módulo $M$ tal que $N \oplus M \cong \Lambda^n$ (cf. I.6.11 (iii) y I.6.4); luego, $P \oplus N \oplus M \cong Q \oplus N \oplus M$ y, por lo tanto, $P \oplus \Lambda^n \cong Q \oplus \Lambda^n$.■

**1.7 DEFINICION.** Dos $\Lambda$-módulos $P$ y $Q$ son *isomorfos establemente* si existe un número natural $n$ tal que $P \oplus \Lambda^n \cong Q \oplus \Lambda^n$.

En virtud de 1.7, decimos que dos elementos de $K_0\Lambda$ son iguales si, y sólo si, son isomorfos establemente. Obsérvese que el cálculo de $K_0\Lambda$ no necesariamente nos lleva a determinar todas las clases de isomorfismo en la categoría de los $\Lambda$-módulos proyectivos finitamente generados, sino que $K_0\Lambda$ determina todas las clases de isomorfismo estables en dicha categoría.

**1.8 EJEMPLO.** Sea **Ab** la categoría de los $\mathbb{Z}$-módulos, i.e., la categoría de los grupos abelianos. Los $\mathbb{Z}$-módulos proyectivos finitamente generados son los grupos abelianos libres, de rango finito. Entonces, dos de tales módulos son isomorfos establemente si, y sólo si, son isomorfos. Luego, la aplicación $[P] \longmapsto rg([P])$ nos dice que $K_0\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, como se vio en 1.5.

Puede suceder que, sobre ciertos anillos, un módulo libre tenga bases de diferente cardinalidad. Cuando esto no suceda, diremos que el anillo $\Lambda$ tiene una base de *cardinalidad invariante*, es decir, si $\Lambda^n \cong \Lambda^m$ y $n, m > 0$ entonces $n = m$.

En el caso de que el anillo $\Lambda$ sea conmutativo, el producto tensorial sobre $\Lambda$ de dos $\Lambda$-módulos resulta ser un $\Lambda$-módulo mediante $\lambda(x \otimes y) = \lambda x \otimes y = x \otimes \lambda y$. Como $\Lambda^n \otimes \Lambda^m \cong \Lambda^{nm}$, la categoría de los $\Lambda$-módulos proyectivos finitamente generados ${}_\Lambda\mathbf{P}$ es cerrada bajo $\otimes$. Entonces podemos dar a $K_0\Lambda$ una estructura de anillo mediante $[P] \bullet [Q] = [P \otimes_\Lambda Q]$. Formalmente, en $K_0\Lambda = F/R$, demos a $F$ una estructura de anillo definiendo

$$\langle P \rangle \langle Q \rangle = \langle P \otimes_\Lambda Q \rangle.$$

$R$ resulta ser un ideal de $F$; luego, $K_0\Lambda$ es un anillo con $1 = [\Lambda]$ ya que $[\Lambda][P] = [P] = [P][\Lambda]$ para todo generador $[P]$.

Sea $f\colon \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ un homomorfismo de anillos con 1 (no necesariamente conmutativos). Considérese el funtor

$$F\colon {}_\Lambda\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\Lambda'}$$

(problema IV.2.1 (iii)). Sea $M$ un $\Lambda$-módulo; luego $F(M) = \Lambda' \otimes_\Lambda M$ es un $\Lambda'$-módulo. Si $M$ es libre o proyectivo o finitamente generado o se escinde como una suma directa sobre $\Lambda$, entonces $F(M)$ es libre o proyectivo o finitamente generado o se escinde como suma directa de $\Lambda'$. Por lo tanto, la correspondencia $[P] \longmapsto [F(P)]$ da lugar a un homomorfismo $f_*: K_0\Lambda \longrightarrow K_0\Lambda'$. Es fácil comprobar que $K_0$ es un funtor covariante de la categoría de anillos con identidad, en la de grupos abelianos, i.e., para construir $f_*$ considérese $\varphi: {}_\Lambda\mathbf{P} \longrightarrow K_0\Lambda'$ dada por $P \longmapsto [\Lambda' \otimes_\Lambda P]$. Si $P' \rightarrowtail P \twoheadrightarrow P''$ es una sucesión exacta en ${}_\Lambda\mathbf{P}$, entonces se escinde y, por lo tanto,

$$\Lambda' \otimes_\Lambda P' \rightarrowtail \Lambda' \otimes_\Lambda P \twoheadrightarrow \Lambda' \otimes_\Lambda P''$$

también es exacta y se escinde. Luego, $\varphi(P) = \varphi(P') + \varphi(P'')$ y por la propiedad universal $\varphi$ define un homomorfismo único $f_*: K_0\Lambda \longrightarrow K_0\Lambda'$ tal que $f_*([P]) = [\Lambda' \otimes_\Lambda P]$.

**1.9 DEFINICION.** Diremos que un módulo diferente del trivial $P \in {}_\Lambda\mathbf{P}$ satisface la *propiedad de Krull-Schmidt* si $P$ admite una descomposición $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ donde las $P_i$ son *indescomponibles*, (i.e., $P_i$ no es suma directa de cualesquiera dos de sus submódulos propios) y las clases de isomorfismo $\{\langle P_i\rangle\}_{i=1}^m$, están determinadas en forma única salvo permutaciones. Diremos que la categoría ${}_\Lambda\mathbf{P}$ satisface la propiedad de Krull-Schmidt si cada uno de sus objetos la satisface.

**1.10 LEMA.** Supongamos que ${}_\Lambda\mathbf{P}$ satisface la propiedad de Krull-Schmidt entonces $K_0\Lambda$ es un grupo abeliano libre generado por el conjunto finito de $\Lambda$-módulos proyectivos finitamente generados indescomponibles distintos.

**Demostración.** Sea $\{P_i\}$ el conjunto de $\Lambda$-módulos proyectivos finitamente generados indescomponibles. Sea $A$ el grupo abeliano libre cuya base $\{g_i\}$ está en correspondencia uno a uno con $\{P_i\}$. Definamos $\rho: K_0\Lambda \longrightarrow A$ mediante $[P] \longmapsto \sum \rho_i(P)g_i$ donde $\rho_i(P)$ es el número de indescomponibles de $P$, isomorfos a $P_i$. Entonces $\rho$ es claramente un isomorfismo cuyo inverso es $g_i \longmapsto [P_i]$. Veamos que $\{P_i\}$ es finito: sea $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m$ la descomposición de $\Lambda$ como módulo sobre sí mismo. Cualquier $P_i$ es un elemento indescomponible de algún módulo libre $\Lambda^n \cong n\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus n\Lambda_m$. Entonces $P_i \cong \Lambda_j$ para alguna $j$.■

Las $\Lambda_i$ de la demostración precedente se llaman *indescomponibles principales.*

A continuación calculemos $K_0\Lambda$ para diversos anillos $\Lambda$.

**1.11 TEOREMA.** Sea $\Lambda$ un anillo local o un dominio de ideales principales. Entonces $K_0\Lambda \cong \mathbb{Z}$ con generador $[\Lambda]$.

**Demostración.** Por el Problema I.6.6 sabemos que los submódulos de un módulo libre son libres para un dominio de ideales principales y es bien sabido que para anillos locales, todo módulo proyectivo finitamente generado es libre. Esto reduce la propiedad de Krull-Schmidt para ${}_\Lambda\mathbf{P}$ a que $\Lambda^n \cong \Lambda^m$ implica que $n = m$, que es válido tanto para anillos conmutativos como para anillos locales. Como $\Lambda$ es el único indescomponible principal, $K_0\Lambda \cong \mathbb{Z}$.■

**1.12 NOTA.** Si $\Lambda$ es artiniano izquierdo (i.e., satisface la condición de cadena descendente), entonces cualquier $\Lambda$-módulo izquierdo finitamente generado posee una serie de composición y la propiedad de Krull-Schmidt es válida para este caso; luego,

$$K_0\Lambda \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\ .$$

**1.13 EJEMPLO.** Sea $D$ un anillo con división y $\Lambda = M_n(D)$ el anillo de las matrices cuadradas con elementos en $D$. Entonces $K_0\Lambda = K_0(M_n(D)) \cong \mathbb{Z}$ con generador $[D^n]$.

Nótese que, por 1.11, $K_0$ de un campo es isomorfo a $\mathbb{Z}$, y en particular, si $F_{p^l}$ denota un campo finito con $p^l$ elementos, $K_0F_{p^l} \cong \mathbb{Z}$.

## PROBLEMAS

**1.1** Demuestre la propiedad universal 1.2 .

**1.2** Sea $\Lambda$ un anillo conmutativo. Defina en $K_0\Lambda = F/R$ una estructura de anillo mediante $\langle P\rangle \cdot \langle Q\rangle = \langle P \otimes_\Lambda Q\rangle$ en $F$. Compruebe que $R$ es un ideal de $F$.

**1.3** Pruebe que $K_0\colon \mathbf{An}_1 \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor covariante.

**1.4** Sea $\Lambda \cong \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \times \Lambda_m$. Pruebe que los homomorfismos de proyección $K_0\Lambda \longrightarrow K_0\Lambda_i$ inducen un isomorfismo

$$K_0\Lambda \cong K_0\Lambda_1 \times \cdots K_0\Lambda_m\ .$$

**1.5** Proporcione los detalles de la demostración de 1.11.

**1.6** Calcule $K_0(C^1, \mathrm{C})$, $K_0(C^2, \mathrm{C})$ y $K_0(C^3, \mathrm{C})$ explícitamente, donde $C^i$ denota el grupo cíclico de orden $i$. (Véase [C-LL] caps.4 y 5).

**1.7** Sea $\xi = e^{2\pi i/\rho}$, $\mathbb{Q}(\xi)$ la extensión de grado $p$ de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}[\xi]$ lo enteros algebraicos en $\mathbb{Q}(\xi)$. Calcule $K_0(\mathbb{Z}[\xi])$ y use esto para calcular $K_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/p])$.

## V.2 $\mathsf{K}_1\Lambda$

Denotaremos con $M_n(\Lambda)$ el anillo de las matrices de $n$ por $n$ con elementos en un anillo asociativo con 1. Sea $GL_n(\Lambda)$ el grupo de las unidades de $M_n(\Lambda)$, es decir, $GL_n(\Lambda)$ es el grupo de las matrices invertibles de $M_n(\Lambda)$. Llamaremos a $GL_n(\Lambda)$ *grupo lineal general*. Recordemos que una matriz $e_{ij}^{\lambda}$, $i \neq j$ se llama *elemental* si difiere de la matriz identidad por un elemento $\lambda \in \Lambda$ fuera de la diagonal. Como $e_{ij}^{\lambda} \in GL_n(\Lambda)$ entonces $(e_{ij}^{\lambda})^{-1} = e_{ij}^{-\lambda}$ y se comprueba fácilmente que multiplicar por la izquierda o por la derecha una matriz por una elemental, corresponde a hacer operaciones elementales por renglón o columna a dicha matriz (véase el problema 2.1). También se tiene que

$$[e_{ij}^{\lambda}, e_{ke}^{\mu}] = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq k,\ i \neq e \\ e_{ie}^{\lambda\mu} & \text{si } j = k,\ i \neq e \\ e_{kj}^{-\lambda\mu} & \text{si } j \neq k,\ i = e \end{cases}$$

donde

$$[e_{ij}^{\lambda}, e_{ke}^{\mu}] = e_{ij}^{\lambda} e_{ke}^{\mu} (e_{ij}^{\lambda})^{-1} (e_{ke}^{\mu})^{-1}.$$

(Véase el problema 2.2.)

Sea $E_n(\Lambda)$ el subgrupo de $GL_n(\Lambda)$ generado por todas las $e_{ij}^{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, $1 \leq i \neq j \leq n$, llamado *grupo elemental lineal* de $\Lambda$. Si identificamos a cada matriz $A \in GL_n(\Lambda)$ con la matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\Lambda)$$

obtenemos inclusiones $GL_1(\Lambda) \subset GL_2(\Lambda) \subset GL_3(\Lambda) \subset \cdots$ . Denotamos con $GL(\Lambda)$ el límite directo de $GL_n(\Lambda)$; o bien, podemos considerar

$$GL(\Lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} GL_n(\Lambda)$$

al que llamaremos *grupo lineal general estable* o *infinito* de $\Lambda$. Podemos concebir a $GL(\Lambda)$ como el grupo que consta de las matrices invertibles infinitas $A = (a_{ij})$, con $a_{ij} \in \Lambda$, $1 \leq i < \infty$, $1 \leq j < \infty$ y $a_{ij} = \delta_{ij}$, la delta de Kronecker para toda $i, j$, excepto un número finito de $i, j$. Entonces $GL_n(\Lambda) \subset GL(\Lambda)$ y lo vemos como el subgrupo de todas las $(a_{ij}) \in GL(\Lambda)$ con $a_{ij} = \delta_{ij}$ para toda $i, j > n$. La inclusión de $GL_n(\Lambda) \rightarrowtail GL(\Lambda)$ se restringe a la inclusión $E_n(\Lambda) \rightarrowtail E_{n+1}(\Lambda)$ y, en $GL(\Lambda)$, el subgrupo

$$E(\Lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(\Lambda)$$

se llama *grupo elemental estable* o *infinito* de $\Lambda$.

**2.1 LEMA.** (Whitehead.) $[GL(\Lambda), GL(\Lambda)] = E(\Lambda)$.

**Demostración.** Por el problema 2.2, es inmediato verificar que cada matriz elemental puede expresarse como el conmutador de otras dos matrices elementales para $n \geq 3$; entonces $[E_n(\Lambda), E_n(\Lambda)] = E_n(\Lambda)$ y, por lo tanto, $[E(\Lambda), E(\Lambda)] = E(\Lambda) \subset GL(\Lambda)$. Veamos ahora que $[GL(\Lambda), GL(\Lambda)] \subset E(\Lambda)$. Para esto, sean $A, B \in GL_n(\Lambda)$; entonces, en $GL_{2n}(\Lambda)$ se tiene que

**2.2** $$\begin{pmatrix} ABA^{-1}B^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (BA)^{-1} & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}.$$

Veamos que el conmutador $ABA^{-1}B^{-1}$ en $GL_{2n}(\Lambda)$ puede expresarse como producto de matrices elementales de $GL_{2n}(\Lambda)$. Basta ver que cada matriz en 2.2 puede reducirse a $I_{2n}$ mediante operaciones elementales. Como

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

y como

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X^{-1} & I \end{pmatrix}$$

pueden reducirse a $I_{2n}$ mediante operaciones elementales por renglón, mientras que

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

mediante operaciones elementales por renglón y columna, respectivamente, tenemos que $[GL_n(\Lambda), GL_n(\Lambda)] \subset E_{2n}(\Lambda)$ y, por lo tanto,

$$[GL(\Lambda), GL(\Lambda)] \subset E(\Lambda). \blacksquare$$

Una consecuencia del lema anterior es que $E(\Lambda)$ es un subgrupo normal de $GL(\Lambda)$.

**2.3 DEFINICION.** El grupo cociente $GL(\Lambda)/E(\Lambda)$ es el *$K$-grupo algebraico de índice uno del anillo* $\Lambda$ denotado con $K_1\Lambda$.

Luego, $K_1\Lambda = GL(\Lambda)/[GL(\Lambda), GL(\Lambda)]$ y, por IV.3.3, $K_1\Lambda \cong H_1(GL(\Lambda), \mathbb{Z})$. Obsérvese que, al igual que $K_0$, $K_1$ resulta ser un funtor de la categoría de anillos en la categoría de grupos abelianos, pues un homomorfismo de anillos $f\colon \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ induce un homomorfismo de grupos $f_*\colon GL(\Lambda) \longrightarrow GL(\Lambda')$ que envía a $E(\Lambda)$ en $E(\Lambda')$. Luego, $f$ induce un homomorfismo de grupos $K_1 f\colon K_1\Lambda \longrightarrow K_1\Lambda'$ y se cumplen las propiedades funtoriales para $K_1$.

Supongamos ahora que $\Lambda$ es conmutativo. Entonces podemos considerar el determinante de una matriz como un homomorfismo $det\colon GL(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^*$, donde $\Lambda^*$ denota las unidades de $\Lambda$.

Sea $SL(\Lambda) = ker(det)$ y lo llamaremos *grupo especial lineal* o *infinito* de $\Lambda$. Nótese que

$$SL(\Lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} SL_n(\Lambda)$$

donde $SL_n(\Lambda) = ker(det\colon GL_n(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^*)$, y que las matrices elementales siempre tienen determinante trivial, así que $E_n(\Lambda) \subset SL_n(\Lambda)$ para toda $n$, y $E(\Lambda) \subset SL(\Lambda)$. Obsérvese que pudimos definir $det\colon GL(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^*$ debido a que $det\colon GL_n(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^*$ es invariante bajo la inclusión $GL_n(\Lambda) \rightarrowtail GL_{n+1}(\Lambda)$. Por lo tanto, $det\colon GL(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^*$ induce un homomorfismo

$$det\colon K_1\Lambda = GL(\Lambda)/E(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^*$$

que posee un inverso $\Lambda^* = GL_1(\Lambda) \rightarrowtail GL(\Lambda) \longrightarrow K_1\Lambda$. Si definimos

$$SK_1(\Lambda) = SL(\Lambda)/E(\Lambda) = ker(det\colon K_1\Lambda \longrightarrow \Lambda^*)$$

resulta que $K_1\Lambda \cong SK_1(\Lambda) \oplus \Lambda^*$ (i.e., la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow SL(\Lambda)/E(\Lambda) \longrightarrow GL(\Lambda)/E(\Lambda) \xrightarrow{det} \Lambda^* \longrightarrow 1$$

se escinde). Como $\Lambda^*$ puede considerarse conocido, el cálculo de $K_1\Lambda$ se limita al de $SK_1(\Lambda)$. Obsérvese que $SK_1(\Lambda)$ es trivial si, y sólo si, para cualquier matriz $A \in SL_n(\Lambda)$, podemos transformar la matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix},$$

para $k$ adecuada, en la identidad $I_{n+k}$ mediante operaciones elementales por renglón o columna. Si $SK_1(\Lambda)$ es trivial, entonces $K_1\Lambda \cong \Lambda^*$ y el homomorfismo $det$ es universal. Este es el caso si $\Lambda$ es un dominio entero, un anillo local o un anillo conmutativo finito (véase el problema 2.5). Entonces, si $F$ es un campo, $K_1(F) \cong F^*$ y $K_1(F[x]) \cong F^*$; si $\Lambda = \mathbb{Z}$, $K_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$.

A continuación veamos la definición de Bass para $K_1({}_\Lambda\mathbf{P})$ y posteriormente probaremos que existe una equivalencia natural entre $K_1\Lambda$ y $K_1({}_\Lambda\mathbf{P})$, poniendo $K_1$ como un cociente de $K_0$ con una relación adicional. Formemos una categoría ${}_\Lambda\widetilde{\mathbf{P}}$ cuyos objetos son de la forma $(P,\alpha)$, con $P \in {}_\Lambda\mathbf{P}$ y $\alpha: P \longrightarrow P$ un automorfismo de $P$. Un morfismo $g:(P,\alpha) \longrightarrow (P'',\alpha'')$ es un morfismo $g: P \longrightarrow P''$ en ${}_\Lambda\mathbf{P}$ tal que $g \circ \alpha = \alpha'' \circ g$, i.e., el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & P \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ P'' & \xrightarrow{\alpha''} & P'' \end{array}$$

Decimos que una sucesión

**2.4** $$(P',\alpha') \rightarrowtail (P,\alpha) \twoheadrightarrow (P'',\alpha'')$$

es exacta en ${}_\Lambda\widetilde{\mathbf{P}}$ si $P' \rightarrowtail P \twoheadrightarrow P''$ es exacta en ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$.

Definimos $K_1({}_\Lambda\mathbf{P})$ como el grupo abeliano con generadores $[P,\alpha]$ en correspondencia con las clases de isomorfismo $\langle P,\alpha\rangle$ de ${}_\Lambda\widetilde{\mathbf{P}}$ y las relaciones

(i) $[P,\alpha\beta] = [P,\alpha] + [P,\beta]$ y

(ii) $[P,\alpha] = [P',\alpha'] + [P'',\alpha'']$ para cada sucesión exacta (2.4).

Obsérvese que cualquier elemento $x \in K_1({}_\Lambda\mathbf{P})$ es de la forma $[P,\alpha]$, pues, si escribimos $x$ como $[R,\rho]-[S,\sigma]$, por (ii) tenemos que $[S,1_S]=0$ y $-[S,\sigma] = [S,\sigma^{-1}]$. Luego, por (ii) también, $x = [R\oplus S, \rho\oplus\sigma^{-1}]$. $K_1$ posee la propiedad universal siguiente:

**2.5 PROPOSICION.** Sea $G$ un grupo abeliano y $\varphi$ una aplicación de las clases de isomorfismo de ${}_\Lambda\widetilde{\mathbf{P}}$ en $G$ tal que

(i) $\varphi(\langle P,\alpha\rangle) = \varphi(\langle P',\alpha'\rangle) + \varphi(\langle P'',\alpha''\rangle)$ para cada sucesión (2.4) y

(ii) $\varphi(\langle P,\alpha\beta\rangle) = \varphi(\langle P,\alpha\rangle) + \varphi(\langle P,\beta\rangle)$

entonces existe un homomorfismo $\psi: K_1({}_\Lambda\mathbf{P}) \longrightarrow G$ tal que $\psi([P,\alpha]) = \varphi(\langle P,\alpha\rangle)$.

**2.6 TEOREMA.** Existe un isomorfismo natural

$$\eta: K_1\Lambda = GL(\Lambda)/E(\Lambda) \longrightarrow K_1({}_\Lambda\mathbf{P})$$

dado por $[\alpha] \longmapsto [\Lambda^n,\alpha]$, donde $\alpha \in GL_n(\Lambda) = Aut(\Lambda^n)$.

**Demostración.** $\eta$ está bien definido en $GL(\Lambda)$ y, como $K_1({}_\Lambda\mathbf{P})$ es abeliano, $\eta$ es trivial en $E(\Lambda)$ y, por lo tanto, está bien definido en $K_1\Lambda$. Definamos el inverso de $\eta$ como sigue: sea $(P,\alpha) \in {}_\Lambda\widetilde{\mathbf{P}}$. Entonces existe $Q \in {}_\Lambda\mathbf{P}$ tal que $P \oplus Q \cong \Lambda^n$ para alguna $n$. El automorfismo $\alpha \oplus 1_Q$ de $P \oplus Q$ da lugar a la matriz $\alpha' \in GL_n(\Lambda)$. Definimos $\varphi(\langle P, \alpha\rangle) = [\alpha']$, la clase de $\alpha'$ en $K_1\Lambda$. Es fácil ver que $\varphi$ depende solamente de la clase de isomorfismo de $(P, \alpha)$, que preserva las relaciones para $K_1({}_\Lambda\mathbf{P})$ y que es inverso de $\eta$ (véase el problema 2.7).■

## PROBLEMAS

**2.1** Compruebe que si $e_{ij}^{\lambda}$ es una matriz elemental y $A \in GL_n(\Lambda)$, multiplicar $A$ por $e_{ij}^{\lambda}$ por la izquierda equivale a sumar $\lambda$ veces el renglón $j$ al renglón $i$, y que multiplicar por la derecha suma $\lambda$ veces la columna $i$ a la columna $j$. Es decir, que la multiplicación $e_{ij}^{\lambda}A$ o $Ae_{ij}^{\lambda}$ equivale a hacer operaciones elementales por renglón o columna en matrices.

**2.2** Pruebe las fórmulas para $[e_{ij}^{\lambda}, e_{ke}^{\mu}]$ dadas al principio de esta sección. Observe que no existe una fórmula sencilla para $[e_{ij}^{\lambda}, e_{ji}^{\mu}]$, o sea para el caso $j = k,\ i = e$.

**2.3** Proporcione los detalles de la demostración de 2.1.

**2.4** Pruebe que $K_1\colon \mathbf{An} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor covariante.

**2.5** Sea $\Lambda$ un dominio euclidiano. Sea $A = (a_{ij}) \in SL_n(\Lambda)$. Sea $\epsilon = \min_j\{|a_{1j}|\colon a_{1j} \neq 0\}$. Supongamos que $\epsilon = |a_{1k}|$. Después de restar los múltiplos adecuados de la columna $k$ de las otras columnas, pasamos a una nueva matriz $B = (b_{ij})$, con $\min_j\{|b_{1j}|\colon b_{1j} \neq 0\} < \epsilon$. Continuando de esta manera obtenemos una matriz $C = (c_{ij})$ con $\min_j\{|c_{1j}|\colon c_{1j} \neq 0\} = 1$, es decir, alguna $c_{1k}$ es una unidad. De hecho, podemos suponer que $c_{11}$ es una unidad (¿por qué?). Después de transformaciones por columna y renglón, podemos suponer que el primer renglón, y la primera columna de $C$ son cero, excepto $c_{11}$. Una vez logrado esto, repita el proceso al menor de $c_{11}$ en $C$. Finalmente se llegará a una matriz $\delta = diag(d_1, \ldots, d_n)$ donde necesariamente $d_1 \cdots d_n = 1$. Luego, $\delta \in E_n(\Lambda)$. De aquí que $K_1(F) \cong F^*$, $K_1(F[x]) \cong F^*$, $K_1(\mathbb{Z}) \cong \{+1, -1\}$, etc. Proporcione los detalles.

**2.6** Demuestre la propiedad universal para $K_1$.

**2.7** Pruebe que $\varphi$, en el teorema 2.6, depende de la clase de isomorfismo de $(P, \alpha)$ y que preserva las relaciones de $K_1({}_\Lambda\mathbf{P})$; i.e., demuestre que

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right] = [\alpha] \cdot [\beta] \in K_1\Lambda$$

donde $\alpha \in GL_n(\Lambda)$ y $\beta \in GL_k(\Lambda)$. Suponiendo $n = k$, esto se sigue de que

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} I & \gamma\beta^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right].$$

**2.8** Sea $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ el anillo producto de $\Lambda_1$ y $\Lambda_2$. Pruebe que

$$K_1\Lambda \cong K_1\Lambda_1 \oplus K_2\Lambda_2.$$

## V.3 $K_2\Lambda$

Definiremos un grupo mediante generadores y relaciones que imiten el comportamiento de las matrices elementales que se introdujeron en la sección 2. Obsérvese que las relaciones para el conmutador $[e^{\lambda}_{ij}, e^{\mu}_{kl}]$ no son un conjunto de relaciones que definan $E(\Lambda)$.

**3.1 DEFINICION.** Para $n > 2$, definimos el *grupo de Steinberg* $St_n(\Lambda)$ como el grupo no abeliano dado mediante la siguiente presentación:

Generadores: $x^{\lambda}_{ij}$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $\lambda \in \Lambda$

Relaciones:

(i) $x^{\lambda}_{ij} x^{\mu}_{ij} = x^{\lambda+\mu}_{ij}$.

(ii) $[x^{\lambda}_{ij}, x^{\mu}_{kl}] = \begin{cases} 1 & j \neq k,\ i \neq l \\ x^{\lambda\mu}_{il} & i \neq l,\ j = k \end{cases}$

Las relaciones (i) y (ii) se llaman *relaciones de Steinberg* y, obviamente, son semejantes a las de $e^{\lambda}_{ij}$ dadas en §5.2. Podemos decir que $St_n(\Lambda)$ es un grupo cociente $F/R$, donde $F$ es el grupo libre generado por los símbolos $x^{\lambda}_{ij}$ y $R$ es el subgrupo normal más pequeño para el cual son válidas las relaciones (i) y (ii) anteriores.

Nótese que, para $n = 2$, las relaciones de Steinberg son inadecuadas. Existe un epimorfismo natural $\varphi_n: St_n(\Lambda) \longrightarrow E_n(\Lambda)$ dado por $\varphi_n(x^{\lambda}_{ij}) = e^{\lambda}_{ij}$. Denotemos con $St(\Lambda)$ al $\varinjlim St_n(\Lambda)$. Tenemos la siguiente definición de Milnor [Mi]:

**3.2 DEFINICION.** $K_2(\Lambda)$, el *K-grupo algebraico de índice* 2, se define como el núcleo del epimorfismo natural $\varphi$. Es decir,

$$K_2(\Lambda) = ker(\varphi: St(\Lambda) \longrightarrow E(\Lambda) \subset GL(\Lambda)).$$

Por lo tanto, tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$1 \longrightarrow K_2(\Lambda) \longrightarrow St(\Lambda) \xrightarrow{\varphi} E(\Lambda) \longrightarrow 1 \quad \text{y}$$

$$1 \longrightarrow K_2(\Lambda) \longrightarrow St(\Lambda) \xrightarrow{\varphi} GL(\Lambda) \longrightarrow K_1\Lambda \longrightarrow 1.$$

Es claro que, si $K_2(\Lambda) = 0$, entonces $St(\Lambda) \cong E(\Lambda)$, y así las relaciones de Steinberg forman un conjunto de relaciones que definen $E(\Lambda)$. Podemos imaginar $K_2(\Lambda)$ como una medida del grado en que las relaciones de Steinberg dejan de ser un conjunto de relaciones que definen $E(\Lambda)$, o bien como el conjunto de relaciones no triviales entre matrices elementales.

Es inmediato que, si $f\colon \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un homomorfismo de anillos, $f$ induce un homomorfismo de grupos

$$St(f)\colon St(\Lambda) \longrightarrow St(\Lambda') \quad \text{dado por} \quad x_{ij}^{\lambda} \longmapsto x_{ij}^{f(\lambda)},$$

que hace de $St(\_\_)$ un funtor de la categoría **An** en **Gr** y que se restringe a un homomorfismo $K_2(f)\colon K_2(\Lambda) \longrightarrow K_2(\Lambda')$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & K_2(\Lambda) & \longrightarrow & St(\Lambda) & \longrightarrow & E(\Lambda) & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle K_2(f)}\big\downarrow & & {\scriptstyle St(f)}\big\downarrow & & {\scriptstyle E(f)}\big\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & K_2(\Lambda') & \longrightarrow & St(\Lambda') & \longrightarrow & E(\Lambda') & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

haciendo de $K_2$ un funtor covariante de **An** en la categoría de grupos **Gr**.

A continuación veamos que $K_2(\Lambda)$ es siempre un grupo abeliano y, por lo tanto, $K_2\colon \mathbf{An} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

**3.3 TEOREMA.** Para cualquier anillo $\Lambda$, $Z(E(\Lambda)) = 1$, donde $Z(\quad)$ denota el centro y $Z(St(\Lambda)) = K_2(\Lambda)$.

**Demostración.** Sea $A \in Z(E(\Lambda))$ y $n$ suficientemente grande para que $A \in E_n(\Lambda)$. Entonces, en $E_{2n}(\Lambda)$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

luego, $A = I$ y $Z(E(\Lambda)) = 1$.

Veamos que $Z(St(\Lambda)) \subset K_2(\Lambda)$: sea $B \in Z(St(\Lambda))$ y $C = \varphi(B) \in E(\Lambda)$, donde $\varphi\colon St(\Lambda) \longrightarrow E(\Lambda)$. Como $\varphi$ es suprayectiva, $C \in Z(E(\Lambda))$. Luego, $C = I$ y $B \in K_2(\Lambda)$. Ahora veamos que $K_2(\Lambda) \subset Z(St(\Lambda))$: sea $A_n$ el subgrupo de $St(\Lambda)$ generado por todas las $x_{in}^{\lambda}$, con $i \neq n$ y $\lambda \in \Lambda$, con $n$ fija. Entonces $x_{in}^{\lambda}x_{in}^{\mu} = x_{in}^{\lambda+\mu}$ y $[x_{in}^{\lambda}, x_{jn}^{\mu}] = 1$. Luego, $A_n$ es abeliano y cualquier elemento $a \in A_n$ puede escribirse como un producto finito $a = \prod_{i\neq n} x_{in}^{\lambda_i}$. Pero entonces $\varphi(a) = \prod_{i\neq n} e_{in}^{\lambda_i}$ y esta matriz difiere de $I$ solamente en la $n$-columna cuyos elementos son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, 1, \lambda_{n+1}, \ldots$ . Luego, $\varphi$ restringida a este subgrupo $A_n$, es un monomorfismo (todos son $\neq 1$ menos el 0). Si $p \neq n$, entonces

$$x_{pq}^{\lambda}x_{in}^{\mu}(x_{pq}^{\lambda})^{-1} = \begin{cases} x_{in}^{\mu} & \text{si } q \neq i \\ x_{pn}^{\lambda\mu}x_{in}^{\mu} & \text{si } q = i \end{cases}$$

y luego, $x_{pq}^{\lambda}$ normaliza $A_n$ cuando $p \neq n$. Sea $\alpha \in K_2(\Lambda)$; luego, $\varphi(\alpha) = 1$. Escojamos una expresión para $\alpha$ en términos de los generadores de $St(\Lambda)$, y escójase $n$ más grande que cualquier subíndice que ocurra en esta expresión. Por el argumento anterior, $\alpha$ normaliza $A_n$, esto es, $\alpha\beta\alpha^{-1} \in A_n$ para toda $\beta \in A_n$. Pero $\varphi(\alpha) = 1$ y, por lo tanto, $\varphi(\alpha\beta\alpha^{-1}) = \varphi(\beta)$; entonces $\varphi$, restringida a $A_n$, es un monomorfismo y, por lo tanto, $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta$ para toda $\beta \in A_n$; esto es, $\alpha$ centraliza $A_n$. Similarmente, denotemos con $B_n$ el subgrupo de $St(\Lambda)$ generado por todas las $x_{nj}^{\lambda}$ con $j \neq n$ y $\lambda \in \Lambda$, y $n$ fijo, como antes. Por un argumento semejante, $\alpha$ centraliza $B_n$. Pero $A_n$ y $B_n$ juntos generan $St(\Lambda)$, pues, si $p \neq q$,

$$x_{pq}^{\lambda} \in A_n \quad \text{si} \quad q = n$$

$$x_{pq}^{\lambda} \in B_n \quad \text{si} \quad p = n$$

y $x_{pq}^{\lambda} = [x_{pn}^{\lambda}, x_{nq}^{1}] \in [A_n, B_n]$ si $p \neq n$ y $q \neq n$. Luego, $\alpha$ centraliza $St(\Lambda)$; esto es, $\alpha \in Z(St(\Lambda))$, i.e., $K_2(\Lambda) \subset Z(St(\Lambda))$.∎

A continuación relacionaremos $K_2(\Lambda)$ con la homología de $E(\Lambda)$ con coeficientes enteros. Como veremos en la siguiente proposición, el homomorfismo $\varphi: St(\Lambda) \longrightarrow E(\Lambda)$ es una extensión central universal cuyo núcleo es $K_2(\Lambda)$ y, por lo tanto, como vimos en IV.4, $K_2(\Lambda) \cong H_2(E(\Lambda), \mathbb{Z})$.

**3.4 TEOREMA.** Sea $\rho: G \longrightarrow E(\Lambda)$ una extensión central. Entonces existe un homomorfismo único $\psi: St(\Lambda) \longrightarrow G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} St(\Lambda) & \xrightarrow{\varphi} & E(\Lambda) \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \| \\ G & \xrightarrow{\rho} & E(\Lambda) \end{array}$$

**Demostración.** Primero veamos que, si existe $\psi$, entonces es única: sea $\psi: St(\Lambda) \longrightarrow G$ tal que $\rho\psi = \varphi$. Sea $i \neq j$, $\lambda \in \Lambda$; entonces $\psi(x_{ij}^{\lambda}) \in \rho^{-1}(e_{ij}^{\lambda})$ y, por lo tanto, $\psi(x_{ij}^{\lambda}) \sim y_{ij}^{\lambda}$, donde $\sim$ está definida en el problema 3.3 (i). Entonces, si $k \neq i, j$ tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(x_{ij}^{\lambda}) &= \psi([x_{ik}^{\lambda}, x_{kj}^{1}]) = [\psi(x_{ik}^{\lambda}), \psi(x_{kj}^{1})] = \\ &= [y_{ik}^{\lambda}, y_{kj}^{1}], \quad \text{por el problema 3.3 (i)} \\ &= {}^{k}z_{ij}^{\lambda} = z_{ij}^{\lambda}, \quad \text{por el problema 3.4 (ii).} \end{aligned}$$

Por lo tanto, como las $x_{ij}^{\lambda}$ generan a $St(\Lambda)$, si $\psi$ existe, es única.

A continuación, veamos que, si $\psi$ está definida por $\psi(x_{ij}^{\lambda}) = z_{ij}^{\lambda}$, ésta se extiende a un homomorfismo $\psi: St(\Lambda) \longrightarrow G$. Pero como $\rho(z_{ij}^{\lambda}) = e_{ij}^{\lambda}$, se sigue que $\rho\psi = \varphi$. Solamente necesitamos ver que los elementos $z_{ij}^{\lambda} \in G$ satisfacen relaciones que corresponden a las relaciones de Steinberg. Para esto, tenemos $z_{ij}^{\lambda} \sim y_{ij}^{\lambda}$ y $z_{kl}^{\mu} \sim y_{kl}^{\mu}$, luego,

$$[z_{ij}^{\lambda}, z_{kl}^{\mu}] = [y_{ij}^{\lambda}, y_{kl}^{\mu}] = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq l,\ j \neq k \\ z_{il}^{\lambda\mu} & \text{si } i \neq l,\ j = k \end{cases}$$

(véanse los problemas 3.3 (i) y 3.4 (ii)). Luego,

$$\begin{aligned} z_{ij}^{\lambda+\mu} = z_{ij}^{\mu+\lambda} &= [z_{ik}^{\mu+\lambda}, z_{kj}^{1}], \quad k \neq i, j \\ &= [z_{ik}^{\mu} z_{ik}^{\lambda}, z_{kj}^{1}], \quad \text{por el problema 3.3 (i)} \\ &= [z_{ik}^{\mu}, z_{ij}^{\lambda}] z_{ij}^{\lambda} z_{ij}^{\mu}, \quad \text{por el problema 3.3 (iii)} \\ &= z_{ij}^{\lambda} z_{ij}^{\mu}\ . \blacksquare \end{aligned}$$

**3.5 TEOREMA.** Sean $\Lambda$, $\Lambda'$ anillos. Entonces

$$St(\Lambda \times \Lambda') \cong St(\Lambda) \oplus St(\Lambda') \quad \text{y} \quad K_2(\Lambda \times \Lambda') \cong K_2(\Lambda) \oplus K_2(\Lambda').$$

**Demostración.** Consideremos los homomorfismos $St(\Lambda) \longrightarrow St(\Lambda \times \Lambda')$ dado por $x_{ij}^{\lambda} \longmapsto x_{ij}^{(\lambda,0)}$, y $St(\Lambda') \longrightarrow St(\Lambda \times \Lambda')$ dado por $x_{ij}^{\mu} \longmapsto x_{ij}^{(0,\mu)}$, que son inyectivos, pues tienen inverso izquierdo $St(\Lambda \times \Lambda') \longrightarrow St(\Lambda)$ y $St(\Lambda \times \Lambda') \longrightarrow St(\Lambda')$, inducidos por el homomorfismo de anillos $\Lambda \times \Lambda' \longrightarrow \Lambda$ y $\Lambda \times \Lambda' \longrightarrow \Lambda'$. Por lo tanto, podemos identificar $St(\Lambda)$ y $St(\Lambda')$ como subgrupos de $St(\Lambda \times \Lambda')$ generados por $x_{ij}^{(\lambda,0)}$ y $x_{ij}^{(0,\mu)}$, respectivamente. Estos dos subgrupos generan $St(\Lambda \times \Lambda')$, pues $x_{ij}^{(\lambda,\mu)} = x_{ij}^{(\lambda,0)} x_{ij}^{(0,\mu)}$. A continuación, veamos que estos dos subgrupos se centralizan uno a otro: para los generadores, tenemos que

$[x_{ij}^{(\lambda,0)}, x_{kl}^{(0,\mu)}] = 1$ si $i \neq l,\ j \neq k$;

$[x_{ij}^{(\lambda,0)}, x_{jk}^{(0,\mu)}] = x_{ik}^{((\lambda,0),(0,\mu))} = x_{ik}^{(0,0)} = 1$ si $i \neq k$;

$[x_{ij}^{(\lambda,0)}, x_{ki}^{(0,\mu)}] = x_{kj}^{(-(0.\mu),(\lambda,0))} = x_{kj}^{(0,0)} = 1$ si $k \neq j$; y

$[x_{ij}^{(\lambda,0)}, x_{ji}^{(0,\mu)}] = [x_{ij}^{(\lambda,0)}, [x_{jk}^{(0.\mu)}, x_{ki}^{(0,1)}]] = 1$ si $k \neq i, j$; por los casos anteriores.

Tenemos los homomorfismos $St(\Lambda \times \Lambda') \longrightarrow St(\Lambda)$ dado por $\alpha \longmapsto \alpha_1$, y $St(\Lambda \times \Lambda') \longrightarrow St(\Lambda')$, dado por $\alpha \longmapsto \alpha_2$, con $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, puesto que $x_{ij}^{(\lambda,\mu)} = x_{ij}^{(\lambda,0)} x_{ij}^{(0,\mu)}$; y aún más, si $\alpha \in St(\Lambda)$, entonces $\alpha = \alpha_1$, y si $\alpha \in St(\Lambda')$, entonces $\alpha = \alpha_2$ (véanse los generadores). Así que, si $\alpha \in St(\Lambda) \cap St(\Lambda')$, entonces

$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ y, por lo tanto, $\alpha = \alpha_1\alpha_2 = \alpha^2$ o $\alpha = 1$. Luego, $St(\Lambda) \cap St(\Lambda') = 1$ y $St(\Lambda \times \Lambda') = St(\Lambda) \oplus St(\Lambda')$. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} St(\Lambda \times \Lambda') & \xrightarrow{\varphi} & GL(\Lambda \times \Lambda') \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ St(\Lambda) \oplus St(\Lambda') & \xrightarrow{\varphi\oplus\varphi} & GL(\Lambda) \oplus GL(\Lambda') \end{array}$$

que da isomorfismos entre los núcleos, es decir, $K_2(\Lambda\times\Lambda') \cong K_2(\Lambda)\oplus K_2(\Lambda')$.∎

**3.6 .** Algunos cálculos de $K_2(\Lambda)$ para diversos anillos $\Lambda$ son los siguientes (su demostración está fuera de los alcances de este texto):

a) Sea $\Lambda$ un campo finito con $p^l$ elementos ($p$ un número primo), entonces $K_2(F_{p^l}) = 1$.

b) Si $\Lambda = \mathbb{Z}/n$, $n > 1$, entonces $K_2(\mathbb{Z}/n) = 1$ si $n \not\equiv 0 \pmod 4$, y $K_2(\mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/2$ si $n \equiv 0 \pmod 4$.

c) Si $\Lambda = \mathbb{Z}$, $K_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2$.

## PROBLEMAS

**3.1** Pruebe que una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\Lambda)$ conmuta con cualquier matriz elemental $e_{kl}^{\lambda}$ si, y sólo si, $A$ es una matriz diagonal de la forma $\lambda I$, con $\lambda \in Z(\Lambda)$.

**3.2** Establezca las siguientes identidades entre conmutadores: sea $G$ un grupo, $u, v, w \in G$.

(i) $[u,[v,w]] = [uv,w][w,u][w,v]$

(ii) $[w,u] = [u,w]^{-1}$

(iii) $[uv,w] = [u,[v,w]][v,w][u,w]$.

**3.3** Sea $\psi\colon St(\Lambda) \longrightarrow G$ una extensión central, y $G$ un grupo. Sea $\hat{u} = \rho(u) \in E(\Lambda)$, donde $\rho\colon G \longrightarrow E(\Lambda)$ es una extensión central, y definase $u \sim v$ si, y sólo si, $uv^{-1} \in Z(G)$. Como $\rho$ es una extensión central, tenemos, en particular, que si $u, v \in G$, con $\hat{u} = \hat{v}$, entonces $u \sim v$. Pruebe que

(i) si $u \sim u'$ y $v \sim v'$, entonces $[u,v] = [u',v']$. (Sustituya $u = \lambda u'$ y $v = \mu v'$, donde $\lambda, \mu \in Z(G)$.)

(ii) Si $u, v, w \in G$ tal que $[\hat{u}, \hat{v}] = [\hat{u}, \hat{w}] = 1$, entonces $[u, [v, w]] = 1$. (Sugerencia: sea $\lambda = [u, w]$, $\mu = [u, w]$; luego, $\hat{\lambda} = \hat{\mu} = 1$ y, por lo tanto, $\lambda, \mu \in Z(G)$. Entonces $uvu^{-1} = \lambda v$ y $uwu^{-1} = \mu w$, y $[\lambda v, \mu w] = [v, w]$, por (i); luego,

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] &= u[v, w]u^{-1}[v, w]^{-1} \\ &= [uvu^{-1}, uwu^{-1}][v, w]^{-1} \\ &= [\lambda v, \mu w][v, w]^{-1} \\ &= [v, w][v, w]^{-1} = 1 \text{ .)} \end{aligned}$$

**3.4** Pruebe que, bajo las hipótesis del problema 3.3,

(i) si $i \neq j,\ k \neq l,\ i \neq l,\ j \neq k$, entonces $[y_{ij}^{\lambda}, y_{kl}^{\mu}] = 1$. (Sugerencia: escoja $n \neq i, j, k, l$. Luego, $y_{kl}^{\mu} \sim [y_{kn}^{\mu}, y_{nl}^{1}]$ y $[y_{ij}^{\lambda}, y_{kl}^{\mu}] = [y_{ij}^{\lambda}, [y_{kn}^{\mu}, y_{nl}^{1}]] = 1$, por el problema 3.3 (i) y (ii).)

(ii) Sea ${}^{n}z_{ij}^{\lambda} = [y_{in}^{\lambda}, y_{nj}^{1}]$. Observe que $\rho({}^{n}z_{ij}^{\lambda}) = e_{ij}^{\lambda}$ y, por lo tanto, ${}^{n}z_{ij}^{\lambda} \sim y_{ij}^{\lambda}$ para toda $n$, y ${}^{n}z_{ij}^{\lambda}$ depende de $i, j, n$ y $\lambda$ solamente, y no de la selección de $y_{in}^{\lambda}$ y $y_{nj}^{1}$, por el problema 3.3 (i). Pruebe que ${}^{n}z_{ij}^{\lambda}$ no depende de $n$. (Sugerencia: compruebe que $[y_{ij}^{\lambda}, y_{jk}^{\mu}]({}^{n}z_{jk}^{\mu}) = ({}^{n}z_{ik}^{\lambda\mu})({}^{n}z_{jk}^{\mu})$ utilizando los problemas anteriores. Luego, tome $\mu = 1$.)

# BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS


[ALSS] Aisbett J., Lluis-Puebla E., Snaith V. and Soulé C. "On $K_*(\mathbb{Z}/n)$ and $K_*(\mathbb{F}_q[t]/(t^2))$". *Mem. Amer. Math. Soc.*, Vol. **57**, No. 329 (1985).

[ALS] Aisbett J., Lluis-Puebla E. and Snaith V. "On $K_3$ of $\mathbb{F}_q[t]/(t^2)$ and $\mathbb{F}_q[t]/(t^3)$". *Jour. of Algebra*, Vol **101**, No. 1 (1986).

Atiyah M., Mac Donald I. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison Wesley (1969).

Bass H. *Algebraic K-Theory.* Benjamin (1968).

Babakhanian A. *Cohomological Methods in Group Theory.* Dekker (1972).

Birkhoff G. Mac Lane S. *Algebra.* Macmillan (1968).

Bourbaki. *Algebra I.* Addison Wesley (1971).

Brown K. S. *Cohomology of Groups.* G.T.M., 87, Springer–Verlag (1982).

[C-LL] Cárdenas H., Lluis E. *Módulos Semisimples y Representación de Grupos Finitos.* Trillas (1970).

Cartan H., Eilenberg S. *Homological Algebra.* Princeton University Press (1956).

[E–F] Evens L. and Friedlander E. "On $K_*(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ ($p \geq 5$) and Related Homology Groups". *Trans. Amer. Math. Soc.* 270 (1982).

[F] Freyd P. *Abelian Categories.* Harper and Row (1966).

[G] Gurrola P. *Cohomología de Grupos y Extensiones Cruzadas* (Tesis de Licenciatura). Facultad de Ciencias, UNAM (1985).

Hilton P., Stammbach U. *A Course in Homological Algebra.* G.T.M., 4. Springer–Verlag (1971)

Huebschmann J. "Crossed n-fold Extensions of Groups and Cohomology". *Comment. Math. Helv.* 55 (1980).

Hu T. S. *An Introduction to Homological Algebra.* Holden Day (1968).

[L–S] Lam T. Y. and Siu. M. K. "$K_0$ and $K_1$, An Introduction to Algebraic $K$–Theory". *Amer. Math. Monthly*, April (1975), p. 329–364.

Lluis-Puebla E. *Cohomología de Grupos y $K$-Teoría Algebraica.* SET. Instituto de Matemáticas, UNAM (1981).

[LL] Lluis-Puebla E., Loday J.L., Gillet H., Soulé C., Snaith V. *Higher Algebraic $K$-Theory: an overview.* Lecture Notes in Mathematics Vol. 1491. Springer-Verlag 1992.

[LL–S] Lluis-Puebla E. and Snaith V. "Determination of $K_3(\mathbb{F}_{p^\ell}[t]/(t^2))$ for primes $p \geq 5$". *Current Trends in Algebraic Topology, CMS Conf. Proc.*, Vol **2.1**, *Amer. Math. Soc.* (1982).

[M] Mac Lane S. *Homology.* Springer–Verlag (1975).

Mac Lane S. *Origins of cohomology of groups.* L'Enseignement Mathématique, t. XXIV, fasc. 1–2 (1978).

[Mi] Milnor J. R. *Introduction to Algebraic K-Theory.* Annals of Math. Studies 72. Princeton (1971).

Rotman J. *The Theory of Groups: An Introduction.* Allyn and Bacon (1973).

Rotman J. *An Introduction to Homological Algebra.* Academic Press (1979).

[S] Silvester J. R. *Introduction to Algebraic K–Theory.* Chapman and Hall (1981).

Snaith V. *Computations in Algebraic K–Theory.* No publicado UWO. Canada (1978).

Wiess E. *Cohomology of Groups.* Academic Press (1969).

# LISTA DE SÍMBOLOS

# ÍNDICE DE MATERIAS

La presente obra brinda al lector la oportunidad de introducirse en una de las principales creaciones matemáticas del siglo XX, el Álgebra Homológica, al mismo tiempo que estudia la Cohomología de Grupos –fundamento del Álgebra Homológica– y la K-Teoría Algebraica –una de las más recientes ramas de la Matemática–. La literatura escrita hasta ahora sobre estos temas, además de ser escasa, presenta los conceptos con un enfoque restrictivo destinado exclusivamente a los estudiantes de posgrado. Este texto, que logra equilibrar el nivel de exposición de los temas, cubre esa deficiencia de la literatura sobre la materia y se propone como una alternativa para estudiantes tanto de licenciatura como de posgrado.
Este libro (primer texto matemático publicado en el sistema TEX en México) cumple ya quince años de ser utilizado exitosamente como texto sobre la materia en diversas universidades de España y el Continente Americano, incluyendo algunas universidades de Estados Unidos de Norteamérica y, desde luego, en México.
Para que el lector pueda obtener una idea general de lo que estudiará a lo largo del libro, en la introducción se resume todo el material expuesto. El libro esta diseñado para un curso de dos semestres en el nivel de licenciatura o de un semestre en el posgrado. Se supone que el estudiante posee ya los conocimientos básicos de la Teoría de Grupos, Anillos y Campos.
El autor, Emilio Lluis-Puebla, realizó sus Estudios Profesionales y de Maestría en Matemática en México. En 1980 obtuvo su Doctorado en Matemática en Canadá. Es catedrático de la Universidad Nacional Autónoma de México en sus Divisiones de Estudios Profesionales y de Posgrado desde hace veintisiete años. Ha formado varios profesores e investigadores que laboran tanto en México como en el extranjero. Su trabajo matemático ha quedado establecido en sus artículos de investigación y divulgación que ha publicado sobre la K-Teoría Algebraica y la Cohomología de Grupos en las más prestigiadas revistas nacionales e internacionales. Ha sido Profesor Visitante en Canadá.
Recibió varias distinciones académicas, entre otras, la medalla Gabino Barreda al más alto promedio en la Maestría, Investigador Nacional (1984-1990) y Cátedra Patrimonial de Excelencia del Conacyt (1992-1993). Es autor de varios libros sobre K-Teoría Algebraica, Álgebra Homológica, Álgebra Lineal y Teoría Matemática de la Música publicados en las editoriales con distribución mundial Addison Wesley, Birkhauser y Springer Verlag entre otras.
Es miembro de varias asociaciones científicas como la Real Sociedad Matemática Española y la American Mathematical Society. Es presidente de la Academia de Ciencias del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades, presidente de la Academia de Matemática de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística y presidente 2000-2002 de la Sociedad Matemática Mexicana.

Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana