Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Introducción a dualidad y regularidad en espacios y álgebras de Banach

Ana L. Barrenechea
Carlos C. Peña

www.sociedadmatematicamexicana.org.mx

Serie: Textos. Vol. 17 (2014)

Introducción a dualidad y regularidad en espacios y álgebras de Banach

Ana L. Barrenechea & Carlos C. Peña
UNCPBA. FCExactas.
Departamento de Matemáticas.
NUCOMPA
Campus Universitario, Tandil, Argentina.
analucia.barrenechea@gmail.com
ccpenia@gmail.com

30 de septiembre de 2014

Índice

1. Introducción

La dualidad de espacios normados es central para el abordaje de cuestiones geométricas y topológicas de los mismos. En el contexto de espacios de Banach la completitud permite avanzar mucho más, siendo especialmente rico este escenario si se tratare con álgebras de Banach. El análisis funcional moderno es difícil de abordar por la diversidad de enfoques y la complejidad de las construcciones, no obstante ser las mismas en general concurrentes y guiadas por una suerte de derrotero intrínseco. Pareciera haber capítulos, cada uno con valía e interés propios, con límites a veces difusos. Hay también especialistas que tienen el mérito y la capacidad de integrarlos, complementarlos y enriquecerlos a veces de manera magistral.

En este trabajo, que procuramos en lo posible sea autocontenido, nos hemos de concentrar en cuestiones ligadas a la *regularidad* de álgebras de Banach. Se trata de un aspecto teórico de carácter algebraico, con fuertes implicancias que permiten una mejor comprensión de la estructura de las correspondientes álgebras. En forma suscinta, es conocido que toda álgebra de Banach $\mathcal{U}$ está naturalmente inmersa en el correspondiente espacio bidual $\mathcal{U}^{**}$. Es posible extender el producto de $\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}^{**}$ de dos maneras distintas, de modo que se dirá que el álgebra subyacente será *regular* cuando dichas extensiones coincidan. La condición de regularidad tiene consecuencias diversas, siendo la misma objeto de intensa investigación desde que R. F. Arens la introdujera en 1951 (cf. [3], [4]). No obstante, hasta donde disponemos de información es escasa la literatura sobre un tratamiento sistemático del tema, particularmente en castellano. Para mayores referencias y especificaciones recomendamos consultar [24], [61] y [102]. En [28] se considera el estudio de espacios biduales de álgebras de medidas, en especial las asociadas a grupos localmente compactos.

Nuestro interés en la materia se ha dado en base a trabajos relacionados directa o indirectamente con la problemática sobre derivaciones en álgebras de Banach (cf. [1], [16], [15], [105]). Precisamente, aquí sobreviene la llamada *teoría de amenabilidad*, iniciada en el contexto de álgebras de Banach principalmente en base al trabajo [77]. Si $\mathcal{U}$ es un álgebra de Banach y X es un $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach, fijado $x \in X$ el operador $\mathrm{ad}_x(a) = ax - xa$ de $\mathcal{U}$ en X es no solo lineal y acotado, sinó que es una derivación, i.e. $\mathrm{ad}_x(ab) = a\,\mathrm{ad}_x(b) + \mathrm{ad}_x(a)\,b$ si $a, b \in \mathcal{U}$. Se dice que ad_x es *la derivación interna implementada por* $x \in X$. El álgebra de Banach $\mathcal{U}$ se dirá a su vez *amenable* si cada derivación $\delta : \mathcal{U} \to X^*$, cualquiera sea el $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach X, es interna. Las conexiones entre la teoría de amenabilidad y de regularidad de álgebras de Banach se dan en forma permanente (v. [53], [26], [109]). De todos modos, nos apartamos de este incentivo inicial para focalizarnos en la cuestión misma de la regularidad, la que tiene interés propio. Sin duda, quedan vastos aspectos no considerados en este trabajo, a veces ni siquiera mencionados. Nos limita no solo el espacio sinó también nuestro grado de conocimiento o acceso a la información. El objetivo es modesto, se trata de una introducción, un inicio, unos primeros pasos en una empresa que promete resultados profundos y relevantes. Ahí esté probablemente el acierto en la investigación inicial de Arens, el descubrimiento de una suerte de cantera matemática cuya explotación todavía ha de dar duro y valioso trabajo por muchos años.

Los autores agradecen al Dr. Emilio Lluis Puebla, y a las autoridades del Comité Editorial de las Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana, por la consideración de este trabajo y las atenciones dispensadas durante el proceso de arbitraje.

2. Productos de Arens

2.1. Álgebras intrínsecas en el espacio bidual

Proposición 2.1 *(cf. [3], [4])*[1][2] *Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach. Entonces $\mathcal{U}^*$ admite una estructura natural de $\mathcal{U}$-módulo de Banach.*

Demostración 2.2 *Si $x \in \mathcal{U}$ y $\mu \in \mathcal{U}^*$ indicaremos $\mu(x) \triangleq \langle x, \mu \rangle$. Entonces, si $a \in \mathcal{U}$, $\lambda \in \mathcal{U}^*$, definimos $a\lambda \in \mathcal{U}^*$ (resp. $\lambda a \in \mathcal{U}^*$) haciendo $\langle x, a\lambda \rangle \triangleq \langle xa, \lambda \rangle$ (resp. $\langle x, \lambda a \rangle = \langle ax, \lambda \rangle$) para cada $x \in \mathcal{U}$. Es fácil ver entonces que dichas definiciones son correctas, obteniéndose así sendas acciones de $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{U}^*$ con las que $\mathcal{U}^*$ deviene en un $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach.*

Observación 2.3 *Si $n \in \mathbb{N}$ indicaremos $\mathcal{U}^{(n+1)*} \triangleq \left(\mathcal{U}^{(n)*}\right)^*$ y, en particular, $\mathcal{U}^{(1)*} \triangleq \mathcal{U}^*$. Inductivamente es fácil ver que $\mathcal{U}^{(n)*}$ admite una estructura natural de $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 2.4 *Si $a \in \mathcal{U}$, $\lambda \in \mathcal{U}^*$ y $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ sean $\langle a, \lambda\Phi \rangle \triangleq \langle a\lambda, \Phi \rangle$ y $\langle a, \Phi\lambda \rangle \triangleq \langle \lambda a, \Phi \rangle$. Entonces:*

(i) $\lambda\Phi$ y $\Phi\lambda \in \mathcal{U}^*$ y $\max\{\|\lambda\Phi\|, \|\Phi\lambda\|\} \leq \|\Phi\| \|\lambda\|$.

(ii) Las aplicaciones $(\lambda, \Phi) \to \lambda\Phi$ y $(\lambda, \Phi) \to \Phi\lambda$ son $\mathbb{C}$-bilineales.

Demostración 2.5 *Inmediata.*

Definición 2.6 *Sean $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$. Definimos el primer y segundo productos de Arens de Φ y Ψ, $\Phi\Box\Psi$ y $\Phi\Diamond\Psi$ respectivamente, haciendo*

$$\langle \lambda, \Phi\Box\Psi \rangle \triangleq \langle \Psi\lambda, \Phi \rangle \ \ y \ \ \langle \lambda, \Phi\Diamond\Psi \rangle \triangleq \langle \lambda\Phi, \Psi \rangle$$

si $\lambda \in \mathcal{U}^*$. Se dice que un álgebra de Banach $\mathcal{U}$ es Arens-regular si los productos de Arens son coincidentes.

Proposición 2.7 **(i)** *El espacio de Banach $\mathcal{U}^{**}$, munido de los productos de Arens, deviene álgebra de Banach.*

[1] *Palabras clave*: Álgebras y módulos de Banach. Aplicaciones débilmente compactas. Teorema de Banach-Alaoglu. Productos semidirectos. Elementos cuasi-inversibles y/o cuasi-singulares. Radical de Jacobson. Álgebras semisimples. Estados de una C^*-álgebra. Representaciones cíclicas, involutivas, fieles. Vectores cíclicos.

[2] Por información relacionada v. [71], [69], [139], [55], . Por aspectos geométricos y regularidad de álgebras de Banach v. [56]. Respecto de invariancia de la regularidad por extensiones v. [100]. Por regularidad de álgebras de Banach límite inductivas v. [107].

(ii) *En ambos casos,* $\iota_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^{**}$ *es un homomorfismo algebraico.*

(iii) *Si* $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$ *hay sendas redes*

$$\{a_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq [\mathcal{U}]_{\|\Phi\|} \;\; y \;\; \{b_\beta\}_{\beta\in B} \subseteq [\mathcal{U}]_{\|\Psi\|} \tag{1}$$

tales que $\Phi = w^*\text{-lím}_{\alpha\in A}\, \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha)$, $\Psi = w^*\text{-lím}_{\beta\in B}\, \iota_{\mathcal{U}}(b_\beta)$ *y además*

$$\Phi\Box\Psi = w^*\text{-}\lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B} \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha b_\beta) \;\; y \;\; \Phi\Diamond\Psi = w^*\text{-}\lim_{\beta\in B}\lim_{\alpha\in A} \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha b_\beta). \tag{2}$$

(iv) $\left((\mathcal{U}^{op})^{**}, \Box\right) = \left((\mathcal{U}^{**})^{op}, \Diamond\right).$

(v) *Si* $a \in \mathcal{U}$, $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ *entonces*

$$\iota_{\mathcal{U}}(a)\Box\Phi = \iota_{\mathcal{U}}(a)\Diamond\Phi = a\Phi \;\; y \;\; \Phi\Box\iota_{\mathcal{U}}(a) = \Phi\Diamond\iota_{\mathcal{U}}(a) = \Phi a.$$

(vi) *Si* $\mathcal{U}$ *es abeliana,* $\mathcal{U}$ *es Arens regular si y solo si* $\mathcal{U}^{**}$ *es abeliana.*

(vii) *Si* $\mathcal{U}$ *es unitaria también lo es* $\mathcal{U}^{**}$.

Demostración 2.8 **(i)** *Haremos la prueba solo para el primer producto, siendo análoga en el otro caso. Sean* $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$, $\lambda, \mu \in \mathcal{U}^*$, $s \in \mathbb{C}$. *Entonces*

$$\begin{aligned}\langle s\lambda + \mu, \Phi\Box\Psi\rangle &= \langle \Psi(s\lambda+\mu), \Phi\rangle \\ &= \langle s\Psi\lambda + \Psi\mu, \Phi\rangle \\ &= s\langle \Psi\lambda, \Phi\rangle + \langle \Psi\mu, \Phi\rangle \\ &= s\langle \lambda, \Phi\Box\Psi\rangle + \langle \mu, \Phi\Box\Psi\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\Phi\Box\Psi : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *es* $\mathbb{C}$*-lineal. Además*

$$|\langle \lambda, \Phi\Box\Psi\rangle| \le \|\Psi\lambda\|\,\|\Phi\| \le \|\lambda\|\,\|\Phi\|\,\|\Psi\|,$$

o sea $\Phi\Box\Psi \in \mathcal{U}^{**}$ *y* $\|\Phi\Box\Psi\| \le \|\Phi\|\,\|\Psi\|$.

(ii) *Sean* $a, b \in \mathcal{U}$, $\lambda \in \mathcal{U}^*$. *Entonces*

$$\begin{aligned}\langle \lambda, \iota_{\mathcal{U}}(a)\Box\iota_{\mathcal{U}}(b)\rangle &= \langle \iota_{\mathcal{U}}(b)\lambda, \iota_{\mathcal{U}}(a)\rangle \\ &= \langle a, \iota_{\mathcal{U}}(b)\lambda\rangle \\ &= \langle \lambda a, \iota_{\mathcal{U}}(b)\rangle \\ &= \langle b, \lambda a\rangle \\ &= \langle ab, \lambda\rangle \\ &= \langle \lambda, \iota_{\mathcal{U}}(ab)\rangle.\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, \iota_{\mathcal{U}}(a) \Diamond \iota_{\mathcal{U}}(b)\rangle &= \langle \lambda \iota_{\mathcal{U}}(a), \iota_{\mathcal{U}}(b)\rangle \\
&= \langle b, \lambda \iota_{\mathcal{U}}(a)\rangle \\
&= \langle b\lambda, \iota_{\mathcal{U}}(a)\rangle \\
&= \langle a, b\lambda\rangle \\
&= \langle ab, \lambda\rangle \\
&= \langle \lambda, \iota_{\mathcal{U}}(ab)\rangle .
\end{aligned}$$

(iii) *Por el Teo. 13.37 hay redes como en (1) tales que*

$$\Phi = w^* - \lim_{\alpha\in A} \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha), \Psi = w^* - \lim_{\beta\in B} \iota_{\mathcal{U}}(b_\beta).$$

Si $\lambda \in \mathcal{U}^*$ *tenemos entonces*

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, \Phi \square \Psi\rangle &= \langle \Psi\lambda, \Phi\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A} \langle \Psi\lambda, \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha)\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A} \langle a_\alpha, \Psi\lambda\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A} \langle \lambda a_\alpha, \Psi\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B} \langle \lambda a_\alpha, \iota_{\mathcal{U}}(b_\beta)\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B} \langle b_\beta, \lambda a_\alpha\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B} \langle a_\alpha b_\beta, \lambda\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B} \langle \lambda, \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha b_\beta\rangle .
\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, \Phi \Diamond \Psi\rangle &= \langle \lambda\Phi, \Psi\rangle \\
&= \lim_{\beta\in B} \langle \lambda\Phi, \iota_{\mathcal{U}}(b_\beta)\rangle \\
&= \lim_{\beta\in B} \langle b_\beta, \lambda\Phi\rangle \\
&= \lim_{\beta\in B} \langle b_\beta\lambda, \Phi\rangle \\
&= \lim_{\beta\in B}\lim_{a\in A} \langle b_\beta\lambda, \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha)\rangle \\
&= \lim_{\beta\in B}\lim_{a\in A} \langle a_\alpha, b_\beta\lambda\rangle \\
&= \lim_{\beta\in B}\lim_{a\in A} \langle a_\alpha b_\beta, \lambda\rangle \\
&= \lim_{\beta\in B}\lim_{a\in A} \langle \lambda, \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha b_\beta\rangle .
\end{aligned}$$

(iv) *Con la notación anterior, por (2) tenemos*

$$\begin{aligned} \Phi\Box_{(\mathcal{U}^{op})^{**}}\Psi &= w^* - \lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B}\iota_{\mathcal{U}}\left(a_\alpha\Box_{op}b_\beta\right) \\ &= w^* - \lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B}\iota_{\mathcal{U}}\left(b_\beta a_\alpha\right) \\ &= \Psi\Diamond\Phi \\ &= \Phi\Diamond_{op}\Psi. \end{aligned} \tag{3}$$

(v) *Sean $a\in\mathcal{U}$, $\lambda\in\mathcal{U}$, $\Phi\in\mathcal{U}^{**}$. Entonces*

$$\begin{aligned} \langle\lambda,\iota_{\mathcal{U}}(a)\,\Box\Phi\rangle &= \langle\Phi\lambda,\iota_{\mathcal{U}}(a)\rangle \\ &= \langle a,\Phi\lambda\rangle \\ &= \langle\lambda a,\Phi\rangle \\ &= \langle\lambda,a\Phi\rangle\,. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $x\in\mathcal{U}$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle x,\lambda\iota_{\mathcal{U}}(a)\rangle &= \langle x\lambda,\iota_{\mathcal{U}}(a)\rangle \\ &= \langle a,x\lambda\rangle \\ &= \langle ax,\lambda\rangle \\ &= \langle x,\lambda a\rangle\,, \end{aligned}$$

i.e. $\lambda\iota_{\mathcal{U}}(a)=\lambda a$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \langle\lambda,\iota_{\mathcal{U}}(a)\,\Diamond\Phi\rangle &= \langle\lambda\iota_{\mathcal{U}}(a)\,,\Phi\rangle \\ &= \langle\lambda a,\Phi\rangle \\ &= \langle\lambda,a\Phi\rangle\,. \end{aligned}$$

El resto sigue en forma análoga.

(vi) *Si $\mathcal{U}$ es abeliana y Arens-regular por (3) tenemos*

$$\Phi\Diamond\Psi=\Phi\Box\Psi=\Phi\Box_{(\mathcal{U}^{op})^{**}}\Psi=\Psi\Diamond\Phi=\Psi\Box\Phi.$$

Recíprocamente, si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}^{**}$ son abelianas usando (3) nuevamente es

$$\Phi\Diamond\Psi=\Psi\Diamond\Phi=\Phi\Box_{(\mathcal{U}^{op})^{**}}\Psi=\Phi\Box\Psi.$$

(vii) *Es inmediato.*[3][4]

---

[3] Dado $n\in\mathbb{N}$, $C^{(n)}([0,1])$ es regular (cf. [24], Th. 4.4.8).

[4] Hay variantes más débiles que la Arens regularidad. La propiedad de *semiregularidad* permite caracterizar las álgebras de Banach no regulares munidas de aproximaciones acotadas bilaterales de la unidad para las cuales, aún siendo distintos los productos de Arens, guardan entre sí una serie de condicionmes razonables [62]. Toda álgebra regular será semiregular. Para un grupo localmente compacto G el álgebra $L^1(G)$ será semiregular si y solo si G es discreto o conmutativo [93].

2.2. Con relación a formas bilineales

Observación 2.9 *Sean X, Y, Z espacios de Banach, $B : X \times Y \to Z$ una forma bilineal acotada. Para $x \in X$, $y \in Y$, $z^* \in Z^*$, $x^{**} \in X^{**}$ e $y^{**} \in Y^{**}$ definimos*

$$\begin{array}{rl} B^* : Z^* \times X \to Y^*, & \langle y, B^*(z^*, x)\rangle = \langle B(x,y), z^*\rangle, \\ B^{**} : Y^{**} \times Z^* \to X^*, & \langle x, B^{**}(y^{**}, z^*)\rangle = \langle B^*(z^*, x), y^{**}\rangle, \\ B^{***} : X^{**} \times Y^{**} \to Z^{**}, & \langle z^*, B^{***}(x^{**}, y^{**})\rangle = \langle B^{**}(y^{**}, z^*), x^{**}\rangle. \end{array}$$

Entonces B^*, B^{**} y B^{***} devienen formas bilineales bien definidas, acotadas y puede verse fácilmente que

$$\|B^{***}\| = \|B^{**}\| = \|B^*\| = \|B\| < \infty.$$

Dados $x^{**} \in X^{**}$ y $y^{**} \in Y^{**}$ sean $\{x_a\}_{a\in A}$ e $\{y_b\}_{b\in B}$ sendas redes acotadas en X y Y tales que

$$x^{**} = \sigma(X^{**}, X^*)\text{-}\lim_{a\in A} \iota_X(x_a) \ \text{ y } y^{**} = \sigma(Y^{**}, Y^*)\text{-}\lim_{b\in B} \iota_Y(y_b).$$

Si $z^* \in Z^*$ tenemos entonces

$$\begin{aligned} \langle z^*, B^{***}(x^{**}, y^{**})\rangle &= \lim_{a\in A} \langle x_a, B^{**}(y^{**}, z^*)\rangle \\ &= \lim_{a\in A} \langle B^*(z^*, x_a), y^{**}\rangle \\ &= \lim_{a\in A}\lim_{b\in B} \langle y_b, B^*(z^*, x_a)\rangle \\ &= \lim_{a\in A}\lim_{b\in B} \langle B(x_a, y_b, z^*)\rangle, \end{aligned}$$

i.e.

$$B^{***}(x^{**}, y^{**}) = \sigma(Z^{**}, Z^*)\text{-}\lim_{a\in A}\lim_{b\in B} \iota_Z(B(x_a, y_b)).$$

En acuerdo con la notación de la Prop. 2.7(iii) indicaremos

$$x^{**}\underset{B}{\square}y^{**} = \sigma(Z^{**}, Z^*)\text{-}\lim_{a\in A}\lim_{b\in B} \iota_Z(B(x_a, y_b)).$$

Asimismo, sea $B^\tau : Y \times X \to Z$, $B^\tau(y,x) \triangleq B(x,y)$ si $x \in X$ e $y \in Y$. Para $x^{**} \in X^{**}$ y $y^{**} \in Y^{**}$ escribiremos

$$\begin{aligned} y^{**}\underset{B}{\Diamond}x^{**} &= B^{\tau***}(y^{**}, x^{**}) \\ &= \sigma(Z^{**}, Z^*)\text{-}\lim_{b\in B}\lim_{a\in A} \iota_Z(B^\tau(y_b, x_a) \\ &= \sigma(Z^{**}, Z^*)\text{-}\lim_{b\in B}\lim_{a\in A} \iota_Z(B(x_a, y_b). \end{aligned}$$

Claramente, B puede decirse regular si $B^{***} = B^{\tau***\tau}$ y podemos inferir el siguiente

Corolario 2.10 **(i)** *Si* X *es un* $\mathcal{U}$*-módulo de Banach* X^{**} *admíte sendas estructuras de* $(\mathcal{U}^{**},\Box)$ *y* $(\mathcal{U}^{**},\Diamond)$ *módulos de Banach.*

(ii) $\Box$ *define la única forma bilineal sobre* $\mathcal{U}^{**}\times\mathcal{U}^{**}$ *que extiende al producto de* $\mathcal{U}$ *de modo que la aplicación* $x^{**}\to x^{**}\Box y^{**}$ *es* (w^*,w^*) *continua para cada* $y^{**}\in\mathcal{U}^{**}$ *fijo mientras que cada aplicación* $y^{**}\to\iota_{\mathcal{U}}(x)\,\Box y^{**}$ *es* (w^*,w^*) *continua si* $x\in\mathcal{U}$*.*

(iii) $\Diamond$ *define la única forma bilineal sobre* $\mathcal{U}^{**}\times\mathcal{U}^{**}$ *que extiende al producto de* $\mathcal{U}$ *de modo que la aplicación* $y^{**}\to x^{**}\Diamond y^{**}$ *es* (w^*,w^*) *continua para cada* $x^{**}\in\mathcal{U}^{**}$ *fijo mientras que cada aplicación* $x^{**}\to x^{**}\Box\iota_{\mathcal{U}}(y)$ *es* (w^*,w^*) *continua si* $y\in\mathcal{U}$*.*

Proposición 2.11 *Una forma bilineal acotada* $B:X\times Y\to Z$ *entre espacios de Banach es regular si y solo si* $B_\lambda:X\times Y\to\mathbb{C}$ *lo es para todo* $\lambda\in Z^*$*, donde* $B_\lambda=\lambda\circ B$*.*

Demostración 2.12 *Indicaremos* $B_x(y)=B(x,y)$*,* $x\in X$ *e* $y\in Y$*, de modo que* $\{B_x\}_{x\in X}\subseteq\mathcal{B}(Y,Z)$*. Fijado* $\lambda\in Z^*$ *sea* $\beta\in\mathcal{B}(X,Y^*)$ *tal que* $\beta(x)=(B_\lambda)_x$*. Entonces*

$$\begin{array}{ll} B_\lambda^*:\mathbb{C}^*\times X\to Y^*, & B_\lambda^*(c^*,x)=B_x^*(\lambda^*(c^*)),\\ B_\lambda^{**}:Y^{**}\times\mathbb{C}^*\to X^*, & B_\lambda^{**}(y^{**},c^*)=c^*\beta^*(y^{**}),\\ B_\lambda^{***}:X^{**}\times Y^{**}\to\mathbb{C}^{**}, & B_\lambda^{***}(x^{**},y^{**})=\langle\beta^*(y^{**}),x^{**}\rangle. \end{array}\tag{4}$$

Sea $x^{**}=w^*\text{-lím}_{i\in I}\,\iota_X(x_i)$*,* $y^{**}=w^*\text{-lím}_{j\in J}\,\iota_Y(y_j)$ *para ciertas redes acotadas* $\{x_i\}_{i\in I}$*,* $\{y_j\}_{j\in J}$ *de* X *e* Y *respectivamente. Por (4), si* $z^*\in\mathbb{C}^*$ *obtenemos*

$$\begin{aligned}\langle z^*,B_\lambda^{***}(x^{**},y^{**})\rangle &=\lim_{i\in I}\langle x_i,z^*\beta^*(y^{**})\rangle\\ &=\lim_{i\in I}\langle z^*\beta(x_i),y^{**}\rangle\\ &=\lim_{i\in I}\lim_{j\in J}\langle y_j,z^*\beta(x_i)\rangle\\ &=\lim_{i\in I}\lim_{j\in J}\langle B_\lambda(x_i,y_j),z^*\rangle\\ &=\lim_{i\in I}\lim_{j\in J}\langle B(x_i,y_j),\lambda^*(z^*)\rangle\\ &=\langle\lambda^*(z^*),B^{***}(x^{**},y^{**})\rangle\\ &=\langle z^*,\lambda^{**}(B^{***}(x^{**},y^{**}))\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $B_\lambda^{***}=\lambda^{**}\circ B^{***}$*. Análogamente,* $B_\lambda^{\tau***}=\lambda^{**}\circ B^{\tau***}$*. Además*

$$B_\lambda^{\tau***\tau}=\lambda^{**}\circ B^{\tau***\tau},$$

de modo que si B es regular B_λ será regular para cada $\lambda \in Z^*$. Recíprocamente, si cada B_λ es regular dado $(x^{**}, y^{**}) \in X^{**} \times Y^{**}$ será $\lambda^{**}(z^{**}) = 0_{\mathbb{C}^{**}}$, donde $z^{**} = (B^{***} - B^{\tau***\tau})(x^{**}, y^{**})$ en Z^{**}. En consecuencia, dado $z^* \in Z^*$ tenemos

$$0 = \langle z^*, \lambda^{**}(z^{**}) \rangle = \langle \lambda^*(z^*), z^{**} \rangle = \langle z^* \circ \lambda, z^{**} \rangle = \langle z^* \lambda, z^{**} \rangle = z^* \langle \lambda, z^{**} \rangle,$$

i.e. $\langle \lambda, z^{**} \rangle = 0$. Como $\lambda \in Z^*$ es arbitrario $z^{**} = 0_{Z^{**}}$ y B resulta regular.

Ejemplo 2.13 *Sea $\mathcal{U} = c_0(\mathbb{N})$, considerada $\mathcal{U}$ con la estructura usual de álgebra de Banach. En consecuencia, $\mathcal{U}^* \approx l^1(\mathbb{N})$ y $\mathcal{U}^{**} \approx l^\infty(\mathbb{N})$. Indicaremos a, b, ... a los elementos de $\mathcal{U}$, λ, μ, ... a los de $\mathcal{U}^*$ y ϕ, ψ ... a los de $\mathcal{U}^{**}$. Sea $m : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ tal que $m(a, b) = ab$. Fijado λ haremos $m_\lambda : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, $m_\lambda(a, b) = \langle ab, \lambda \rangle$. Es fácil evaluar que*

$$\begin{array}{rr} m_\lambda^* : \mathbb{C}^* \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*, & m_\lambda^*(z, a) = za\lambda, \\ m_\lambda^{**} : \mathcal{U}^{**} \times \mathbb{C}^* \to \mathcal{U}^*, & m_\lambda^{**}(\phi, z) = z\lambda\phi, \\ m_\lambda^{***} : \mathcal{U}^{**} \times \mathcal{U}^{**} \to \mathbb{C}^{**}, & m_\lambda^{***}(\phi, \psi) = \langle \lambda, \phi\psi \rangle, \end{array}$$

siendo m_λ^{***} extensión de m. Haciendo $m^\tau(a, b) = m(b, a)$ para $a, b \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{U}$ es abeliana es $m^\tau = m$ y $m_\lambda^{\tau***}$ es extensión de m^τ. Pero $m_\lambda^{***} = m_\lambda^{\tau***\tau}$, de donde sigue la regularidad de $\mathcal{U}$ aplicando la Prop. 2.11.

Teorema 2.14 *(cf. [7], Th. 2) Sean X, Y, Z, W espacios normados y consideremos $m_1 \in \mathcal{B}(X, Y; Z)$, $m_2 \in \mathcal{B}(X, W; Z)$ tales que m_1 factoriza por m_2, i.e. existe $h \in \mathcal{B}(Y; W)$ tal que $m_1 = m_2 \circ (Id_X \times h)$. Si $h([Y]_1)$ es $\sigma(h(Y), W^*)$ compacto entonces m_1 es regular.*

Demostración 2.15 *Sean $x^{**} \in X^{**}$, $y^{**} \in Y^{**}$, $z^* \in Z^*$. Sean $\{x_i\}_{i \in I}$ e $\{y_j\}_{j \in J}$ redes acotadas en X e Y tales que*

$$x^{**} = w^* - \lim_{i \in I} \iota_X(x_i) \quad e \quad y^{**} = w^* - \lim_{j \in J} \iota_Y(y_j).$$

Por hipótesis podemos suponer, considerando eventualmente alguna subred, que existe $y \in Y$ tal que $h(y) = w\text{-}\lim_{j \in J} h(y_j)$. Para $i \in I$ fijo tenemos

$$\begin{aligned} \langle h(y), z^* \circ m_2(x_i, \circ) \rangle &= \lim_{j \in J} \langle h(y_j), z^* \circ m_2(x_i, \circ) \rangle \\ &= \lim_{j \in J} \langle m_2(x_i, h(y_j)), z^* \rangle, \end{aligned}$$

i.e. $w^*\text{-lím}_{j\in J}\,\iota_Z(m_2(x_i,h(y_j))) = \iota_Z(m_2(x_i,h(y)))$. *Así*

$$\begin{aligned}
x^{**}\underset{m_1}{\Box}y^{**} &= w^*\text{-}\lim_{i\in I}\lim_{j\in J}\iota_Z(m_2(x_i,h(y_j)))\\
&= w^*\text{-}\lim_{i\in I}\iota_Z(m_2(x_i,h(y)))\\
&= x^{**}\underset{m_1}{\Diamond}\iota_Y(y)\\
&= w^*\text{-}\lim_{j\in J}x^{**}\underset{m_1}{\Diamond}\iota_Y(y_j)\ \ (\textit{pues } L_{x^{**}}^{\overset{\Diamond}{m_1}}\in(w^*,w^*)\,)\\
&= w^*\text{-}\lim_{j\in J}\lim_{i\in I}\iota_X(x_i)\underset{m_1}{\Diamond}\iota_Y(y_j)\\
&= w^*\text{-}\lim_{j\in J}\lim_{i\in I}\iota_Z(m_2(x_i,h(y_j)))\\
&= x^{**}\underset{m_1}{\Diamond}y^{**}.
\end{aligned}$$

Proposición 2.16 *(cf. [7]) Sean X,Y,Z espacios normados, $h\in\mathcal{B}(Y^*;Y)$ monomorfismo tal que $\lambda(h(\mu))=\mu(h(\lambda))$ si $\lambda,\mu\in Y^*$. Si $m_2\in\mathcal{B}(X,Y;Z)$ la forma bilineal acotada $m_1(x,\lambda)=m_2(x,h(\lambda))$ en $\mathcal{B}(X,Y^*;Z)$ es regular.*

Demostración 2.17 *Por el teorema de Alaoglu $[Y^*]_1$ es w^*-compacta y por la hipótesis sigue que $h\in(w^*,w)$. Luego $h([Y^*]_1)$ resulta débilmente compacta y basta aplicar el Teorema 2.14.*

Ejemplos 2.18 **(i)** *Si X, Z son espacios normados, todo forma bilineal acotada de $X\times l^1(\mathbb{N})$ en Z que factoriza a través de otra de $X\times c_0(\mathbb{N})$ en Z es regular. En efecto, haciendo $Y=c_0(\mathbb{N})$ y $h:l^1(\mathbb{N})\hookrightarrow Y$, se está en las condiciones de la Prop. 2.16.*

(ii) *Si $m(x,f)=x*f$, $x\in L^1[0,1]$, $f\in L^\infty[0,1]$, m es forma bilineal acotada con valores en $L^1[0,1]$. Si $Y=L^1[0,1]$, $h:L^\infty[0,1]\hookrightarrow L^1[0,1]$, m factoriza a través del producto de convolución de $L^1[0,1]$, se está en las condiciones de la Prop. 2.16 y m resulta regular. Más generalmente, si G grupo de Hausdorff compacto el producto de convolución $L^1(G)\times L^\infty(G)\to L^1(G)$ es regular.*

(iii) *Si $m(x,f)=x*f$, $x\in C[0,1]$, $f\in L^\infty[0,1]$, m es forma bilineal acotada con valores en $C[0,1]$. Como en (ii) sigue que m es regular. Más generalmente, si G grupo de Hausdorff compacto el producto de convolución $C(G)\times L^\infty(G)\to C(G)$ es regular.*

(iv) *$(C[0,1],*)$ es regular. Más generalmente, sean X,Y,Z,W espacios de Banach, $W\subseteq Y$. Si $m\in\mathcal{B}(X,Y;Z)$ regular entonces $m_1=m\circ Id_X\times j$ es regular, donde $j:W\hookrightarrow Y$. En efecto, basta notar que*

$$m_1^{***}=m^{***}\circ(Id_{X^{**}}\times j^{**})=m^{\tau***\tau}\circ(Id_{X^{**}}\times j^{**})=m_1^{\tau***\tau}.$$

(v) $(L^\infty[0,1], *)$ *es regular, pues factoriza mediante el producto de convolución a través de* $L^1[0,1] \times L^\infty[0,1] \to L^\infty[0,1]$.

(vi) *Sea* H *espacio de Hilbert separable ,* $C(H)$ *la clase de operadores compactos y* $T(H)$ *la de operadores traza. Si* $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ *es base ortonormal de* H *y* $T \in \mathcal{B}(H)^+$ *el valor de la serie* $\sum_{n=1}^\infty \langle Te_n, e_n\rangle$*, al que denotamos* $\operatorname{tr}(T)$ *, es independiente de la base que se considere. Precisamente* $T(H)$ *consiste de los operadores* $T \in \mathcal{B}(H)$ *tales que* $|T|$ *tiene traza finita, en cuyo caso se escribe* $\|T\|_1 = \operatorname{tr}(|T|)$ *. Así* $(T(H), \|\circ\|_1)$ *es un espacio de Banach,* $\|T\| \leq \|T\|_1$ *si* $T \in T(H)$*,* $T(H) \subseteq C(H)$ *y hay un isomorfismo isométrico suryectivo*

$$\eta : T(H) \to C(H)^*, \ \eta(T)(C) = \operatorname{tr}(CT).$$

(V. [111], Ch. VI, §6). Sea $h : C(H)^* \to C(H)$*,* $h = j \circ \eta^{-1}$*, con* $j : T(H) \hookrightarrow C(H)$*. Si* $S, T \in T(H)$*,* $\eta(S) = s$ *y* $\eta(T) = t$ *tenemos*

$$\begin{aligned} s(h(t)) &= s(T) \\ &= \eta(S)(T) \\ &= \operatorname{tr}(T \circ S) \\ &= \operatorname{tr}(S \circ T) \\ &= \eta(T)(S) \\ &= t(S) \\ &= t(h(s)). \end{aligned}$$

Así $m(T, s) = T \circ \eta^{-1}(s)$*,* $(T, s) \in T(H) \times C(H)^*$*, define una forma bilineal regular como consecuencia del Teorema 2.14, y podemos concluir que* $(T(H), \circ)$ *es regular.*

2.3. Sobre la no abelianidad de $\left(\left(l^1(\mathbb{Z}), *\right)^{**}, \Box\right)$

Ejemplo 2.19 *(cf. [144])*[5] *Sea* $\mathcal{U} = (l^1(\mathbb{Z}), *)$*, donde* $*$ *indica el producto de convolución usual. Entonces* $\mathcal{U}$ *no es Arens-regular. En efecto, sea*

$$\mathrm{c}_\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ \lambda \in l^\infty(\mathbb{Z}) : \exists \lim_{m \to -\infty} \lambda_m \ y \ \exists \lim_{m \to +\infty} \lambda_m \right\}.$$

Consideremos las formas lineales l^+*,* l^- *sobre* $\mathrm{c}_\infty(\mathbb{Z})$ *definidas como*

$$l^\pm(\lambda) \triangleq \lim_{m \to \pm\infty} \lambda_m.$$

[5]V. [66].

Por el teorema de Banach-Hahn existen extensiones L^+, $L^- \in l^\infty(\mathbb{Z})^*$ *de* l^+ *y* l^- *respectivamente. En consecuencia,* $L^\pm \in l^\infty(\mathbb{Z})^*$ *y* $\mathcal{U}^{**} \approx l^\infty(\mathbb{Z})^*$. *Sea* $\lambda_0 \in c_\infty(\mathbb{Z})$ *tal que* $\lambda_0(m) = -1$ *si* $m \in \mathbb{Z}^-$, $\lambda_0(0) = 0$ *y* $\lambda_0(m) = 1$ *si* $m \in \mathbb{Z}^+$. *Sean* $a \in \mathcal{U}$ *y* $e_m \triangleq \{\delta_{r,m}\}_{r\in\mathbb{Z}}$ *en* $\mathcal{U}$. *Se sabe que* $\{e_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *es base de* $\mathcal{U}$ *y como* $\mathcal{U}$ *es abeliana si* $m \in \mathbb{Z}$ *tenemos*

$$\begin{aligned}
\langle e_m, \lambda_0 a\rangle &= \langle e_m, a\lambda_0\rangle \\
&= \langle a * e_m, \lambda_0\rangle \\
&= \left\langle \sum_{r=-\infty}^{+\infty} a(r-m)\, e_r, \lambda_0 \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a(s)\, e_{m+s}, \lambda_0 \right\rangle \\
&= -\sum_{s=-\infty}^{-1-m} a(s) + \sum_{s=1-m}^{+\infty} a(s),
\end{aligned}$$

o sea

$$\lambda_0 a = a\lambda_0 = \left\{ -\sum_{s=-\infty}^{-1-m} a(s) + \sum_{s=1-m}^{+\infty} a(s) \right\}_{m\in\mathbb{Z}}.$$

Además $\lambda_0 a \in \mathrm{c}_\infty(\mathbb{Z})$ *porque*

$$\lim_{m\to-\infty} (\lambda_0 a)(m) = -\sum_{s=-\infty}^{+\infty} a(s) \ \text{ y } \ \lim_{m\to+\infty} (\lambda_0 a)(m) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a(s).$$

Por lo tanto, para cada $a \in l^1(\mathbb{Z})$ *tenemos*

$$\begin{aligned}
\left\langle a, L^-\lambda_0 \right\rangle &= \left\langle \lambda_0 a, L^- \right\rangle = \left\langle \lambda_0 a, l^- \right\rangle = -\sum_{s=-\infty}^{+\infty} a(s)\ , \\
\left\langle a, L^+\lambda_0 \right\rangle &= \left\langle \lambda_0 a, L^+ \right\rangle = \left\langle \lambda_0 a, l^+ \right\rangle = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a(s),
\end{aligned}$$

y deducimos que $L^-\lambda_0 = (..., -1, -1, -1, ...)$ *y* $L^+\lambda_0 = (..., 1, 1, 1, ...)$ *en* $l^\infty(\mathbb{C})$. *Así* $\langle \lambda_0, L^+ \square L^- \rangle \neq \langle \lambda_0, L^- \square L^+ \rangle$ *pues*

$$\begin{aligned}
\left\langle \lambda_0, L^+ \square L^- \right\rangle &= \left\langle L^-\lambda_0, L^+ \right\rangle = -1, \\
\left\langle \lambda_0, L^- \square L^+ \right\rangle &= \left\langle L^+\lambda_0, L^- \right\rangle = 1.
\end{aligned}$$

2.4. Unidades laterales

Proposición 2.20 *Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach, $E \in \mathcal{U}^{**}$.*

(i) (a) $E \in U_d(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ si y solo si (b) $\langle fa, E\rangle = \langle a, f\rangle$ si $a \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathcal{U}^*$ si y solo si (c) $Ef = f$ si $f \in \mathcal{U}^*$.

(ii) (a) $E \in U_i(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ si y solo si (b) $\langle af, E\rangle = \langle a, f\rangle$ si $a \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathcal{U}^*$ si y solo si (c) $fE = f$ si $f \in \mathcal{U}^*$.

(iii) $E \in U_i(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ si y solo si $\langle Ff, E\rangle = \langle f, F\rangle$ si $f \in \mathcal{U}^*$ y $F \in \mathcal{U}^{**}$.

(iv) $E \in U_d(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ si y solo si $\langle fF, E\rangle = \langle f, F\rangle$ si $f \in \mathcal{U}^*$ y $F \in \mathcal{U}^{**}$.

(v) $U_i(\mathcal{U}^{**}, \Box) \subseteq U_i(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$.

(vi) $U_d(\mathcal{U}^{**}, \Diamond) \subseteq U_d(\mathcal{U}^{**}, \Box)$.

(vii) Si $U_i(\mathcal{U}^{**}, \Box) \cup U_i(\mathcal{U}^{**}, \Diamond) \neq \varnothing$ el anulador a derecha de $\mathcal{U}$ es trivial.[6]

(viii) Si $U_d(\mathcal{U}^{**}, \Box) \cup U_d(\mathcal{U}^{**}, \Diamond) \neq \varnothing$ el anulador a izquierda de $\mathcal{U}$ es trivial.

Demostración 2.21 *($ia \Rightarrow ib$) Si $E \in U_d(\mathcal{U}^{**}, \Box)$, $a \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathcal{U}^*$ es*

$$\langle fa, E\rangle = \langle f, aE\rangle = \langle f, \iota_{\mathcal{U}}(a) \Box E\rangle = \langle f, \iota_{\mathcal{U}}(a)\rangle = \langle a, f\rangle .$$

($ib \Rightarrow ic$) $a \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathcal{U}^*$ tenemos

$$\langle a, Ef\rangle = \langle fa, E\rangle = \langle a, f\rangle .$$

($ic \Rightarrow ia$) Si $f \in \mathcal{U}^*$ y $F \in \mathcal{U}^{**}$ resulta

$$\langle f, F\Box E\rangle = \langle Ef, F\rangle = \langle f, F\rangle .$$

(ii) *Es análogo a (i).*

(iii) *Trivial.*

(iv) *Trivial.*

[6]Indicamos

$$an_{izq}(\mathcal{U}) = \{x \in \mathcal{U} : x\mathcal{U} = \{0\}\}, \ an_{der}(\mathcal{U}) = \{x \in \mathcal{U} : \mathcal{U}x = \{0\}\}$$

a los *anuladores a izquierda y derecha* de $\mathcal{U}$ respectivamente. También escribiremos $an(\mathcal{U})$ a la intersección de ambos anuladores.

(v) *Dados* $E \in U_i(\mathcal{U}^{**}, \Box)$, $F \in \mathcal{U}^{**}$, $f \in \mathcal{U}^*$ *y* $a \in \mathcal{U}$ *vemos que*

$$\langle a, fE \rangle = \langle af, E \rangle = \langle \iota_{\mathcal{U}}(a) f, E \rangle = \langle f, E \Box \iota_{\mathcal{U}}(a) \rangle = \langle f, \iota_{\mathcal{U}}(a) \rangle = \langle a, f \rangle,$$

i.e. $fE = f$. *Entonces*

$$\langle f, E \Diamond F \rangle = \langle fE, F \rangle = \langle f, F \rangle$$

y concluímos que $E \Diamond F = F$.

(vi) *Es análogo a (v).*

(vii) *Sean* E *una unidad a izquierda para alguno de los productos de Arens,* $a \in an_{der}(\mathcal{U})$. *Por (v) podemos suponer* $E \in U_i(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ *y por (ii)(b) si* $f \in \mathcal{U}^*$ *es* $\langle a, f \rangle = \langle af, E \rangle$. *Como* $af = 0$ *obtenemos* $\langle a, f \rangle = 0$ *y siendo* f *arbitraria* $a = 0$.

(viii) *Es análogo a (vii).*

2.5. Representaciones de $\mathcal{U}^{**}$ en $\mathcal{U}^*$

Teorema 2.22 *Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra normada compleja.*

Proposición 2.23 **(i)** *Hay representaciones naturales de* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *y* $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ *en* $\mathcal{U}^*$, *i.e. homomorfismos de álgebras*

$$\overline{L} : (\mathcal{U}^{**}, \Box) \to \mathcal{B}(\mathcal{U}^*) \ \text{ y } \overline{R} : (\mathcal{U}^{**}, \Diamond) \to \mathcal{B}(\mathcal{U}^*),$$

de modo que $L^{\mathcal{U}^*}_{\Phi \Box \Psi} = L^{\mathcal{U}^*}_{\Phi} \circ L^{\mathcal{U}^*}_{\Psi}$ *y* $R^{\mathcal{U}^*}_{\Phi \Diamond \Psi} = R^{\mathcal{U}^*}_{\Psi} \circ R^{\mathcal{U}^*}_{\Phi}$ *si* $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$.

(ii) $\overline{L}(\mathcal{U}^{**}) \subseteq \left[L^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c$.

(iii) $\overline{L}(\mathcal{U}^{**}) = \left[L^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c$ *si y solo si* $U_d(\mathcal{U}^{**}, \Box) \neq \varnothing$.

(iv) $\overline{R}(\mathcal{U}^{**}) \subseteq \left[R^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c$.

(v) $\overline{R}(\mathcal{U}^{**}) = \left[R^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c$ *si y solo si* $U_i(\mathcal{U}^{**}, \Diamond) \neq \varnothing$.

(vi) $\overline{L}$ *definirá un homeomorfismo entre* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *y* $\left[L^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c$ *si y solo si* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *es unitaria.*

(vii) $\overline{R}$ *definirá un homeomorfismo entre* $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ *y* $\left[R^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c$ *si y solo si* $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ *es unitaria.*

(viii) $\overline{L}$ *será un isomorfismo isométrico de* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *sobre* $\left[L^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c$ *si y solo si la unidad de* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *tiene norma uno.*

(ix) *$\overline{R}$ será un isomorfismo isométrico de $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ sobre $\left[R^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c$ si y solo si la unidad de $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ tiene norma uno.*

(x) *Dados $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$, $\overline{L}(\Psi) \smile \overline{R}(\Phi)$ (i.e. ambos operadores conmutan en $\mathcal{B}(\mathcal{U}^*)$) si y solo si $(\Phi a)\Box\Psi = \Phi\Diamond(a\Psi)$ para todo $a \in \mathcal{U}$. En particular, esta condición se verifica si $\mathcal{U}$ fuere regular.*

Demostración 2.24 **(i)** *Si $\Phi \in \mathcal{U}^*$ hagamos $\overline{L}(\Phi) = L_\Phi^{\mathcal{U}^*}$ y $\overline{R}(\Phi) = R_\Phi^{\mathcal{U}^*}$. Evidentemente $\overline{L}$ es lineal. Sean $a \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{U}^*$, $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$. Entonces*

$$\begin{aligned} L_{\Phi\Box\Psi}^{\mathcal{U}^*}(f)(a) &= \langle a, (\Phi\Box\Psi) f\rangle \\ &= \langle fa, \Phi\Box\Psi\rangle \\ &= \langle \Psi(fa), \Phi\rangle \\ &= \langle (\Psi f) a, \Phi\rangle \\ &= \langle a, \Phi(\Psi f)\rangle \\ &= \left(L_\Phi^{\mathcal{U}^*} \circ L_\Psi^{\mathcal{U}^*}\right)(f)(a), \end{aligned}$$

de modo que $\overline{L}$ es homomorfismo. La otra afirmación sigue análogamente.

(ii) *Es inmediato.*

(iii) *Si $\left[L^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c \subseteq \overline{L}(\mathcal{U}^{**})$ existe $E \in \mathcal{U}^{**}$ tal que $Id_{\mathcal{U}^*} = L_E^{\mathcal{U}^*}$. Dados $a \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{U}^*$ se tiene*

$$\langle fa, E\rangle = \langle a, Ef\rangle = \langle a, f\rangle$$

y $E \in U_d(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ por la Prop. 2.20(i). Por otra parte sean dados

$$E \in U_d(\mathcal{U}^{**}, \Box) \quad y \quad T \in \left[L^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c.$$

Haciendo $\Phi = E \circ T$ tenemos $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ y $T = \overline{L}(\Phi)$. Precisamente, si $g \in \mathcal{U}^*$ y $b \in \mathcal{U}$ tenemos

$$\begin{aligned} T(g)(b) &= \langle T(g)b, E\rangle \quad \text{(por la Prop. 2.20(i))} \\ &= \langle T(gb), E\rangle \quad \left(\text{pues } T \in \left[L^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c\right) \\ &= \Phi(gb) \\ &= \langle gb, \Phi\rangle \\ &= \langle b, \Phi g\rangle \\ &= \left[\overline{L}(\Phi)(g)\right](b). \end{aligned}$$

(iv) *Es análogo a (ii).*

(v) *Es análogo a (iii).*

(vi) *La necesidad es evidente. Por otra parte, si E es unidad de $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ y si $\overline{L}(\Phi) = 0_{\mathcal{U}^{**}}$ dado $h \in \mathcal{U}^*$ se tiene*

$$\langle h, \Phi\rangle = \langle h, E\Box\Phi\rangle = \langle \Phi h, E\rangle = 0$$

pues $\Phi h = 0_{\mathcal{U}^*}$. Como $\overline{L}$ es lineal y continua y por (iii) es además una suryección entre espacios de Banach la afirmación sigue del teorema de la función abierta.

(vii) *Es análogo a (vi).*

(viii) *Es claro que la condición es necesaria. Supongamos que $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ tiene unidad E de norma uno y dado $T \in \left[L^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})^*\right]^c$ sea $\Phi = \overline{L}^{-1}(T)$. Entonces*

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{L}^{-1}(T)\right\| &= \|\Phi\| \\
&= \sup_{\lambda\in[\mathcal{U}^*]_1=1} |\langle \lambda, \Phi\rangle| \\
&= \sup_{\lambda\in[\mathcal{U}^*]_1=1} |\langle \Phi\lambda, E\rangle| \quad \textit{(por la Prop. 2.20(iii))} \\
&= \sup_{\lambda\in[\mathcal{U}^*]_1=1} \left|\left\langle \overline{L}(\Phi)(\lambda), E\right\rangle\right| \\
&= \sup_{\lambda\in[\mathcal{U}^*]_1=1} |\langle T(\lambda), E\rangle| \\
&\leq \sup_{\lambda\in[\mathcal{U}^*]_1=1} \|T(\lambda)\| \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

Luego $\overline{L}$ y $\overline{L}^{-1}$ son ambas contractivas y por ello $\overline{L}$ es isométrica.

(ix) *Sigue análogamente a (viii).*

(x) *Supongamos $\overline{L}(\Psi) \smile \overline{R}(\Phi)$ para ciertos $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$. Dados $a \in \mathcal{U}$ y*

$\lambda \in \mathcal{U}^*$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \lambda, (\Phi a)\,\Box\Psi\rangle &= \langle \Psi\lambda, \Phi\Diamond\iota_{\mathcal{U}}(a)\rangle \\ &= \langle (\Psi\lambda)\,\Phi, \iota_{\mathcal{U}}(a)\rangle \\ &= \left\langle a, \left(\overline{R}(\Phi)\circ\overline{L}(\Psi)\right)(\lambda)\right\rangle \\ &= \left\langle a, \left(\overline{L}(\Psi)\circ\overline{R}(\Phi)\right)(\lambda)\right\rangle \\ &= \langle \Psi(\lambda\Phi), \iota_{\mathcal{U}}(a)\rangle \\ &= \langle \lambda\Phi, \iota_{\mathcal{U}}(a)\,\Box\Psi\rangle \\ &= \langle \lambda, \Phi\Diamond(a\Psi)\rangle\,. \end{aligned} \tag{5}$$

La afirmación recíproca sigue análogamente como sigue observando (5).

3. Álgebras de Banach Arens regulares

3.1. Teorema de caracterización

Teorema 3.1 *(Cf. [106]; [38]; [143]) Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{U}$ es Arens-regular.

(ii) Si $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ la aplicación $L_\Phi^\Box(\Lambda) = \Phi\Box\Lambda$ definida para $\Lambda \in \mathcal{U}^{**}$ es (w^*, w^*)-continua.

(iii) Si $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$ la aplicación $R_\Psi^\Diamond(\Lambda) = \Lambda\Diamond\Psi$ definida para $\Lambda \in \mathcal{U}^{**}$ es (w^*, w^*)-continua.

(iv) Si $\lambda \in \mathcal{U}^*$ la aplicación $R_\lambda^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}(a) = a\lambda$ definida para $a \in \mathcal{U}$ es débilmente compacta.

(v) Si $\lambda \in \mathcal{U}^*$ la aplicación $L_\lambda^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}(a) = \lambda a$ definida para $a \in \mathcal{U}$ es débilmente compacta.

(vi) (cf. [65]) Para cada par de sucesiones acotadas $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{b_m\}_{m=1}^\infty$ de $\mathcal{U}$ se tiene

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\langle a_n b_m, \lambda\rangle = \lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\langle a_n b_m, \lambda\rangle$$

toda vez que los límites iterados están definidos para cada $\lambda \in \mathcal{U}^*$.

Demostración 3.2 *($i \Longrightarrow ii$) Sean $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$, $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ una red en $\mathcal{U}^{**}$ que $\sigma(\mathcal{U}^{**},\mathcal{U}^{*})$-converge a cero, $\lambda \in \mathcal{U}^{*}$. Entonces*

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i\in I} \langle \lambda\Phi, \Lambda_i \rangle \\ &= \lim_{i\in I} \langle \lambda, \Phi\Diamond\Lambda_i \rangle \\ &= \lim_{i\in I} \langle \lambda, \Phi\Box\Lambda_i \rangle \\ &= \lim_{i\in I} \left\langle \lambda, L_{\Phi}^{\Box}(\Lambda_i) \right\rangle . \end{aligned}$$

($i \Rightarrow iii$) Ídem a la anterior.

($ii \Rightarrow iv$) Fijemos $\lambda \in \mathcal{U}^{*}$ y veamos que $\overline{[\mathcal{U}]_1 \lambda}$ es débilmente compacta. Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\overline{[\mathcal{U}]_1 \lambda}$ y sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [\mathcal{U}]_1$ tal que $\|\mu_n - a_n\lambda\| < 1/n$ si $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Banach-Alaoglu sean $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ infinita y $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$ tales que

$$\Psi = \sigma(\mathcal{U}^{**},\mathcal{U}^{*}) \text{ - } \lim_{k\to\infty} \iota_{\mathcal{U}}(a_{n_k}) .$$

Si $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle a_{n_k}\lambda, \Phi \rangle &= \langle \iota_{\mathcal{U}}(a_{n_k})\lambda, \Phi \rangle \\ &= \langle \lambda, \Phi\Box\iota_{\mathcal{U}}(a_{n_k}) \rangle \\ &= \left\langle \lambda, L_{\Phi}^{\Box}(\iota_{\mathcal{U}}(a_{n_k})) \right\rangle \to \left\langle \lambda, L_{\Phi}^{\Box}(\Psi) \right\rangle \ \text{si } k \to \infty. \end{aligned}$$

Deducimos que $\Psi\lambda = \sigma(\mathcal{U}^{*},\mathcal{U}^{**}) - \lim_{k\to\infty} a_{n_k}\lambda$. Como para $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ y $k \in \mathbb{N}$ es

$$\begin{aligned} |\langle \mu_{n_k} - \Psi\lambda, \Phi \rangle| &\leq |\langle \mu_{n_k} - a_{n_k}\lambda, \Phi \rangle| + |\langle a_{n_k}\lambda - \Psi\lambda, \Phi \rangle| \\ &\leq \|\Phi\| / n_k + |\langle a_{n_k}\lambda - \Psi\lambda, \Phi \rangle| , \end{aligned}$$

haciendo $k \to \infty$ sigue que $\Psi\lambda = \sigma(\mathcal{U}^{*},\mathcal{U}^{**})$-$\lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}$.

($iii \Rightarrow v$) Ídem a la anterior.

($iv \Rightarrow ii$) Sean $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$, $\{\Psi_j\}_{j\in J}$ una red en $\mathcal{U}^{**}$ que $\sigma(\mathcal{U}^{**},\mathcal{U}^{*})$-converge a cero. Veremos que $\sigma(\mathcal{U}^{**},\mathcal{U}^{*})$-$\lim_{j\in J} L_{\Phi}^{\Box}(\Psi_j) = 0_{\mathcal{U}^{**}}$. Para ello, fijados $\lambda \in \mathcal{U}^{*}$ y $j \in J$ tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \lambda, L_{\Phi}^{\Box}(\Psi_j) \right\rangle &= \langle \lambda, \Phi\Box\Psi_j \rangle \qquad (6) \\ &= \langle \Psi_j\lambda, \Phi \rangle \\ &= \left\langle \left(R_{\lambda}^{\mathcal{U},\mathcal{U}^{*}} \right)^{*} (\Psi_j) , \Phi \right\rangle \\ &= \left\langle \Psi_j, \left(R_{\lambda}^{\mathcal{U},\mathcal{U}^{*}} \right)^{**} (\Phi) \right\rangle . \end{aligned}$$

Como $R_\lambda^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}$ *es débilmente compacto,* $\left(R_\lambda^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}\right)^{**}(\mathcal{U}^{**}) \subseteq \iota_{\mathcal{U}^*}(\mathcal{U}^*)$ *(cf. 13.33). Sea* $\mu \in \mathcal{U}^*$ *tal que* $\left(R_\lambda^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}\right)^{**}(\Phi) = \iota_{\mathcal{U}^*}(\mu)$. *En obtenemos*

$$\left\langle \lambda, L_\Phi^\square(\Psi_j)\right\rangle = \left\langle \Psi_j, \iota_{\mathcal{U}^*}(\mu)\right\rangle = \left\langle \mu, \Psi_j\right\rangle$$

y entonces $\text{lím}_{j\in J}\left\langle \lambda, L_\Phi^\square(\Psi_j)\right\rangle = 0.$

($i \Rightarrow vi$) *Sean* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_m\}_{m=1}^\infty$ *sucesiones acotadas de* $\mathcal{U}$ *de modo que existen*

$$\Phi = w^*\text{-}\lim_{n\to+\infty}\iota_{\mathcal{U}}(a_n) \text{ y } \Psi = w^*\text{-}\lim_{m\to+\infty}\iota_{\mathcal{U}}(b_m).$$

La conclusión es inmediata ahora por la hipótesis de Arens regularidad.

($vi \Rightarrow i$) *Sigue de la Prop. 2.7(iii).*

($iv \Rightarrow i$) *Dadas* $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$ *sean* $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *y* $\{b_\beta\}_{\beta\in B}$ *redes acotadas en* $\mathcal{U}$ *tales que* $\Phi = w^*\text{-lím}_{a\in A}\,\iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha)$ *y* $\Psi = w^*\text{-lím}_{b\in B}\,\iota_{\mathcal{U}}(b_\beta)$. *Si* $\lambda \in \mathcal{U}^*$ *podemos suponer que hay una subred* $\{b_\beta\}_{\beta\in B_1}$ *y* $\eta \in \mathcal{U}^*$ *tales que* $\eta = w\text{-lím}_{\beta\in B_1} b_\beta\lambda$. *En consecuencia*

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, \Phi\square\Psi\rangle &= \lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B}\langle a_\alpha b_\beta, \lambda\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B_1}\langle a_\alpha, b_\beta\lambda\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A}\langle a_\alpha, \eta\rangle \\
&= \langle \eta, \Phi\rangle \\
&= \lim_{\beta\in B_1}\langle b_\beta\lambda, \Phi\rangle \\
&= \lim_{\beta\in B}\lim_{\alpha\in A}\langle a_\alpha b_\beta, \lambda\rangle \\
&= \langle \lambda, \Phi\Diamond\Psi\rangle .
\end{aligned}$$

($v \Rightarrow i$) *Ídem a la anterior.*

Observación 3.3 *Por el Teorema 3.1 una forma lineal* $\lambda \in \mathcal{U}^*$ *se dice débilmente casi periódica si el operador* $L_\lambda^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}$ *es débilmente compacto en cuyo caso* $R_\lambda^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}$, *también lo será. Indicaremos* $\mathrm{WAP}(\mathcal{U})$ *al conjunto de formas lineales débilmente casi periódicas.*[7]

3.2. Subálgebras y cocientes de álgebras regulares

Corolario 3.4 *Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach Arens regular.*

[7] V. [40].

(i) Toda subálgebra de Banach $\mathfrak{V}$ de $\mathcal{U}$ es Arens regular.

(ii) Todo cociente de $\mathcal{U}$ por un ideal bilátero cerrado es Arens regular.

Demostración 3.5 **(i)** *Sea $\lambda \in \mathfrak{V}^*$ y veamos que $R_\lambda^{\mathfrak{V},\mathfrak{V}^*}$ es débilmente compacta. Para ello, sea $j : \mathfrak{V} \hookrightarrow \mathcal{U}$ tal que $j(x) = x$ para $x \in \mathfrak{V}$. Por el teorema de Banach-Hahn existe $\Lambda \in \mathcal{U}^*$ tal que $j^*(\Lambda) = \lambda$. Si $a, x \in \mathfrak{V}$ vemos que $j^*(a\Lambda) = a\lambda$. Luego $[\mathfrak{V}]_1 \lambda \subseteq j^*\left(\overline{[\mathcal{U}]_1 \Lambda}\right)$. Por el Teo. 13.61(i) y el Teorema 3.1, como $[\mathcal{U}]_1 \Lambda$ es convexo y $\mathcal{U}$ es Arens regular entonces $\overline{[\mathcal{U}]_1 \Lambda}$ es débilmente compacto. Como j^* es (w^*, w^*)-continua $j^*\left(\overline{[\mathcal{U}]_1 \Lambda}\right)$ deviene débilmente compacto. Como la topología w^* es se-parada obtenemos $\overline{[\mathfrak{V}]_1 \lambda}^{w^*} \subseteq j^*\left(\overline{[\mathcal{U}]_1 \Lambda}\right)$, i.e. $[\mathfrak{V}]_1 \lambda$ es relativamente débilmente compacto.*

(ii) *Sean I un ideal bilátero cerrado de $\mathcal{U}$, $\pi_I : \mathcal{U} \to \mathcal{U}/I$ la proyección al cociente. Sean $\{s_n\}_{n=1}^\infty$, $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ sucesiones acotadas de $\mathcal{U}/I$ tal que existen los límites iterados*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \langle s_n t_m, \lambda\rangle \ \ y \ \ \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \langle s_n t_m, \lambda\rangle ,$$

con $\lambda \in (\mathcal{U}/I)^*$. Hay entonces sucesiones acotadas $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{b_m\}_{m=1}^\infty$ tales que $\pi_I(a_n) = s_n$ y $\pi_I(b_m) = t_m$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$. En consecuencia, existen los límites iterados

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \langle a_n b_m, (\pi_I)^*(\lambda)\rangle \ \ y \ \ \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \langle a_n b_m, (\pi_I)^*(\lambda)\rangle ,$$

los que deben ser iguales porque $\mathcal{U}$ es Arens regular. La conclusión sigue ahora por el Teorema 3.1(vi).

4. Productos de Arens y aproximaciones de la identidad

Proposición 4.1 *Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una aproximación acotada de la unidad a derecha (resp. a izquierda) de un álgebra de Banach $\mathcal{U}$. Entonces $(\mathcal{U}^{**}, \square)$ admíte unidad a derecha (resp. $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ admíte unidad a izquierda).*

Demostración 4.2 *Por el teorema de Banach-Alaoglu, pasando eventualmente a una subred existe $\Phi_0 \in \mathcal{U}^{**}$ tal que $\Phi_0 = w^*\text{-lím}_{i\in I}\, \iota_{\mathcal{U}}(e_i)$. Sea $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$, digamos $\Psi = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, b_j$. Si $\lambda \in \mathcal{U}^*$ tenemos*

$$\langle \lambda, \Psi \square \Phi_0\rangle = \lim_{j\in J} \lim_{i\in I} \langle b_j e_i, \lambda\rangle = \lim_{j\in J} \langle b_j, \lambda\rangle = \langle \lambda, \Psi\rangle .$$

La otra afirmación se da análogamente.

Corolario 4.3 *Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach munida de una aproximación acotada de la unidad $\{e_i\}_{i\in I}$. Entonces $\mathcal{U}^{**}$ tiene una unidad mixta, i.e. existe $E\in\mathcal{U}^{**}$ tal que $\Phi\Box E=E\Diamond\Phi=\Phi$ para todo $\Phi\in\mathcal{U}^{**}$.*

Lema 4.4 *(cf. [2]) Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach munido de un abierto acotado U con la siguiente propiedad: Dados $a\in\mathcal{U}$ y $\varepsilon>0$ existe $u\in U$ tal que $\|a-ua\|<\varepsilon$ (resp. $\|a-au\|<\varepsilon$). Entonces $\mathcal{U}$ posee una aproximación acotada de la unidad a izquierda (resp. a derecha).*

Demostración 4.5 *Si $a,b\in\mathcal{U}$ indicaremos $a\circ b=a+b-ab$. Dados $\varepsilon>0$ y $F\in\mathcal{P}_f(\mathcal{U})$ con al menos dos elementos probaremos que existe $w\in U\circ U$ tal que $\|a-wa\|<\varepsilon$ para cada $a\in F$. Para ello, supongamos $U\subseteq B[0,M]$ para cierto $M>0$ y sean $a_1,a_2\in\mathcal{U}$ elementos distintos. Sean $u,v\in U$ tales que $\|a_1-ua_1\|<\varepsilon/(1+M)$ y $\|a_2-ua_2-v(a_2-ua_2)\|<\varepsilon$. Haciendo $w=v\circ u$ tenemos*

$$\begin{aligned}
\|a_1-wa_1\| &= \|a_1-(v+u-vu)\,a_1\|\\
&\le \|a_1-ua_1\|+\|v(a_1-ua_1)\|\\
&\le \|a_1-ua_1\|(1+\|v\|)\\
&\le \|a_1-ua_1\|(1+M)\\
&< \varepsilon,\\
\|a_2-wa_2\| &= \|a_2-(v+u-vu)\,a_2\|\\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Si n es un entero mayor que dos supongamos cierta la afirmación para subconjuntos finitos de $\mathcal{U}$ con al menos dos pero no más de n elementos. Dados $a_1,...,a_{n+1}\in\mathcal{U}$ distintos y $\varepsilon>0$ sea $z\in U\circ U$ tal que

$$\|a_j-za_j\|<2^{-1}(1+M)^{-2}\varepsilon \text{ si } 1\le j\le n.$$

Si $m=\max\{1/2,\max_{1\le j\le n}\|a_j\|\}$ sea $t\in U\circ U$ tal que $\|z-tz\|<\varepsilon/(2m)$ y $\|a_{n+1}-ta_{n+1}\|<\varepsilon/(2m)$. Si $1\le j\le n$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|a_j-ta_j\| &\le \|a_j-za_j\|+\|za_j-tza_j\|+\|tza_j-ta_j\|\\
&< \frac{\varepsilon}{2(1+M)^2}+\frac{\varepsilon}{2}+\|t\|\frac{\varepsilon}{2(1+M)^2}\\
&\le \frac{\varepsilon}{2(1+M)^2}\left(1+2M+M^2\right)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

y $\|a_{n+1} - ta_{n+1}\| < \varepsilon$ *pues* $2m \geq 1$*, i.e. vale el paso inductivo y sigue la afirmación. Sea* $\mathcal{P}_f(\mathcal{U})_*$ *la clase de partes finitas de* $\mathcal{U}$ *con al menos dos elementos. Para* $(n, F) \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}_f(\mathbb{N})_*$ *sea* $u_{(n,F)} \in U \circ U$ *tal que* $\left\|a - au_{(n,F)}\right\| < n^{-1}$ *para cada* $a \in F$*. Ciertamente* $\left\{u_{(n,F)}\right\}_{(n,F)\in\mathbb{N}\times\mathcal{P}_f(\mathbb{N})_*}$ *define una aproximación acotada a izquierda de la unidad si para* $(n_1, F_1), (n_2, F_2) \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}_f(\mathbb{N})_*$ *hacemos* $(n_1, F_1) \geq (n_2, F_2)$ *si y solo si* $n_1 \geq n_2$ *y* $F_1 \subseteq F_2$*. La otra afirmación sigue en forma análoga.*

Proposición 4.6 *(cf. [37]) Un álgebra de Banach* $\mathcal{U}$ *munida de una unidad mixta tiene aproximación acotada de la identidad.*

Demostración 4.7 *Sea* E *unidad mixta de* $\mathcal{U}$*, digamos* $E = w^*\text{-lím}_{s\in\sigma}\, \iota_{\mathcal{U}}(a_s)$ *para cierta red acotada* $\{a_s\}_{s\in\sigma}$ *de* $\mathcal{U}$*. Si* $b \in \mathcal{U}$ *tenemos*

$$\iota_{\mathcal{U}}(b) = \iota_{\mathcal{U}}(b) \,\square E = \iota_{\mathcal{U}}(b) = w^*\text{-}\lim_{s\in\sigma}(ba_s).$$

Luego el conjunto $U = \mathrm{co}\left(\{a_s\}_{s\in\sigma}\right)$ *es acotado y* $b \in \overline{Ub}^{w}$*. Por el Teo. 13.61(i) sigue que* $b \in \overline{Ub}$ *y por el Lema 4.4* $\mathcal{U}$ *posee una aproximación acotada* $\{e_i\}_{i\in I}$ *de la unidad a izquierda. Asimismo* $\mathcal{U}$ *posee también una aproximación acotada* $\{f_j\}_{j\in J}$ *de la unidad a derecha. Finalmente, es fácil ver que la red* $\{-(f_j \circ e_i)\}_{(i,j)\in I\times J}$ *es una aproximación acotada de la unidad de* $\mathcal{U}$*.*

5. Productos de Arens en álgebras duales

Teorema 5.1 [8][9] *(Cf. [49]) Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach dual con predual* $\mathcal{U}_*$*, i.e.* $\mathcal{U}_*$ *es un* $\mathcal{U}$*-submódulo cerrado* $\mathcal{U}_*$ *de* $\mathcal{U}^*$ *tal que* $(\mathcal{U}_*)^* \approx \mathcal{U}$*, donde* $\approx$ *indica isomorfismo de espacios de Banach. Entonces* $\mathcal{U}^{**} \approx \mathcal{U} \ltimes (\mathcal{U}_*)^o$*, donde* $\mathcal{U}^{**}$ *se considera con cualquiera de los productos de Arens, i.e.* $\mathcal{U}^{**}$ *se realiza como el producto semidirecto de la subálgebra de Banach* $\mathcal{U}$ *y del ideal cerrado* $(\mathcal{U}_*)^o$*. Además, si* $\iota_{\mathcal{U}_*} : \mathcal{U}_* \hookrightarrow (\mathcal{U}_*)^{**}$ *es la inmersión isométrica natural entonces* $(\iota_{\mathcal{U}_*})^* : \mathcal{U}^{**} \to \mathcal{U}$ *es un epimorfismo.*

Demostración 5.2 *Si* $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ *podemos escribir*

$$\Phi = [\Phi - \iota_{\mathcal{U}}((\iota_{\mathcal{U}_*})^*(\Phi))] + \iota_{\mathcal{U}}((\iota_{\mathcal{U}_*})^*(\Phi)).$$

[8] *Palabras clave: Álgebras de Banach duales. Preduales. Productos semidirectos. Radical de Jacobson.*
[9] V. [35].

Notemos que $(\iota_{\mathcal{U}_*})^* \circ \iota_{\mathcal{U}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$. *En efecto, si* $a \in \mathcal{U}$ *y* $\lambda \in \mathcal{U}_*$ *tenemos*

$$\begin{aligned} \langle \lambda, ((\iota_{\mathcal{U}_*})^* \circ \iota_{\mathcal{U}})(a) \rangle &= \langle (\iota_{\mathcal{U}_*})(\lambda), \iota_{\mathcal{U}}(a) \rangle \\ &= \langle a, (\iota_{\mathcal{U}_*})(\lambda) \rangle \\ &= \langle \lambda, a \rangle . \end{aligned}$$

Es inmediato entonces que $(\iota_{\mathcal{U}_*})^*$ *es suryectivo y* $\mathcal{U}^{**} = \ker[(\iota_{\mathcal{U}_*})^*] \bigoplus \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$. *Más aún, notar que* $\ker[(\iota_{\mathcal{U}_*})^*] = (\iota_{\mathcal{U}_*}(\mathcal{U}_*))^o$. *En consecuencia, todo elemento* $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ *determina únicas componentes* $a_\Phi \in \mathcal{U}$ *y* $\Phi_0 \in (\iota_{\mathcal{U}_*}(\mathcal{U}_*))^o$ *de modo que* $\Phi = \iota_{\mathcal{U}}(a_\Phi) + \Phi_0$. *Si además* $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$ *habrá de ser entonces*

$$\Phi \Box \Psi = \iota_{\mathcal{U}}(a_\Phi a_\Psi) + [\Phi_0 \Box \Psi_0 + \Phi_0 a_\Psi + a_\Phi \Psi_0] . \tag{7}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\iota_{\mathcal{U}}(a_\Phi) \Box \iota_{\mathcal{U}}(a_\Psi)) &= (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\iota_{\mathcal{U}}(a_\Phi a_\Psi)) \\ &= a_\Phi a_\Psi \\ &= (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\iota_{\mathcal{U}}(a_\Phi)) (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\iota_{\mathcal{U}}(a_\Psi)) . \end{aligned} \tag{8}$$

Notando que $\iota_{\mathcal{U}_*}$ *es un homomorfismo de* $\mathcal{U}$*-módulos también lo es* $(\iota_{\mathcal{U}_*})^*$. *En consecuencia,*

$$\begin{aligned} (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\Phi_0 \Box \iota_{\mathcal{U}}(a_\Psi)) &= (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\Phi_0 a_\Psi) \\ &= (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\Phi_0) a_\Psi = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

y análogamente

$$(\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\iota_{\mathcal{U}}(a_\Phi) \Box \Psi_0) = a_\Phi (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\Psi_0) = 0. \tag{10}$$

Además, si $\Phi_0 = \sigma(\mathcal{U}^{**}, \mathcal{U}^*) - \text{lím}_{a \in A} \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha)$ *y* $\lambda \in \mathcal{U}_*$ *entonces*

$$\begin{aligned} \langle \lambda, (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\Phi_0 \Box \Psi_0) \rangle &= \langle \iota_{\mathcal{U}_*}(\lambda), \Phi_0 \Box \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 \iota_{\mathcal{U}_*}(\lambda), \Phi_0 \rangle \\ &= \lim_{\alpha \in A} \langle \Psi_0 \iota_{\mathcal{U}_*}(\lambda), \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha) \rangle \\ &= \lim_{\alpha \in A} \langle \lambda, (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha) \Box \Psi_0) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

De (7), (8), (9), (10) y (11) deducimos que $(\iota_{\mathcal{U}_*})^*$ *es un homomorfismo algebraico y sigue la tesis.*

Corolario 5.3 (i) $(\iota_{\mathcal{U}_*})^* [\mathrm{rad}(\mathcal{U}^{**}, \Box)] \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{U})$.

(ii) *Si $\mathcal{U}$ es semisimple entonces* $\operatorname{rad}(\mathcal{U}^{**}, \square) \subseteq (\iota_{\mathcal{U}_*}(\mathcal{U}_*))^o$.

Demostración 5.4 **(i)** *Si $\Phi \in \operatorname{rad}(\mathcal{U}^{**}, \square)$ veremos que $\mathcal{U}\cdot a \subseteq c - \operatorname{Inv}(\mathcal{U})$ donde $a \triangleq (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\Phi)$. Sean $b \in \mathcal{U}$ y $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$ tal que $b = (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\Psi)$. Como $\mathcal{U}^{**}\square\Phi \subseteq c - \operatorname{Inv}(\mathcal{U}^{**})$ existe $\Lambda \in \mathcal{U}^{**}$ tal que*

$$\Lambda\square (\Psi\square\Phi) = (\Psi\square\Phi) \square\Lambda = \Lambda + \Psi\square\Phi. \tag{12}$$

Si $c \triangleq (\iota_{\mathcal{U}_*})^* (\Lambda)$, como $(\iota_{\mathcal{U}_*})^*$ es un homomorfismo de (12) obtenemos

$$c\,(ba) = (ba)\,c = c + ba,$$

i.e. ba es cuasi-inversible y c es el correspondiente elemento cuasi-inverso. En consecuencia, $a \in \operatorname{rad}(\mathcal{U})$.

(ii) *Es inmediato.*

Ejemplo 5.5 *Si X es un conjunto infinito las álgebras de Banach $\mathcal{U} \triangleq l^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, con el producto coordenada a coordenada son Arens-regulares. Esto es inmediato si $1 < p < \infty$ ya que entonces se trata de álgebras reflexivas. Por otra parte, con la notación del Teorema 5.1, $\mathcal{U}_* \triangleq c_0(X)$. Ciertamente $\mathcal{U}_*$ es un $\mathcal{U}$-submódulo cerrado de $\mathcal{U}^* \approx l^\infty(X)$. Bastará ver que en toda expresión como en (7) se tiene $\Phi_0\square\Psi_0 + \Phi_0 a_\Psi + a_\Phi \Psi_0 = 0$, y puesto que $\mathcal{U}$ es abeliana será en consecuencia Arens-regular. Precisamente, tenemos $\Phi_0 \in l^\infty(X)^*$ tal que $\Phi_0 |_{c_0(X)} = 0$ y $a_\Psi \in l^1(X)$. Si $\lambda \in l^\infty(X)$ tenemos*

$$\langle \lambda, \Phi_0 a_\Psi \rangle = \langle a_\Psi \lambda, \Phi_0 \rangle = 0$$

pues $a_\Psi \lambda \in l^1(X)$ y $l^1(X) \hookrightarrow c_0(X)$. Análogamente, $a_\Phi \Psi_0 = 0$. Además, para cierta red $\{b_\beta\}_{\beta\in B}$ de $l^1(X)$ podemos representar Φ_0 en la forma

$$\Phi_0 = \sigma\left(l^\infty(X)^*, l^\infty(X)\right) - \lim_{\beta\in B} \iota_{l^1(X)}(b_\beta),$$

de modo que

$$\begin{aligned}\langle \lambda, \Phi_0\square\Psi_0 \rangle &= \langle \Psi_0\lambda, \Phi_0 \rangle \\ &= \lim_{\beta\in B} \langle b_\beta, \Psi_0\lambda \rangle \\ &= \lim_{\beta\in B} \langle \lambda, b_\beta\Psi_0 \rangle = 0.\end{aligned}$$

6. Cuando $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ es ideal en el espacio bidual

6.1. Teorema de Watanabe

Teorema 6.1 *(cf. [135])*[10][11] *Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach. Entonces $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ es ideal a izquierda de $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ si y solo si R_a es débilmente compacta para cada $a \in \mathcal{U}$.*

Demostración 6.2 $(\Rightarrow)$ *Fijado $a \in \mathcal{U}$ sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{R_a [\mathcal{U}]_1}^{w}$. Por el Teo. 13.61(i) para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in [\mathcal{U}]_1$ tal que $\|y_n - x_n a\| < 1/n$. Por el teorema de Banach-Alaoglu, existen $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ y una subsucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ de manera que $\Phi = w^*\text{-lím}_{k\to\infty} \iota_{\mathcal{U}}(x_{n_k})$. Por hipótesis, existe $b \in \mathcal{U}$ tal que $\Phi \Box \iota_{\mathcal{U}}(a) = \iota_{\mathcal{U}}(b)$. Por lo tanto si $\lambda \in \mathcal{U}^*$ tenemos*

$$\begin{aligned}
\langle b, \lambda \rangle &= \langle \lambda, \Phi \Box \iota_{\mathcal{U}}(a) \rangle \\
&= \langle a\lambda, \Phi \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, a\lambda \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k} a, \lambda \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle y_{n_k}, \lambda \rangle ,
\end{aligned}$$

o bien $b = w\text{-lím}_{k\to\infty} y_{n_k}$ y la condición es necesaria.

$(\Leftarrow)$ *Sean $\Theta \in \mathcal{U}^{**}$, $c \in \mathcal{U}$. Existe una red acotada $\{z_s\}_{s\in\sigma}$ en $\mathcal{U}$ tal que $\Theta = w^*\text{-lím}_{s\in\sigma} \iota_{\mathcal{U}}(z_s)$. Por hipótesis hay una subred $\{z_{s_1} c\}_{s_1\in\sigma_1}$ y algún elemento $d \in \mathcal{U}$ tales que $d = w\text{-lím}_{s_1\in\sigma_1} (z_{s_1} c)$. Si $\lambda \in \mathcal{U}^*$ tenemos entonces*

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, \Theta \Box \iota_{\mathcal{U}}(c) \rangle &= \langle c\lambda, \Theta \rangle \\
&= \lim_{s_1\in\sigma_1} \langle z_{s_1}, c\lambda \rangle \\
&= \lim_{s_1\in\sigma_1} \langle z_{s_1} c, \lambda \rangle \\
&= \langle d, \lambda \rangle \\
&= \langle \lambda, \iota_{\mathcal{U}}(d) \rangle ,
\end{aligned}$$

i.e. $\Theta \Box \iota_{\mathcal{U}}(c) = \iota_{\mathcal{U}}(d)$ y sigue la tesis.

Observación 6.3 *Con el mismo razonamiento, se deduce que $\mathcal{U}$ es ideal bilátero de $\mathcal{U}^{**}$ si y solo si $\mathcal{U}$ es débilmente compacta, i.e. si y solo si L_a, R_b son débilmente compactas cualesquiera sean $a, b \in \mathcal{U}$.*

[10] *Palabras clave:* Formas lineales casi periódicas. Operadores débilmente compactos.
[11] V. [47], [60].

Corolario 6.4 *Sean $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach, $\mathcal{W}$ una subálgebra cerrada e I un ideal cerrado. Si $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ es ideal a izquierda en $(\mathcal{U}^{**},\Box)$ entonces $\iota_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})$ e $\iota_{\mathcal{U}/I}(\mathcal{U}/I)$ son ideales a izquierda en $(\mathcal{W}^{**},\Box)$ y en $((\mathcal{U}/I)^{**},\Box)$ respectivamente.*

Demostración 6.5 *Fijemos $a\in\mathcal{W}$ y $\eta\in\mathcal{U}/I$. Veremos que $R_a^{\mathcal{W}}$ y $R_\eta^{\mathcal{U}/I}$ son débilmente compactos. Por el Teorema de Eberlein-Smulian bastará ver que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ son sucesiones acotadas en $\mathcal{W}$ y $\mathcal{U}/I$ las sucesiones $\{x_na\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\mu_m\eta\}_{m=1}^{\infty}$ tienen algún punto de débil acumulación. En efecto, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $\mathcal{U}$ y como $R_a^{\mathcal{U}}$ es débilmente compacta hay una subsucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que existe $b=w\text{-}\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}a)$ en $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{W}$ es débilmente cerrado, $b\in\mathcal{W}$. Ahora, si $p:\mathcal{U}\to\mathcal{U}/I$ es la proyección al cociente podemos hallar una sucesión acotada $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $p(y_m)=\mu_m$ para todo $m\in\mathbb{N}$. Sean también $z\in\mathcal{U}$ tal que $p(z)=\eta$ e $\{y_{m_h}\}_{h=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ de manera que existe $t=w\text{-}\lim_{h\to\infty}(y_{m_h}z)$. Finalmente, dada $\Lambda\in(\mathcal{U}/I)^*$ se tiene $p^*(\Lambda)\in I^o$ (V. Prop. 12.38(viii)), como $I^o\subseteq\mathcal{U}^*$ y p es un homomrfismo escribimos*

$$\langle p(t),\Lambda\rangle=\lim_{h\to\infty}\langle y_{m_h}z,p^*(\Lambda)\rangle=\lim_{h\to\infty}\langle\mu_{m_h}\eta,\Lambda\rangle,$$

o sea $p(t)=w\text{-}\lim_{h\to\infty}(\mu_{m_h}\eta)$.

6.2. Aplicación a formas lineales casi periódicas

Teorema 6.6 *(V. [131], Th. 3.1) Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach con aproximación acotada $\{e_i\}_{i\in I}$ de la identidad e indiquemos*

$$l(\mathcal{U}^*)=\left\{f\in\mathcal{U}^*:f\in\overline{\{e_if\}_{i\in I}}^{w\text{-}ac}\right\},$$

Entonces:

(i) $l(\mathcal{U}^*)=\mathcal{U}\mathcal{U}^*$.

(ii) $\mathrm{WAP}(\mathcal{U})\subseteq l(\mathcal{U}^*)$ [12].

(iii) Si $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ es ideal a izquierda de $(\mathcal{U}^{**},\Box)$ entonces $\mathrm{WAP}(\mathcal{U})=l(\mathcal{U}^*)$.

Demostración 6.7 **(i)** *Por el teorema de Cohen $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ es cerrado en $\mathcal{U}^*$. Luego por el teorema de Mazur sigue la inclusión $\subseteq$. Además si $a\in\mathcal{U}$, $f\in\mathcal{U}^*$ e $i\in I$ resulta*

$$\|e_i(af)-af\|=\|(e_ia)f-af\|=\|(e_ia-a)f\|\le\|e_ia-a\|\,\|f\|,$$

y sigue enseguida que $af\in l(\mathcal{U}^*)$.

[12]V. la Observación 3.3.

(ii) *Si* $f \in \mathrm{WAP}(\mathcal{U})$ *hay alguna subred* $\{e_j\}_{j\in J}$ *de* $\{e_i\}_{i\in I}$ *tal que para cierto* $g \in \mathcal{U}^*$ *es* $g = w\text{-lím}_{j\in J}(e_j f)$. *Luego* $g = w^*\text{-lím}_{j\in J}(e_j f)$ *y por ello* $g = f$, *de donde* $f \in l(\mathcal{U}^*)$.

(iii) *Sean dados* $a \in \mathcal{U}$ *y* $f \in \mathcal{U}^*$. *Si* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ *es ideal a izquierda de* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *por el Teorema 6.1* R_a *es* w*-compacto. Además la aplicación* $R_f^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}(x) = xf$ *de* $\mathcal{U}$ *en* $\mathcal{U}^*$ *es de tipo* (w,w), *de modo que*

$$\begin{aligned}
\overline{[\mathcal{U}]_1(af)}^w &= \overline{([\mathcal{U}]_1 a) f}^w \\
&= \overline{R_a([\mathcal{U}]_1) f}^w \\
&\subseteq \overline{\overline{R_a([\mathcal{U}]_1)}^w f}^w \\
&= \overline{R_f^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}\left(\overline{R_a([\mathcal{U}]_1)}^w\right)}^w \\
&= R_f^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}\left(\overline{R_a([\mathcal{U}]_1)}^w\right)
\end{aligned}$$

y deducimos que $[\mathcal{U}]_1(af)$ *es débilmente relativamente compacto, i.e.* $af \in \mathrm{WAP}(\mathcal{U})$.

Corolario 6.8 *Si* $\mathcal{U}$ *es álgebra de Banach con aproximación acotada de la unidad tal que* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ *es ideal bilátero de* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *resulta* $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{U}$. *Si además* $\mathcal{U}$ *fuere regular será* $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{U}$.

6.3. Respecto al álgebra de operadores aproximables

Teorema 6.9 *(cf. [135], Th. 4)Sea* $\mathcal{A}(X)$ *el álgebra de operadores lineales acotados uniformemente aproximables por operadores de rango finito sobre un espacio de Banach* X. *Son equivalentes:*

(i) X es reflexivo.

(ii) $\iota_{\mathcal{A}(X)}(\mathcal{A}(X))$ es ideal bilátero de $(\mathcal{A}(X)^{**}, \Box)$.

(iii) $\iota_{\mathcal{A}(X)}(\mathcal{A}(X))$ es ideal a izquierda de $(\mathcal{A}(X)^{**}, \Box)$.

(iv) $\iota_{\mathcal{A}(X)}(\mathcal{A}(X))$ es ideal a derecha de $(\mathcal{A}(X)^{**}, \Box)$.

Demostración 6.10 *(*$i \Rightarrow ii$*) Sean* $x \in X$, $x^* \in X^*$, $\Phi \in \mathcal{A}(X)^{**}$. *Hay entonces una red acotada* $\{T_i\}_{i\in I}$ *en* $\mathcal{A}(X)$ *tal que* $\Phi = w^*\text{-lím}_{i\in I}\,\iota_{\mathcal{A}(X)}(T_i)$. *Entonces*

$$\begin{aligned}
\Phi\Box\iota_{\mathcal{A}(X)}(x \odot x^*) &= w^*\text{-}\lim_{i\in I}\iota_{\mathcal{A}(X)}(T_i)\,\Box\iota_{\mathcal{A}(X)}(x \odot x^*) \qquad (13)\\
&= w^*\text{-}\lim_{i\in I}\iota_{\mathcal{A}(X)}(T_i \circ (x \odot x^*)) \\
&= w^*\text{-}\lim_{i\in I}\iota_{\mathcal{A}(X)}((T_i(x) \odot x^*).
\end{aligned}$$

Como $\{T_i(x)\}_{i\in I}$ *es acotado en* X *y* X *es reflexivo hay una subred* $\left\{T_{i_j}(x)\right\}_{j\in J}$ *tal que*

$$y = w - \lim_{j\in J} T_{i_j}(x)$$

para cierto $y \in X$ *(V. [21], Th. 4.2). Dado* $\lambda \in \mathcal{A}(X)^*$ *consideremos la forma lineal continua* $z \to \lambda((z \odot x^*))$ *en* X^**. Por (13) tenemos*

$$\begin{aligned}\left\langle \lambda, \Phi\Box\iota_{\mathcal{A}(X)}(x\odot x^*)\right\rangle &= \lim_{i\in I}\langle (T_i(x)\odot x^*), \lambda\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\lambda\left(T_{i_j}(x)\odot x^*\right) \\ &= \lambda(y\odot x^*) \\ &= \left\langle \lambda, \iota_{\mathcal{A}(X)}(y\odot x^*)\right\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\Phi\Box\iota_{\mathcal{A}(X)}(x\odot x^*) = \iota_{\mathcal{A}(X)}(y\odot x^*)$ *e* $\iota_{\mathcal{A}(X)}(\mathcal{A}(X))$ *es ideal a izquierda. Además*

$$\begin{aligned}\iota_{\mathcal{A}(X)}(x\odot x^*)\Box\Phi &= w^*\text{-}\lim_{i\in I}\iota_{\mathcal{A}(X)}(x\odot x^*)\Box\iota_{\mathcal{A}(X)}(T_i) \qquad (14)\\ &= w^*\text{-}\lim_{i\in I}\iota_{\mathcal{A}(X)}((x\odot x^*)\circ T_i) \\ &= w^*\text{-}\lim_{i\in I}\iota_{\mathcal{A}(X)}(x\odot T_i^*(x^*)).\end{aligned}$$

Puesto que X^* *resulta reflexivo y* $\{T_i^*(x^*)\}_{i\in I}$ *es acotado en* X^* *hay alguna sebred* $\left\{T_{i_k}^*(x^*)\right\}_{k\in K}$ *débilmente convergente a algún* $y^* \in X^*$ *(V. [21], Th. 4.2). Si* $\lambda \in \mathcal{A}(X)^*$ *consideramos ahora la forma lineal continua* $z^* \to \lambda(x\odot z^*)$ *en* X^{**} *y por (14) escribimos*

$$\begin{aligned}\left\langle \lambda, \iota_{\mathcal{A}(X)}(x\odot x^*)\Box\Phi\right\rangle &= \lim_{i\in I}\langle x\odot T_i^*(x^*), \lambda\rangle \\ &= \lim_{k\in K}\lambda\left(x\odot T_{i_k}^*(x^*)\right) \\ &= \lambda(x\odot y^*) \\ &= \left\langle \lambda, \iota_{\mathcal{A}(X)}(x\odot y^*)\right\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\iota_{\mathcal{A}(X)}(x\odot x^*)\Box\Phi = \iota_{\mathcal{A}(X)}(x\odot y^*)$ *e* $\iota_{\mathcal{A}(X)}(\mathcal{A}(X))$ *es ideal a derecha.*

$(ii \Rightarrow iii)$ *Evidente.*

$(ii \Rightarrow iv)$ *Evidente.*

$(iii \Rightarrow i)$ *Sea* $G \in X^{**}$ *y fijemos* $x_0 \in X$, $x_0^* \in X^*$ *tales que* $\langle x_0, x_0^*\rangle = 1$. *Si* $\lambda \in \mathcal{A}(X)^*$ *y* $x \in X$ *escribiremos* $\lambda^{\#}(x) = \langle x\odot x_0^*, \lambda\rangle$, *con lo cual* $\lambda^{\#} \in X^*$. *Así si* $G^{\#}(\lambda) = \left\langle \lambda^{\#}, G\right\rangle$ *vemos que* $G^{\#} \in \mathcal{A}(X)^{**}$ *y por* *hipótesis existe* $T \in \mathcal{A}(X)$ *tal que* $G^{\#}\Box\iota_{\mathcal{A}(X)}(x_0 \odot x_0^*) = \iota_{\mathcal{A}(X)}(T)$. *Es fácil ver que* $Z = \{x \odot x_0^* : x \in X\}$ *es subespacio cerrado de* $\mathcal{A}(X)$. *Si fuere* $T \notin Z$ *por el teorema de Banach-Hahn habría algún* $\mu \in \mathcal{A}(X)^*$ *tal que* $\mu(Z) = \{0\}$ *y*

$$\begin{aligned} 0 &\neq \langle T, \mu\rangle \qquad (15)\\ &= \left\langle \mu, G^{\#}\Box\iota_{\mathcal{A}(X)}(x_0 \odot x_0^*)\right\rangle \\ &= \left\langle \iota_{\mathcal{A}(X)}(x_0 \odot x_0^*)\,\mu, G^{\#}\right\rangle \\ &= \left\langle (x_0 \odot x_0^*)\,\mu, G^{\#}\right\rangle . \end{aligned}$$

Pero si $S \in \mathcal{A}(X)$ *vemos que*

$$\langle S, (x_0 \odot x_0^*)\,\mu\rangle = \langle S(x_0 \odot x_0^*), \mu\rangle = \langle S(x_0) \odot x_0^*, \mu\rangle = 0,$$

i.e. $(x_0 \odot x_0^*)\,\mu = 0_{\mathcal{A}(X)^*}$, *por lo que (15) no es posible. Existe entonces* $y_0 \in X$ *tal que* $T = y_0 \odot x_0^*$, *de modo que*

$$\begin{aligned} \langle y_0 \odot x_0^*, \eta\rangle &= \left\langle \eta, G^{\#}\Box\iota_{\mathcal{A}(X)}(x_0 \odot x_0^*)\right\rangle \qquad (16)\\ &= \left\langle \iota_{\mathcal{A}(X)}(x_0 \odot x_0^*)\,\eta, G^{\#}\right\rangle \\ &= G^{\#}((x_0 \odot x_0^*)\,\eta) \\ &= \left\langle [(x_0 \odot x_0^*)\,\eta]^{\#}, G\right\rangle \end{aligned}$$

para todo $\eta \in \mathcal{A}(X)^*$. *Dado* $x^* \in X^*$ *el funcional* $\lambda_{x^*} : Z \to \mathbb{C}$ *tal que* $\lambda_{x^*}(x \odot x_0^*) = \langle x, x^*\rangle$ *puede extenderse, por el teorema de Banach-Hahn, a un funcional* $\Lambda_{x^*} \in \mathcal{A}(X)^*$. *Además si* $x \in X$ *es*

$$\begin{aligned} [(x_0 \odot x_0^*)\,\Lambda_{x^*}]^{\#}(x) &= \langle x \odot x_0^*, (x_0 \odot x_0^*)\,\Lambda_{x^*}\rangle \\ &= \langle (x \odot x_0^*) \circ (x_0 \odot x_0^*), \Lambda_{x^*}\rangle \\ &= \langle x \odot x_0^*, \Lambda_{x^*}\rangle \\ &= \langle x \odot x_0^*, \lambda_{x^*}\rangle \\ &= \langle x, x^*\rangle , \end{aligned}$$

i.e. $[(x_0 \odot x_0^*)\,\Lambda_{x^*}]^{\#} = x^*$. *Por (16) resulta*

$$\begin{aligned} \langle x^*, G\rangle &= \left\langle [(x_0 \odot x_0^*)\,\Lambda_{x^*}]^{\#}, G\right\rangle \\ &= \langle y_0 \odot x_0^*, \Lambda_{x^*}\rangle \\ &= \langle y_0 \odot x_0^*, \lambda_{x^*}\rangle \\ &= \langle y_0, x^*\rangle , \end{aligned}$$

o bien $G = \iota_X(y_0)$ *y* X *es reflexivo.*

$(iv \Rightarrow i)$ *Fijemos* $x_0 \in X$, $x_0^* \in X^*$ *tales que* $\langle x_0, x_0^* \rangle = 1$. *Si* $M \in X^{***}$ *y* $\lambda \in \mathcal{A}(X)^*$ *sea* $\lambda^\flat \in X^{**}$, $\lambda^\flat(x^*) = \langle x_0 \odot x^*, \lambda \rangle$. *Hagamos también* $M^\flat \in \mathcal{A}(X)^{**}$ *de modo que* $M^\flat(\lambda) = \left\langle \lambda^\flat, M \right\rangle$. *Por hipótesis existe* $S \in \mathcal{A}(X)$ *tal que* $\iota_{\mathcal{A}(X)}(x_0 \odot x_0^*) \Box M^\flat = \iota_{\mathcal{A}(X)}(S)$. *En analogía a la demostración anterior, será* $S = x_0 \odot y_0^*$ *para cierto* $y_0^* \in X^*$ *y se concluirá luego que* X^* *es reflexivo.*

6.4. Respecto al álgebra $L^1(G)$

Proposición 6.11 *(Cf. [134], Prop. 4.1) Sea* G *un grupo localmente compacto. Si* $\iota_{L^1(G)}(L^1(G))$ *es ideal bilátero en* $(L^1(G)^{**}, \Box)$, G *es compacto.*

Demostración 6.12 *Si* G *fuere no compacto* $m_G(G) = +\infty$, *donde* m_G *es la medida de Haar de* G *(cf. [73], §15, Th. 15.9). Por la regularidad de la medida de Haar existe* $C_1 \subseteq G$ *compacto tal que* $m_G(C_1) > 1$. *Si* $n \in \mathbb{N}_{>1}$ *y suponemos hallados conjuntos compactos disjuntos* $C_1, , , , , C_{n-1}$ *de medida mayor que uno, como* $G - \cup_{i=1}^{n-1} C_i$ *es abierto de medida infinita nuevamente por la regularidad de la medida existirá un compacto* C_n *contenido en este conjunto con medida mayor que uno. Queda definida así una sucesión disjunta infinita* $\{C_i\}_{i=1}^\infty$ *de compactos de medida mayor que uno. Si* $n \in \mathbb{N}$ *indicaremos* $C_{(n)} = \cup_{i=1}^n C_i$, *y sea* $C = \cup_{i=1}^\infty C_i$. *Entonces cada* $C_{(n)}$ *es compacto y* C *es* σ*-compacto. Por hipótesis, si* $\Phi \in L^1(G)^{**}$ *existe* $y \in L^1(G)$ *tal que* $\Phi \Box \iota_{L^1(G)}(\chi_{C_1}) = \iota_{L^1(G)}(y)$. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *tenemos*

$$\left\langle y, \chi_{C_{(n)} \cdot C_1} \right\rangle = \left\langle \chi_{C_{(n)} \cdot C_1}, \Phi \Box \iota_{L^1(G)}(\chi_{C_1}) \right\rangle = \left\langle \chi_{C_1} \chi_{C_{(n)} \cdot C_1}, \Phi \right\rangle. \tag{17}$$

Además $y\chi_{C_{(n)} \cdot C_1} \to y\chi_{C \cdot C_1}$ *en todo punto y* $\left| y\chi_{C_{(n)} \cdot C_1} \right| \leq |y|$ *en casi todo punto. Por el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue de (17) resulta*

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \left\langle \chi_{C_1} * \chi_{C_{(n)} \cdot C_1}, \Phi \right\rangle &= \langle y, \chi_{C \cdot C_1} \rangle \\
&= \left\langle \chi_{C \cdot C_1}, \Phi \Box \iota_{L^1(G)}(\chi_{C_1}) \right\rangle \\
&= \langle \chi_{C_1} * \chi_{C \cdot C_1}, \Phi \rangle,
\end{aligned}$$

i.e. $\chi_{C_1} * \chi_{C \cdot C_1} = w\text{-lím}_{n \to \infty} \chi_{C_1} * \chi_{C_{(n)} \cdot C_1}$. *En general, dados* $x, z \in L^1(G)$ *y* $f \in L^\infty(G)$ *podemos aplicar el teorema de Fubini y así*

$$\begin{aligned}
\langle z, xf \rangle &= \langle z * x, f \rangle \\
&= \int_G \left(\int_G z(s)\, x\left(s^{-1}t\right) dm_G(s) \right) f(t) dm_G(t) \\
&= \int_G z(s) \left(\int_G x\left(s^{-1}t\right) f(t) dm_G(t) \right) dm_G(s).
\end{aligned}$$

Luego en casi todo punto $s \in G$ resulta

$$(xf)(s) = \int_G x\left(s^{-1}t\right) f(t) dm_G(t) \tag{18}$$
$$= \int_G x(u) f(su)\, dm_G(u).$$

Más aún, vemos que

$$|(xf)(s) - (xf)(u)| = \left| \int_G \left(x\left(s^{-1}t\right) - x\left(u^{-1}t\right)\right) f(t) dm_G(t) \right| \tag{19}$$
$$\leq \|f\|_\infty \int_G \left|x(v) - x\left(u^{-1}sv\right)\right| dv$$
$$= \|x -_{u^{-1}s} x\|_1 \|f\|_\infty.$$

Por la continuidad de la aplicación $v \to_v x$ de G en $L^1(G)$ por (19) deducimos que $xf \in C_b(G)$. Además por (18) dado $s \in C$ resulta

$$(\chi_{C_1}\chi_{C\cdot C_1})(s) = \int_{C_1} \chi_{C\cdot C_1}(su)\, dm_G(u) = m_G(C_1) > 1.$$

En consecuencia $\chi_{C_1}\chi_{C\cdot C_1} \notin C_0(G)$ pues C, teniendo medida infinita, no está contenido en compacto alguno. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ por (18) claramente

$$\left(\chi_{C_1} * \chi_{C_{(n)}\cdot C_1}\right)(s) = \int_{C_1} \chi_{C_{(n)}\cdot C_1}(su)\, dm_G(u) = 0$$

si $s \notin C_{(n)} \cdot C_1 \cdot C_1^{-1}$, i.e. $\chi_{C_1} * \chi_{C_{(n)}\cdot C_1} \in C_0(G)$. Pero $\chi_{C_1} * \chi_{C\cdot C_1} \in \overline{C_0(G)}^w$ y por el teorema de Mazur, siendo $C_0(G)$ cerrado, $\chi_{C_1} * \chi_{C\cdot C_1} \in C_0(G)$ en contradicción con lo anterior.

7. Respecto a álgebras de operadores

Teorema 7.1 [13][14]*(cf. [78], Lemma 2) Sean E, F espacios de Banach. Si F tiene una aproximación m-acotada de la identidad hay un isomorfismo de $\mathcal{B}(E,F)$ en $\mathcal{K}(E,F)^{**}$, el que será isométrico si $m = 1$, que extiende a $\iota_{\mathcal{K}(E,F)}$.*

[13]*Palabras clave:* Aproximaciones m-acotadas de la identidad.

[14]Respecto a *semiregularidad* de álgebras de operadores compactos v. [63]. Por condiciones de regularidad de álgebras de operadores v. [32]; respecto a bidualidad y regularidad de cocientes del álgebra de Fourier v. *[57], [59].* Respecto a regularidad de álgebras de operadores recomendamos consultar [34] y [33].

Demostración 7.2 *Sea* $\{a_i\}_{i\in I}$ *una aproximación* m*-acotada de la identidad de* F. *Pasando eventualmente a una sebred, por el teorema de Alaoglu existe* $\Psi \in \mathcal{K}(F)^{**}$ *tal que*

$$\Psi = w^* - \lim_{i\in I} \iota_{\mathcal{K}(F)}(a_i).$$

Dados $t \in \mathcal{B}(E,F)$ *y* $\phi \in \mathcal{K}(E,F)^*$ *sea* $f_{t,\phi}(c) = \phi(ct)$, $c \in \mathcal{K}(F)$. *Entonces* $f_{t,\phi} \in \mathcal{K}(F)^*$ *y escribiremos*

$$\Lambda(t)(\phi) \triangleq \langle f_{t,\phi}, \Psi\rangle = \lim_{i\in I} \langle a_i, f_{t,\phi}\rangle = \lim_{i\in I} \phi(a_i t). \tag{20}$$

Claramente (20) define una aplicación lineal $\Lambda(t) : \mathcal{K}(E,F) \to \mathbb{C}$. *Como para* $i \in I$ *se tiene*

$$|\phi(a_i t)| \leq \|\phi\| \|a_i t\| \leq \|\phi\| \|a_i\| \|t\| \leq m \|\phi\| \|t\|$$

es $|\Lambda(t)(\phi)| \leq m \|\phi\| \|t\|$, *i.e.* $\Lambda(t) \in \mathcal{K}(E,F)^{**}$ *y*

$$\|\Lambda(t)\| \leq m \|t\|. \tag{21}$$

Asimismo, Λ *es* $\mathbb{C}$*-lineal y deviene acotada. Ahora, si* $x \in [E]_1$, $y^* \in [F^*]_1$ *y* $k \in \mathcal{K}(E,F)$ *sea* $\tau(k) = y^*(k(x))$. *Así* $\tau \in [\mathcal{K}(E,F)^*]_1$ *y*

$$\begin{aligned} |y^*(t(x))| &= \left|\lim_{i\in I} y^*((a_i t)(x))\right| \\ &= \left|\lim_{i\in I} \tau(a_i t)\right| \\ &= |\Lambda(t)(\tau)| \\ &\leq \|\Lambda(t)\|. \end{aligned} \tag{22}$$

Por (22) obtenemos

$$\|t\| = \sup_{x\in[E]_1} \|t(x)\| = \sup_{x\in[E]_1} \sup_{y^*\in[F^*]_1} |y^*(t(x))| \leq \|\Lambda(t)\|. \tag{23}$$

De (21) y (23), t *es isométrica si* $m = 1$. *Finalmente, si* $t \in \mathcal{K}(E,F)$ *es inmediato que* $\|a_i t - t\| \to 0$ *en* $\mathcal{K}(E,F)$ *y por (20) si* $\phi \in \mathcal{K}(E,F)^*$ *es*

$$\Lambda(t)(\phi) = \phi(t) = \left\langle \phi, \iota_{\mathcal{K}(E,F)}(t)\right\rangle,$$

o sea $\Lambda(t) = \iota_{\mathcal{K}(E,F)}(t)$.

Observación 7.3 *Si* $E = F$ *la aplicación* $\Lambda : \mathcal{B}(E) \hookrightarrow \mathcal{K}(E)^{**}$ *no es, en general, un homomorfismo de álgebras. P. ej., con la notación usual, si* $E = l^1(\mathbb{N})$ *sea* $b = e_1 \odot u$ *con* $u = (1, 1, ...)$ *en* $l^\infty(\mathbb{N})$ *y si* $n \in \mathbb{N}$ *hagamos*

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} e_j \odot e_j, \;\; c_n = e_1 \odot e_n.$$

Como $\operatorname{dist}\left(b, \overline{\langle c_n \rangle}_{n\in\mathbb{N}}\right) \geq 1$ *por el teorema de Banach-Hahn existe* $f \in \mathcal{K}(E)^*$ *tal que* $f(b) = 1$ *y* $f(c_n) = 0$ *si* $n \in \mathbb{N}$. *Como* $Id_E = s\text{-lím}_{n\to\infty} a_n$, *por el teorema de acotación uniforme* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es acotada en* $\mathcal{K}(E)$. *Por el teorema de Alaoglu hay una subsucesión* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de forma que* $I = w^*\text{-lím}_{k\to\infty} \iota_{\mathcal{K}(E)}(a_{n_k})$ *para cierto* $I \in \mathcal{K}(E)^{**}$. *Entonces* $I = \Lambda(Id_E)$ *y además*

$$\begin{aligned}
\langle f, \Lambda(b) \Diamond \Lambda(Id_E) \rangle &= \langle f, \Lambda(b) \Box \Lambda(Id_E) \rangle \\
&= \langle If, \Lambda(b) \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle a_{n_k} b, If \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle f(a_{n_k} b), I \rangle \\
&= \langle fb, I \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle a_{n_k}, fb \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle b a_{n_k}, f \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{n_k} (e_1 \odot u)(e_j \odot e_j), f \right\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{n_k} e_1 \odot e_j, f \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\langle f, \Lambda(b) \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle a_{n_k} b, f \rangle = \langle b, f \rangle = 1,$$

de donde sigue la afirmación.

Teorema 7.4 *(cf. [72], Th. 4.1, 4.2, 4.3) Sea* E *espacio de Banach de modo que* $\mathcal{K}(E)$ *tiene aproximación débil m-acotada de la unidad* $\{a_i\}_{i\in I}$ *y* w^**-conver-gente en* $\mathcal{K}(E)^{**}$, *digamos* $A = w^*\text{-lím}_{i\in I} \iota_{\mathcal{K}(E)}(a_i)$.

(i) Hay una inmersión $\lambda : \mathcal{B}(E) \to \mathcal{K}(E)^{**}$, que extiende a $\iota_{\mathcal{K}(E)}$, la que es isométrica si hay alguna subred $\{a_{i_j}\}_{j\in J}$ tal que $\|a_{i_j}\| \to 1$.

(ii) Si $s \in \mathcal{B}(E)$, $t \in \mathcal{K}(E)$, $\{t_j\}_{j\in J}$ es una red de $\mathcal{K}(E)$ tal que

$$t = wot\text{-}\lim_{j\in J} t_j \quad \text{y} \quad \lambda(s) = w^*\text{-}\lim_{j\in J} \iota_{\mathcal{K}(E)}(t_j) \tag{24}$$

entonces $s = t$.

(iii) $\lambda : \mathcal{B}(E) \to (\mathcal{K}(E)^{**}, \square)$ es un homomorfismo.

(iv) Dado $F \in \mathcal{K}(E)^{**}$, $F \in \operatorname{ran}(\lambda)$ si y solo si

$$\lambda(Id_E)\,\square F = F \quad \text{y} \quad \cup_{i\in I}\{a_i F, F a_i\} \subseteq \iota_{\mathcal{K}(E)}(\mathcal{K}(E)). \tag{25}$$

Demostración 7.5 **(i)** *Si $t \in \mathcal{B}(E)$ y $f \in \mathcal{K}(E)^*$ sea*

$$f_t(c) = f(ct) \ \text{ si } c \in \mathcal{K}(E). \tag{26}$$

Como $f_t \in \mathcal{K}(E)^*$ existe

$$\lambda(t)(f) \triangleq \langle f_t, A\rangle = \lim_{i\in I} f(a_i t), \tag{27}$$

λ es $\mathbb{C}$-lineal y $|\lambda(t)(f)| \leq m\|t\|\|f\|$, i.e.

$$\lambda(t) \in \mathcal{K}(E)^{**} \quad y \quad \|\lambda(t)\| \leq m\|t\|.$$

Como $\{a_i\}_{i\in I}$ es aproximación débil y acotada de la unidad de $\mathcal{K}(E)$, de (27) sigue enseguida que λ extiende a $\iota_{\mathcal{K}(E)}$. Si $x \in [E]_1$, $x^* \in [E^*]_1$ sea $c \in [\mathcal{K}(E)]_1$ tal que $c(x) = x$. Si $i \in I$ tenemos

$$x^*(a_i(x)) = x^*((a_i c)(x)) = g_{x,x^*}(a_i c),$$

donde $g_{x,x^*}(k) \triangleq x^*(k(x))$ si $k \in \mathcal{K}(E)$. Como $g_{x,x^*} \in \mathcal{K}(E)^*$ deducimos que

$$x^*(x) = x^*(c(x)) = g_{x,x^*}(c) = \lim_{i\in I} g_{x,x^*}(a_i c) = \lim_{i\in I} x^*(a_i(x)), \tag{28}$$

o sea

$$x = w\text{-}\lim_{i\in I} a_i(x) \quad en \quad E. \tag{29}$$

Reemplazando x por $t(x)$ en (28) resulta

$$\begin{aligned} x^*(t(x)) &= \lim_{i\in I} x^*(a_i(t(x))) \\ &= \lim_{i\in I} x^*((a_i t)(x)) \\ &= \lim_{i\in I} g_{x,x^*}(a_i t) \\ &= \lambda(t)(g_{x,x^*}), \end{aligned}$$

y como $g_{x,x^*} \in [\mathcal{K}(E)]_1$ entonces $|x^*(t(x))| \leq \|\lambda(t)\|$. Inferimos así que $\|t\| \leq \|\lambda(t)\|$ y sigue enseguida la afirmación.

(ii) *Con la notación anterior, sean $x \in E$, $x^* \in E^*$. Entonces*

$$\begin{aligned} x^*(t(x)) &= g_{x,x^*}(t) \\ &= \lim_{j\in J} g_{x,x^*}(t_j) \quad \textit{(por (24))} \\ &= \lim_{j\in J} \left\langle g_{x,x^*}, \iota_{\mathcal{K}(E)}(t_j) \right\rangle \\ &= \lambda(s)(g_{x,x^*}) \quad \textit{(por (24))} \\ &= \lim_{i\in I} g_{x,x^*}(a_i s) \quad \textit{(por (27) con } t = s \textit{ y } f = g_{x,x^*}\textit{)} \\ &= \lim_{i\in I} x^*(a_i(s(x))) \\ &= x^*(s(x)) \quad \textit{(por (29),} \end{aligned}$$

de donde sigue la afirmación ya que x y x^* son cualesquiera.

(iii) *Sean $s, t \in \mathcal{B}(E)$, $f \in \mathcal{K}(E)^*$, $b \in \mathcal{K}(E)$. Entonces*

$$\begin{aligned} \langle b, \lambda(t) f \rangle &= \langle fb, \lambda(t) \rangle \\ &= \lim_{i\in I} \langle a_i t, fb \rangle \\ &= \lim_{i\in I} \langle b(a_i t), f \rangle \\ &= \lim_{i\in I} \langle (ba_i) t, f \rangle \\ &= \lim_{i\in I} f_t(ba_i) \quad \textit{(por (26))} \\ &= f_t(b) \\ &= f(bt). \end{aligned} \tag{30}$$

Finalmente, usando (30) es

$$\begin{aligned} \langle f, \lambda(s) \Box \lambda(t) \rangle &= \langle \lambda(t) f, \lambda(s) \rangle \\ &= \lim_{i\in I} \langle a_i s, \lambda(t) f \rangle \\ &= \lim_{i\in I} f((a_i s) t) \\ &= \lim_{i\in I} f(a_i(st)) \\ &= \langle f, \lambda(st) \rangle. \end{aligned}$$

(iv) *Por (iii), puesto que λ extiende a $\iota_{\mathcal{K}(E)}$ y $\mathcal{K}(E)$ es ideal bilátero de $\mathcal{B}(E)$ la condición es necesaria. Recíprocamente, sea $F \in \mathcal{K}(E)^{**}$ y asumamos (25). Si $f \in \mathcal{K}(E)^*$, como $\lambda(Id_E) = w^*\text{-lím}_{i\in I}\, \iota_{\mathcal{K}(E)}(a_i)$ y los productos de Arens son w^*-lateralmente continuos tendremos*

$$\langle f, F \rangle = \langle f, \lambda(Id_E) \Box F \rangle = \lim_{i\in I} \langle f, a_i F \rangle. \tag{31}$$

Si fuere $F = \lambda(t)$ para cierto $t \in \mathcal{B}(E)$ sería también

$$\langle f, F\rangle = \lim_{i\in I} \langle a_i t, f\rangle = \lim_{i\in I} \left\langle f, \iota_{\mathcal{K}(E)}(a_i t)\right\rangle . \tag{32}$$

De (31) y (32) bastaría que $a_i F = \iota_{\mathcal{K}(E)}(a_i t)$ para todo $i \in I$. Por hipótesis, fijado $i \in I$ existen $b_i, c_i \in \mathcal{K}(E)$ tales que $\iota_{\mathcal{K}(E)}(b_i) = a_i F$ e $\iota_{\mathcal{K}(E)}(c_i) = F a_i$. Debería ser entonces $b_i = a_i t$, y por (29) obtendríamos

$$T(a_j(x)) = w\text{-}\lim_{i\in I} b_i(a_j(x)),\ j \in I,\ x \in E. \tag{33}$$

El límite en (33) efectivamente existe: Para $i, j \in I$, $x \in E$ y $x^* \in E^*$ es

$$x^*(b_i(a_j(x))) = g_{a_j(x),x^*}(b_i) = \left\langle g_{a_j(x),x^*}, \iota_{\mathcal{K}(E)}(b_i)\right\rangle = \left\langle g_{a_j(x),x^*}, a_i F\right\rangle . \tag{34}$$

De (31) y (34) obtenemos

$$\lim_{i\in I} x^*(b_i(a_j(x))) = \lim_{i\in I} \left\langle g_{a_j(x),x^*}, a_i F\right\rangle = \left\langle g_{a_j(x),x^*}, F\right\rangle .$$

Por (29) el subespacio $V = \langle a_j(x)\rangle_{j\in I, x\in E}$ es w-denso en E. Extendemos T linealmente para $v \in V$ mediante $T(v) = w\text{-}\lim_{i\in I} b_i(v)$. Como para $i \in I$ y $v \in V$ es

$$\|b_i(v)\| \le \|b_i\| \|v\| \le \|a_i\| \|F\| \|v\| \le m \|F\| \|v\| ,$$

T es acotado sobre V. Como por el Teorema 13.61 V es denso en E entonces T se extiende naturalmente a un elemento $T \in \mathcal{B}(E)$. Ahora si $i \in I$,

$$\begin{aligned}
w^*\text{-}\lim_{j\in I} \iota_{\mathcal{K}(E)}(b_j a_i) &= w^*\text{-}\lim_{j\in I} [(a_j F) a_i] \\
&= w^*\text{-}\lim_{j\in I} [a_j (F a_i)] \\
&= \lambda(Id_E) \square (F a_i) \\
&= [\lambda(Id_E) \square F] a_i \\
&= F a_i \\
&= \iota_{\mathcal{K}(E)}(c_i) \\
&= \lambda(c_i) ,
\end{aligned}$$

y por (33) $t a_i = wot\text{-}\lim_{j\in I}(b_j a_i)$. Por (ii) deducimos que $c_i = t a_i$ para cada $i \in I$. Más aún, si $i, j \in I$ tenemos $b_j a_i = a_j c_i$ pues $\square$ es asociativo e $\iota_{\mathcal{K}(E)}$ es un homomorfismo. Luego si $x \in E$ resulta

$$(a_j t)(a_i(x)) = (a_j c_i)(x) = (b_j a_i)(x) = b_j(a_i(x)) .$$

Así $a_j t$ y b_j coinciden sobre V y podemos concluir que $a_j t = b_j$.[15][16]

8. Relaciones con dobles centralizadores

Si[17][18] $\mathcal{U}$ es un álgebra asociativa compleja indicaremos $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ al *álgebra de centralizadores dobles*, i.e. $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ consiste de los pares de aplicaciones lineales (L, R) de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$ tales que $xL(y) = R(x)y$,

$$L(xy) = L(x)y \text{ y } R(xy) = xR(y) \tag{35}$$

para todo $x, y \in \mathcal{U}$. En particular, L y R se dicen *centralizadores a izquierda y derecha de* $\mathcal{U}$ si satisfacen las condiciones de (35) respectivamente. P. ej., $(L_x, R_x) \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ donde $L_x(y) = xy$ y $R_x(y) = yx$ si $x, y \in \mathcal{U}$. Con la estructura natural, $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ es un espacio vectorial complejo. Más aún, $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ es un álgebra compleja si para (L_1, R_1), $(L_2, R_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ definimos su producto en $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ como

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 \circ L_2, R_2 \circ R_1).$$

Si $\mathcal{U}$ es un álgebra normada escribiremos $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$ a la clase de centralizadores dobles $(L, R) \in \mathcal{B}(\mathcal{U}) \times \mathcal{B}(\mathcal{U})$, munida de la norma

$$\|(L, R)\| = \text{máx}\{\|L\|, \|R\|\}.$$

Si ambos anuladores[19] de $\mathcal{U}$ fueren nulos todo par (L, R) de funciones de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$ tales que $xL(y) = R(x)y$ si $x, y \in \mathcal{U}$ será un centralizador doble (V. [102], Th. 1.2.4(a)). Si además $\mathcal{U}$ fuere un álgebra de Banach por el

[15] Si X es espacio de Banach tal que $\mathcal{B}(X)$ es regular, X ha de ser reflexivo (v. [143], p. 107). Si G fuere un grupo localmente compacto hay un espacio de Banach reflexivo X tal que $L^1(G)$ es isométricamente isomorfo a una subálgebra de $\mathcal{B}(X)$ (v. [143], Th. 4). Luego $\mathcal{B}(X)$ podría no ser regular aún cuando X no sea reflexivo y el bidual de álgebras regulares podría no ser regular (v. [143], Corollaries 1-2). La determinación de qué espacios reflexivos X son los que $\mathcal{B}(X)$ es regular es un problema delicado (v. [34], [33]), la respuesta requiere de la noción de *super-reflexividad* (cf. [76]). En [143] se ve asimismo que si X es reflexivo toda subálgebra cerrada de $\mathcal{K}(X)$ es regular y, si $\mathcal{U}$ es un álgebra de Banach regular existe X espacio de Banach reflexivo tal que $\mathcal{U}$ es isométricamente isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{K}(X)$.

[16] Si X es espacio de Banach reflexivo lás álgebras de Banach $X \widehat{\otimes} X^*$, $\mathcal{N}(X)$, $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{A}(X)$ son regulares (cf. [143], [132], [101]).

[17] *Palabras clave:* Centralizadores dobles. Anuladores a izquierda y derecha de un álgebra. Unidades mixtas. Idealizadores.

[18] V. [88], [137], [138], [29], [95], [96], [128], [127], [35], [136].

[19] Respecto a *anuladores* ver la nota en el Teorema 2.20(viii).

.

teorema de gráfico cerrado tendremos $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \mathcal{D}(\mathcal{U})$, y $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ es álgebra de Banach unitaria (V. [102], Th. 1.2.4(b)). En particular, queda definido un homomorfismo natural de álgebras $\mathfrak{h} : \mathcal{U} \to \mathcal{D}(\mathcal{U})$, $\mathfrak{h}(x) = (L_x, R_x)$ para cada $x \in \mathcal{U}$. Notar que $\ker(\mathfrak{h}) = an(\mathcal{U})$. Si $\mathcal{U}$ fuere una $*$-álgebra también lo será $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ si hacemos

$$(L, R)^* = (R^{\triangleleft}, L^{\triangleleft}) \text{ si } (L, R) \in \mathcal{D}(\mathcal{U}),$$

donde en general $T^{\triangleleft}(x) = T(x^*)^*$ para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ y $x \in \mathcal{U}$.[20]

Teorema 8.1 *Si $\mathcal{U}$ es $*$-álgebra de Banach $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$ es isométricamente $*$-isomorfa a sendas subálgebras cerradas de $\mathcal{D}((\mathcal{U}^{**}, \square))$ y de $\mathcal{D}((\mathcal{U}^{**}, \diamondsuit))$.*

Demostración 8.2 *Sea $D : \mathcal{D}(\mathcal{U}) \to \mathcal{D}((\mathcal{U}^{**}, \square))$, $D((L, R)) = (L^{**}, R^{**})$. Dadas $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$, $\lambda \in \mathcal{U}^*$ y $x \in \mathcal{U}$ es fácil ver que $\lambda R(x) = L^*(\lambda x)$ en $\mathcal{U}^*$. Luego $R^*(\Psi\lambda) = L^{**}(\Psi)\lambda$ y por lo tanto $R^{**}(\Phi)\square\Psi = \Phi\square L^{**}(\Psi)$. Asimismo es fácil ver que L^{**} y R^{**} son centralizadores a izquierda y derecha de $(\mathcal{U}^{**}, \square)$ respectivamente. Inferimos que $(L^{**}, R^{**}) \in \mathcal{D}((\mathcal{U}^{**}, \square))$ y D está bien definido. Es inmediato que D es homomorfismo isométrico de álgebras y es $*$-homomorfismo, lo que seguirá si probamos que $(T^{\triangleleft})^{**} = (T^{**})^{\triangleleft}$ cuando $T \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$. En efecto, con la notación anterior tenemos*

$$\begin{aligned} \left\langle \lambda, (T^{**})^{\triangleleft}(\Phi) \right\rangle &= \left\langle \lambda, [T^{**}(\Phi^{\triangleleft})]^{\triangleleft} \right\rangle \\ &= \overline{\langle \lambda^*, [T^{**}(\Phi^{\triangleleft})] \rangle} \\ &= \overline{\langle \lambda^{\triangleleft}, T^{**}(\Phi^{\triangleleft}) \rangle} \\ &= \overline{\langle T^*(\lambda^{\triangleleft}), \Phi^{\triangleleft} \rangle} \\ &= \left\langle [T^*(\lambda^{\triangleleft})]^{\triangleleft}, \Phi \right\rangle. \end{aligned} \tag{36}$$

Además

$$\begin{aligned} \left\langle x, [T^*(\lambda^{\triangleleft})]^{\triangleleft} \right\rangle &= \overline{\langle x^*, T^*(\lambda^{\triangleleft}) \rangle} \\ &= \overline{\langle T(x^*), \lambda^{\triangleleft} \rangle} \\ &= \langle T^{\triangleleft}(x), \lambda \rangle \\ &= \left\langle x, (T^{\triangleleft})^*(\lambda) \right\rangle, \end{aligned}$$

[20] También si $\lambda \in \mathcal{U}^*$ y $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ y $M \in \mathcal{B}(\mathcal{U}^{**})$ quedan definidos $\lambda^{\triangleleft} \in \mathcal{U}^*$, $\Phi^{\triangleleft} \in \mathcal{U}^{**}$ y $M^{\triangleleft} \in \mathcal{B}(\mathcal{U}^{**})$, donde

$$\left\langle x, \lambda^{\triangleleft} \right\rangle \triangleq \overline{\langle x^*, \lambda \rangle}, \; \left\langle \lambda, \Phi^{\triangleleft} \right\rangle \triangleq \overline{\langle \lambda^{\triangleleft}, \Phi \rangle} \text{ y } M^{\triangleleft}(\Phi) = M\left(\Phi^{\triangleleft}\right)^{\triangleleft}.$$

i.e. $\left[T^{*}(\lambda^{\triangleleft})\right]^{\triangleleft} = \left(T^{\triangleleft}\right)^{*}(\lambda)$ *y por (36) obtenemos*

$$\left\langle \lambda, \left(T^{**}\right)^{\triangleleft}(\Phi) \right\rangle = \left\langle \left(T^{\triangleleft}\right)^{*}(\lambda), \Phi \right\rangle = \left\langle \lambda, \left(T^{\triangleleft}\right)^{**}(\Phi) \right\rangle$$

y sigue la afirmación en el primer caso. El resto es análogo.

Corolario 8.3 **(i)** *Si $\mathcal{U}^{**}$ tuviere alguna unidad mixta E y $(L,R) \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ resulta*

$$L^{**} = L^{\Diamond}_{R^{**}(E)} = L^{\Diamond}_{L^{**}(E)} \text{ y } R^{**} = R^{\square}_{R^{**}(E)} = R^{\square}_{L^{**}(E)}.$$

(ii) *Si $(\mathcal{U}^{**}, \circledast)$ tuviere unidad E dado $(L,R) \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, $L^{**}(E) = R^{**}(E)$ y $D((L,R)) = \mathfrak{h}^{\circledast}(L^{**}(E))$, donde $\circledast$ denota cualquiera de los productos de Arens.*

(iii) *Si $(\mathcal{U}^{**}, \circledast)$ tuviere unidad E queda definido $D_{\circledast} : \mathcal{D}(\mathcal{U}) \to (\mathcal{U}^{**}, \circledast)$ homeomorfismo, el que será isométrico si y solo si $\|E\| = 1$.*

Demostración 8.4 **(i)** *Si $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ tenemos*

$$R^{**}(\Phi) = R^{**}(\Phi \square E) = \Phi \square R^{**}(E) = \left(R^{\square}_{R^{**}(E)}\right)(\Phi).$$

De la demostración de la Prop. 4.6 hay una red acotada $\{e_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{U}$ tal que $E = w^{*}\text{-lím}_{i \in I}\, \iota_{\mathcal{U}}(e_i)$ y para todo $y \in \mathcal{U}$ se tiene $y = w\text{-lím}_{i \in I}(ye_i)$. En consecuencia, si $\lambda \in \mathcal{U}^{*}$ y $x \in \mathcal{U}$ escribimos

$$\begin{aligned} \langle x, L^{**}(E)\lambda \rangle &= \langle L^{*}(\lambda x), E \rangle \\ &= \lim_{i \in I} \langle e_i, L^{*}(\lambda x) \rangle \\ &= \lim_{i \in I} \langle xL(e_i), \lambda \rangle \\ &= \lim_{i \in I} \langle R(x)e_i, \lambda \rangle \\ &= \langle R(x), \lambda \rangle \\ &= \langle x, R^{*}(\lambda) \rangle, \end{aligned}$$

i.e. $L^{**}(E)\lambda = R^{*}(\lambda)$. *Luego*

$$\langle \lambda, \Phi \square L^{**}(E) \rangle = \langle L^{**}(E)\lambda, \Phi \rangle = \langle R^{*}(\lambda), \Phi \rangle = \langle \lambda, R^{**}(\Phi) \rangle.$$

El resto sigue en forma análoga.

(ii) *Es inmediato.*

(iii) *Basta hacer* $D_{\circledast} = \mathfrak{h}_{\circledast}^{-1} \circ D$. *Como* $D_{\circledast}(Id_{\mathcal{U}}, Id_{\mathcal{U}}) = E$, *si* $D_{\circledast}$ *es isométrico entonces* $\|E\| = 1$. *Recíprocamente, si* $(L, R) \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ *tenemos*

$$\|D_{\circledast}(L, R)\| = \|L^{**}(E)\| \leq \|L^{**}\| = \|L\| \leq \|(L, R)\|.$$

Además si $\circledast = \square$, $x \in [\mathcal{U}]_1$ *y* $\lambda \in [\mathcal{U}^*]_1$ *escribimos*

$$\begin{aligned} \langle L(x), \lambda \rangle &= \langle x, L^*(\lambda) \rangle \\ &= \langle L^*(\lambda), \iota_{\mathcal{U}}(x) \rangle \\ &= \langle L^*(\lambda), E \square \iota_{\mathcal{U}}(x) \rangle \\ &= \langle x L^*(\lambda), E \rangle \\ &= \langle L^*(x\lambda), E \rangle \quad \textit{(pues L es centralizador a izquierda)} \\ &= \langle x\lambda, L^{**}(E) \rangle. \end{aligned} \tag{37}$$

Por (37) obtenemos

$$\|L\| = \sup_{x \in [U]_1} \|L(x)\| = \sup_{x \in [\mathcal{U}]_1} \sup_{\lambda \in [\mathcal{U}^*]_1} |\langle L(x), \lambda \rangle| \leq \|L^{**}(E)\|.$$

Análogamente $\|R\| \leq \|L^{**}(E)\|$ *y* $\|(L, R)\| \leq \|L^{**}(E)\|$ *y sigue la afirmación.*

Observación 8.5 *Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach y sea* $\mathcal{I}[\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}), \mathcal{U}^{**}]$ *el idealizador del álgebra* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ *en* $\mathcal{U}^{**}$, *o sea*

$$\mathcal{I}[\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) : \mathcal{U}^{**}] = \{\Phi \in \mathcal{U}^{**} : \Phi\mathcal{U} \cup \mathcal{U}\oplus \subseteq \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\}.$$

Dado $\Phi \in \mathcal{I}[\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}), \mathcal{U}^{**}]$ *sean* $\widetilde{L}_{\phi}$, $\widetilde{R}_{\Phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ *las aplicaciones*

$$\widetilde{L}_{\Phi} = \iota_{\mathcal{U}}^{-1} \circ L_{\Phi}^{\mathcal{U},\mathcal{U}^{**}} \circ \iota_{\mathcal{U}} \quad y \quad \widetilde{R}_{\Phi} = \iota_{\mathcal{U}}^{-1} \circ R_{\Phi}^{\mathcal{U},\mathcal{U}^{**}} \circ \iota_{\mathcal{U}}.$$

Con la notación del Teo. 2.22, si $x \in \mathcal{U}$ *y* $\lambda \in \mathcal{U}^*$ *se tiene*

$$\begin{aligned} \left\langle x, \overline{L}_{\Phi}(\lambda) \right\rangle &= \langle x, \Phi\lambda \rangle \\ &= \langle \lambda x, \Phi \rangle \\ &= \langle \lambda, x\Phi \rangle \\ &= \left\langle \lambda, \iota_{\mathcal{U}}(\widetilde{R}_{\Phi}(x)) \right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{R}_{\Phi}(x), \lambda \right\rangle \\ &= \left\langle x, (\widetilde{R}_{\Phi})^*(\lambda) \right\rangle, \end{aligned}$$

i.e. $(\widetilde{R}_\Phi)^* = \overline{L}_\Phi$. *Análogamente,* $(\widetilde{L}_\Phi)^* = \overline{R}_\Phi$. *Notando que el idealizador de* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ *en* $\mathcal{U}^{**}$ *es subálgebra cerrada de* $\mathcal{U}^{**}$ *queda definido un morfismo*

$$\theta : \mathcal{I}\left[\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}), \mathcal{U}^{**}\right] \to \mathcal{D}(\mathcal{U}),\ \theta(\Phi) = (\widetilde{L}_\Phi, \widetilde{R}_\Phi).$$

En efecto, si $x, y \in \mathcal{U}$ *vemos que*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}_\Phi(xy) = \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(\Phi(xy)) = \iota_{\mathcal{U}}^{-1}((\Phi x) y) = \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(\Phi x)\, \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(\iota_{\mathcal{U}}(y)) = \widetilde{L}_\Phi(x) y,\\
&\widetilde{R}_\Phi(xy) = \iota_{\mathcal{U}}^{-1}((xy)\Phi) = \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(x(y\Phi)) = \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(\iota_{\mathcal{U}}(x))\, \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(y\Phi) = x\widetilde{R}_\Phi(y),\\
&x\widetilde{L}_\Phi(y) = x\iota_{\mathcal{U}}^{-1}(\Phi y) = \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(x(\Phi y)) = \iota_{\mathcal{U}}^{-1}((x\Phi) y) = \iota_{\mathcal{U}}^{-1}((x\Phi)) y = \widetilde{R}_\Phi(x) y,
\end{aligned}$$

i.e. θ *está bien definida. Si además* $\Psi \in \mathcal{I}\left[\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}), \mathcal{U}^{**}\right]$ *y* $\circledast$ *es uno de los productos de Arens*

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}_{\Phi\circledast\Psi}(x) &= \iota_{\mathcal{U}}^{-1}((\Phi \circledast \Psi) x)\\
&= \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(\Phi \circledast (\Psi x))\\
&= \iota_{\mathcal{U}}^{-1}\left(\Phi \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(\Psi x)\right)\\
&= \widetilde{L}_\Phi\left(\iota_{\mathcal{U}}^{-1}(\Psi x)\right)\\
&= \left(\widetilde{L}_\Phi \circ \widetilde{L}_\Psi\right)(x),\\
\widetilde{R}_{\Phi\circledast\Psi}(x) &= \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(x(\Phi \circledast \Psi))\\
&= \iota_{\mathcal{U}}^{-1}((x\Phi) \circledast \Psi)\\
&= \iota_{\mathcal{U}}^{-1}\left(\iota_{\mathcal{U}}^{-1}(x\Phi)\Psi\right)\\
&= \widetilde{R}_\ominus\left(\iota_{\mathcal{U}}^{-1}(x\Phi)\right)\\
&= \left(\widetilde{R}_\Psi \circ \widetilde{R}_\Phi\right)(x),
\end{aligned}$$

i.e. θ *es un homomorfismo. Es* $\ker(\theta) = (\mathcal{U}^*\mathcal{U} + \mathcal{U}\mathcal{U}^*)^o$, *siendo este ideal nulo si* $\mathcal{U}^{**}$ *fuere unitaria respecto a algún producto de Arens. P. ej., si* E *fuera unidad de* $(\mathcal{U}^{**}, \square)$ *dados* $\Phi \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U} + \mathcal{U}\mathcal{U}^*)^o$ *y* $\lambda \in \mathcal{U}^*$ *entonces*

$$\langle \lambda, \Phi \rangle = \langle \lambda, E\square\Phi \rangle = \langle \Phi\lambda, E \rangle = \langle 0_{\mathcal{U}^*}, E \rangle = 0,$$

o sea $\Phi = 0$. *En caso que* $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ *fuera unitaria se razonará análogamente. Desde luego hay entonces una inmersión*

$$\frac{\mathcal{I}\left[\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}), \mathcal{U}^{**}\right]}{(\mathcal{U}^*\mathcal{U} + \mathcal{U}\mathcal{U}^*)^o} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{U}).$$

Finalmente, sea $\widetilde{\theta} = D \circ \theta$, *donde* D *es el morfismo introducido en el Teo. 8.1. Luego* $\widetilde{\theta} : \mathcal{I}\left[\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}), \mathcal{U}^{**}\right] \to \mathcal{D}(\mathcal{U}^{**})$ *cualquiera sea el producto de Arens que se considere y si* $\Phi \in \mathcal{I}\left[\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}), \mathcal{U}^{**}\right]$ *tenemos*

$$\widetilde{\theta}(\Phi) = ((\widetilde{L}_\Phi)^{**}, (\widetilde{R}_\Phi)^{**}) = ((\overline{R}_\Phi)^*, (\overline{L}_\Phi)^*) = \left(L_\Phi^\Diamond, R_\Phi^\square\right). \tag{38}$$

De (38), si $\Phi \in \mathcal{I}\left[\iota_{\mathcal{U}}\left(\mathcal{U}\right), \mathcal{U}^{**}\right]$ *y* $\Psi, \Theta \in \mathcal{U}^{**}$ *se tiene*

$$\begin{array}{ll} (a)\ \Psi\square\left(\Phi\lozenge\Theta\right)=\left(\Psi\square\Phi\right)\square\Theta, & (d)\ \Psi\lozenge\left(\Phi\lozenge\Theta\right)=\left(\Psi\square\Phi\right)\lozenge\Theta, \\ (b)\ \Phi\lozenge\left(\Psi\square\Theta\right)=\left(\Phi\lozenge\Psi\right)\square\Theta, & (e)\ \Phi\lozenge\left(\Psi\lozenge\Theta\right)=\left(\Phi\lozenge\Psi\right)\lozenge\Theta, \\ (c)\ \left(\Psi\square\Theta\right)\square\Phi=\Psi\square\left(\Theta\square\Phi\right), & (f)\ \left(\Psi\lozenge\Theta\right)\square\Phi=\Psi\lozenge\left(\Theta\square\Phi\right). \end{array} \tag{39}$$

Por supuesto, las identidades (39)(c) y (39)(e) siguen de la transitividad de los productos de Arens. Si $\lambda \in \mathcal{U}^*$ *se tiene*

$$\left\langle \lambda, \Psi\square\left(\Phi\lozenge\Theta\right)\right\rangle = \left\langle \left(\Phi\lozenge\Theta\right)\lambda, \Psi\right\rangle . \tag{40}$$

Además si $x \in \mathcal{U}$ *es*

$$\begin{aligned} \left\langle x, \left(\Phi\lozenge\Theta\right)\lambda\right\rangle &= \left\langle \lambda x, \Phi\lozenge\Theta\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\lambda x\right)\Phi, \Theta\right\rangle \\ &= \left\langle \lambda \widetilde{L}_{\Phi}\left(x\right), \Theta\right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{L}_{\Phi}(x), \Theta\lambda\right\rangle \\ &= \left\langle \Theta\lambda, x\Phi\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\Theta\lambda\right)x, \Phi\right\rangle \\ &= \left\langle x, \Phi\left(\Theta\lambda\right)\right\rangle , \end{aligned}$$

i.e. $\left(\Phi\lozenge\Theta\right)\lambda = \Phi\left(\Theta\lambda\right)$. *Ahora por (40) es*

$$\left\langle \lambda, \Psi\square\left(\Phi\lozenge\Theta\right)\right\rangle = \left\langle \Phi\left(\Theta\lambda\right), \Psi\right\rangle = \left\langle \Theta\lambda, \Psi\square\Phi\right\rangle = \left\langle \lambda, \left(\Psi\square\Phi\right)\square\Theta\right\rangle$$

y sigue 39(a). Las demás identidades siguen en forma análoga.

9. Con relación a C*-álgebras

9.1. Bidual de C*-álgebras y álgebras de Von Neumann

Teorema 9.1 *(cf. [123]) Sea*[21] $\mathcal{U}$ *una* C^**-álgebra unitaria. Hay un isomorfismo isométrico* $\mathcal{U}^{**} \approx VN\left(\mathcal{U}\right)$*, donde* $VN\left(\mathcal{U}\right) = \overline{\pi_u\left(\mathcal{U}\right)}^{wot}$ *es el álgebra envolvente de Von Neumann de* $\mathcal{U}$ *y* $\left(\pi_u, \mathcal{H}_u\right)$ *es la representación universal de* $\mathcal{U}$*.*[22]

[21] *Palabras clave:* Álgebras de Von Neumann. Álgebra envolvente de Von Neumann. Representación universal de C^*-álgebras. Estados. Espacio de estados. Operadores traza.

[22] O sea $\mathcal{H}_u = \sum \oplus_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})} \mathcal{H}_\varphi$ es espacio de Hilbert, $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ es el espacio de estados de $\mathcal{U}$ y $\pi_u : \mathcal{U} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$ es la representación fiel isométrica $\pi_u = \sum \oplus_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})} \pi_\varphi$, donde cada $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ es la representación de Gel´fand-Naimark inducida por cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$. V. el Teorema 13.35.

Demostración 9.2 *Hay un isomorfismo isométrico* $t : \mathcal{B}(\mathcal{H}_u) \to T(\mathcal{H}_u)^*$, $t(X)(T) = \operatorname{tr}(XT)$ *para* $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$ *y* $T \in T(\mathcal{H}_u)$, *donde* $T(\mathcal{H}_u)$ *es el espacio de Banach de operadores traza (cf. [111], Ch. VI.6). El conjunto*

$$^{\perp}t\left(VN\left(\mathcal{U}\right)\right) = \left\{X \in T(\mathcal{H}_u) : \operatorname{tr}\left(X \circ A\right) = 0 \ si \ A \in VN\left(\mathcal{U}\right)\right\} \tag{41}$$

es subespacio de Banach de $T(\mathcal{H}_u)$ *y resulta*

$$\left(T\left(\mathcal{H}_u\right)/^{\perp}t\left(VN\left(\mathcal{U}\right)\right)\right)^* \approx \left(^{\perp}t\left(VN\left(\mathcal{U}\right)\right)\right)^{\perp} = \overline{t\left(VN\left(\mathcal{U}\right)\right)}^{w^*} \tag{42}$$

(V. [116], Th. 4.7(b) y §4.8). Sea $\mathcal{T} = w^*\text{-}\lim_{i\in I} t(A_i)$ *en* $T(\mathcal{H}_u)^*$ *para cierta red* $\{A_i\}_{i\in I}$ *una red en* $VN(\mathcal{U})$. *Si* $x, y \in \mathcal{H}_u$ *es*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\left(x \odot y\right) &= \lim_{i\in I} t\left(A_i\right)\left(x \odot y\right) \\ &= \lim_{i\in I} \operatorname{tr}\left(A_i\left(x\right) \odot y\right) \\ &= \lim_{i\in I} \left\langle A_i\left(x\right), y\right\rangle . \end{aligned} \tag{43}$$

Además $y \to \overline{\mathcal{T}\left(x \odot y\right)}$ *es una forma lineal sobre* $\mathcal{H}_u$ *y*

$$\left|\mathcal{T}\left(x \odot y\right)\right| \leq \left\|\mathcal{T}\right\| \left\|x \odot y\right\|_{T(\mathcal{H}_u)} = \left\|\mathcal{T}\right\| \left\|x\right\| \left\|y\right\|$$

para cada $x \in \mathcal{H}_u$. *Por el teorema de representación de Riesz hay un único* $A(x) \in \mathcal{H}_u$ *tal que* $\overline{\mathcal{T}\left(x \odot y\right)} = \langle y, A(x)\rangle$ *y* $\|A(x)\| \leq \|\mathcal{T}\| \|x\|$. *Es fácil ver que* $A : \mathcal{H}_u \to \mathcal{H}_u$ *es lineal y concluímos que* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$. *Por (43) deducimos que* $A = wot\text{-}\lim_{i\in I} A_i$, *por lo que* $A \in VN(\mathcal{U})$ *y* $\mathcal{T} = t(A)$ *(cf. [92], Th. 1.3.10). Por (42) inferimos que*

$$\left(T\left(\mathcal{H}_u\right)/^{\perp}t\left(VN\left(\mathcal{U}\right)\right)\right)^* \approx t\left(VN\left(\mathcal{U}\right)\right). \tag{44}$$

Sea $q : T(\mathcal{H}_u) \to T(\mathcal{H}_u)/^{\perp}t(VN(\mathcal{U}))$ *la proyección al cociente. Definimos*

$$\begin{gathered} F : T\left(\mathcal{H}_u\right)/^{\perp}t\left(VN\left(\mathcal{U}\right)\right) \to \mathcal{U}^*, \\ F\left(\eta\right)\left(a\right) = \operatorname{tr}\left(\pi_u\left(a\right) \circ T\right) \ si \ q(T) = \eta \ y \ a \in \mathcal{U}. \end{gathered} \tag{45}$$

Si además $q(S) = \eta$ *será* $T - S = U$ *para cierto elemento* U *en* $^{\perp}t(VN(\mathcal{U}))$, *i.e.*

$$\operatorname{tr}\left(\pi_u\left(a\right) \circ T\right) = \operatorname{tr}\left(\pi_u\left(a\right) \circ S\right) + \operatorname{tr}\left(\pi_u(a) \circ U\right) = \operatorname{tr}\left(\pi_u\left(a\right) \circ S\right)$$

como sigue de (41). Así $F(\eta)$ *está bien definida, es lineal y*

$$\left|F\left(\eta\right)\left(a\right)\right| \leq \left\|\pi_u\left(a\right)\right\| \left\|T\right\|_{T(\mathcal{H}_u)} \leq \left\|a\right\| \left\|T\right\|_{T(\mathcal{H}_u)}.$$

Luego $|F(\eta)(a)| \leq \|a\| \|\eta\|$, $F(\eta) \in \mathcal{U}^*$ *y* $\|F(\eta)\| \leq \|\eta\|$, *resultando* F *acotada. Además* F *es isométrica; en efecto, dado* $v \in \left(T(\mathcal{H}_u)/^{\perp}t(VN(\mathcal{U}))\right)^*$ *unitario por (42) y (44) existe* $V \in [VN(\mathcal{U})]_1$ *tal que* $v \circ q = t(V)$. *Como* $\overline{\pi_u(\mathcal{U})}^{wot} = VN(\mathcal{U})$ *por el teorema de densidad de Kaplansky*

$$\overline{[\pi_u(\mathcal{U})]_1}^{wot} = [VN(\mathcal{U})]_1 .$$

Escribamos $V = wot\text{-}\mathrm{lím}_{j\in J}\, \pi_u(a_j)$ *para cierta red* $\{a_j\}_{j\in J}$ *de* $[\mathcal{U}]_1$. *Fijado* $T \in T(\mathcal{H}_u)$ *tal que* $q(T) = \eta$ *tenemos*

$$v(\eta) = v(q(T)) = t(V)(T) = \mathrm{tr}(VT). \tag{46}$$

Si $T = x \odot y$ *para ciertos* $x, y \in \mathcal{H}_u$ *por (46) es*

$$\begin{aligned} |v(\eta)| &= |\mathrm{tr}(V(x) \odot y)| \\ &= |\langle V(x), y\rangle| \\ &= \lim_{j\in J} |\langle \pi_u(a_j)(x), y\rangle| \\ &= \lim_{j\in J} |\mathrm{tr}(\pi_u(a_j) \circ T)| \\ &= \lim_{j\in J} |F(\eta)(a_j)| \\ &\leq \|F(\eta)\| . \end{aligned} \tag{47}$$

Si $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_u)$, *digamos* $T = \sum_{k=1}^n x_k \odot y_k$, *tenemos*

$$\begin{aligned} v(\eta) &= \mathrm{tr}\left(\sum_{k=1}^n V(x_k) \odot y_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \langle V(x_k), y_k\rangle \\ &= \lim_{j\in J} \sum_{k=1}^n \langle \pi_u(a_j)(x_k), y_k\rangle \\ &= \lim_{j\in J} \mathrm{tr}(\pi_u(a_j) \circ T) \end{aligned}$$

y como en (47) es $|v(\eta)| \leq \|F(\eta)\|$. *Sino hay una sucesión* $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ *en* $\mathcal{F}(\mathcal{H}_u)$ *tal que* $T_n \to T$ *en* $T(\mathcal{H}_u)$ *y si* $n \in \mathbb{N}$ *por (46) escribimos*

$$\begin{aligned} |v(\eta)| &\leq |\mathrm{tr}(V(T - T_n))| + |\mathrm{tr}(VT_n)| \\ &\leq \|V\| \|T - T_n\|_{T(\mathcal{H}_u)} + \|F(q(T_n))\| . \end{aligned} \tag{48}$$

Haciendo $n \to \infty$ en (48) es $|v(\eta)| \leq \|F(\eta)\|$ y $\|\eta\| \leq \|F(\eta)\|$ pues v es arbitrario. Por otra parte, F es suryectiva, para lo cual bastará probar que $\mathcal{S}(\mathcal{U}) \subseteq \operatorname{Im}(F)$. Para ello, con la notación del Teorema 13.35, si $\chi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ si $j_\chi : \mathcal{H}_\chi \hookrightarrow \mathcal{H}_u$, dado $a \in \mathcal{U}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\chi(a) &= \langle \pi_\chi(a)(e_\chi), e_\chi \rangle_\chi \\
&= \langle \pi_u(a)(j_\chi(e_\chi)), j_\chi(e_\chi) \rangle_{\mathcal{H}_u} \\
&= \operatorname{tr}[\pi_u(a) \circ (j_\chi(e_\chi) \odot j_\chi(e_\chi))] \\
&= F[q(j_\chi(e_\chi) \odot j_\chi(e_\chi))](a),
\end{aligned}$$

i.e. $\chi = F[q(j_\chi(e_\chi) \odot j_\chi(e_\chi))]$. En definitiva, mediante (45) F define un isomorfismo isométrico de espacios de Banach, de modo que

$$F^* : \mathcal{U}^{**} \to \left[T(\mathcal{H}_u) /^{\perp} t(VN(\mathcal{U}))\right]^*$$

es asimismo isomorfismo isométrico y la tesis sigue de (44).[23]

9.2. Arens regularidad de C*-álgebras

Proposición 9.3 [24]*(Cf. [120]) Toda C^*-álgebra $\mathcal{U}$ es Arens regular.*

Demostración 9.4 *Sea $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ el espacio de estados de $\mathcal{U}$. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ hay entonces una representación cíclica involutiva π_φ de $\mathcal{U}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\varphi$ con un vector cíclico f_φ (V. [21], §5, p. 248). Queda definida entonces la denominada representación universal $\pi_u \triangleq \sum_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})} \bigoplus \pi_\varphi$ de $\mathcal{U}$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_u \triangleq \sum_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})} \bigoplus \mathcal{H}_\varphi$, la cual es involutiva y fiel. Queda inducida una acción a izquierda de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{H}_u$, a saber: si $a \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathcal{H}_u$ escribimos $B(a,f) = \pi_u(a)(f)$. Con $E = \mathcal{U}$, $F = G = \mathcal{H}_u$ y con la notación de la Obs. 2.9 si $a \in \mathcal{U}$, $\lambda \in \mathcal{H}_u^*$ y $f \in \mathcal{H}_u$ tenemos*

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, B_3(\iota_{\mathcal{U}}(a), \iota_{\mathcal{H}_u}(f)) \rangle &= \langle a, B_2(\iota_{\mathcal{H}_u}(f), \lambda) \rangle \\
&= \langle B_1(\lambda, a), \iota_{\mathcal{H}_u}(f) \rangle \\
&= \langle f, B_1(\lambda, a) \rangle \\
&= \langle B(a,f), \lambda \rangle \\
&= \langle \lambda, \iota_{\mathcal{H}_u}(B(a,f)) \rangle,
\end{aligned}$$

[23] Notar que si $a \in \mathcal{U}$ y $T \in T(\mathcal{H}_u)$ resulta

$$F^*(\iota_{\mathcal{U}}(a))(q(T)) = F(q(T))(a) = \operatorname{tr}(\pi_u(a) \circ T) = t(\pi_u(a))(T),$$

i.e. $F^*(\iota_{\mathcal{U}}(a)) \circ q = t(\pi_u(a))$ en $T(\mathcal{H}_u)^*$.

[24] Por regularidad y dualidad de B^*-álgebras v. [126].

i.e.

$$B_3\left(\iota_{\mathcal{U}}(a), \iota_{\mathcal{H}_u}(f)\right) = \iota_{\mathcal{H}_u}\left(B(a,f)\right). \tag{49}$$

Queda bien definida la aplicación para $\Lambda \in \mathcal{U}^{**}$ *y* $f \in \mathcal{H}_u$:

$$\Pi : \mathcal{U}^{**} \to \mathcal{B}\left(\mathcal{H}_u^{**}\right), \tag{50}$$
$$\Pi(\Lambda)\left(\iota_{\mathcal{H}_u}(f)\right) = \Lambda \underset{B}{\square} \iota_{\mathcal{H}_u}(f) = \sigma\left(\mathcal{H}_u^{**}, \mathcal{H}_u^{*}\right)\text{-}\lim_{l \in L} \iota_{\mathcal{H}_u}\left(\pi_u(a_l)(f)\right),$$

donde $\{a_l\}_{l\in L}$ *es alguna red en* $\mathcal{U}$ *tal que* $\Lambda = \sigma\left(\mathcal{U}^{**}, \mathcal{U}^{*}\right)\text{-}\lim_{l\in L} \iota_{\mathcal{U}}(a_l)$. *Por (49) y (50) si* $a \in \mathcal{U}$ *y* $f \in \mathcal{H}_u$ *tenemos*

$$\Pi\left(\iota_{\mathcal{U}}(a)\right)\left(\iota_{\mathcal{H}_u}(f)\right) = \iota_{\mathcal{U}}(a) \underset{B}{\square} \iota_{\mathcal{H}_u}(f) = \iota_{\mathcal{H}_u}\left(\pi_u(a)(f)\right).$$

Ahora, si $f, g \in \mathcal{H}_u$ *indicamos* $\langle f, g^* \rangle \triangleq \langle f, g \rangle$ *si* $f \in \mathcal{H}_u$, *de modo que* $g^* \in \mathcal{H}_u^*$. *Como* $\{\pi_u(a_l)\}_{l\in L}$ *es acotado en* $\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$, *por el teorema de Banach-Alaoglu existen una subred* $\{\pi_u(a_l)\}_{l\in L_1}$ *y* $T_\Lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$ *tales que*

$$T_\Lambda = \sigma\left(\mathcal{B}(\mathcal{H}_u), \mathcal{N}(\mathcal{H}_u)\right)\text{-}\lim_{l\in L_1} \pi_u(a_l).$$

Así,

$$\begin{aligned} \langle f \odot g, T_\Lambda \rangle &= \lim_{l\in L_1} \langle f \odot g, \pi_u(a_l) \rangle \\ &= \lim_{l\in L_1} \operatorname{tr}\left[f \odot \left(\pi_u(a_l)^*(g)\right)\right] \\ &= \lim_{l\in L_1} \langle \pi_u(a_l)(f), g \rangle. \end{aligned} \tag{51}$$

En particular, por (51) deducimos que T_Λ *no depende de la subred* $\{\pi_u(a_l)\}_{l\in L_1}$. *Consideremos* $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$ *y sean* $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *y* $\{b_\beta\}_{\beta\in B}$ *redes acotadas en* $\mathcal{U}$ *tales que* $\Phi = w^*\text{-}\lim_{a\in A} \iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha)$ *y* $\Psi = w^*\text{-}\lim_{b\in B} \iota_{\mathcal{U}}(b_\beta)$. *Fijada* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$

tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi, \Phi \Box \Psi \rangle &= \lim_{\alpha\in A} \lim_{\beta\in B} \langle a_\alpha b_\beta, \varphi \rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A} \lim_{\beta\in B} \langle \pi_\varphi (a_\alpha b_\beta)(f_\varphi), f_\varphi \rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A} \lim_{\beta\in B} \langle \pi_\varphi (b_\beta)(f_\varphi), \pi_\varphi (a_\alpha^*)(f_\varphi) \rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A} \langle f_\varphi \odot \pi_u (a_\alpha^*)(f_\varphi), T_\Psi \rangle \\
&= \lim_{\alpha\in A} \operatorname{tr} \left[f_\varphi \odot T_\Psi^* (\pi_u (a_\alpha^*)(f_\varphi)) \right] \\
&= \lim_{\alpha\in A} \langle \pi_u (a_\alpha)(T_\Psi(f_\varphi)), f_\varphi \rangle \\
&= \langle T_\Psi(f_\varphi) \odot f_\varphi, T_\Phi \rangle \\
&= \operatorname{tr} \left[T_\Psi(f_\varphi) \odot T_\Phi^*(f_\varphi) \right] \\
&= \langle T_\Psi(f_\varphi), T_\Phi^*(f_\varphi) \rangle \\
&= \operatorname{tr} \left[f_\varphi \odot T_\Psi^* T_\Phi^*(f_\varphi) \right] \\
&= \langle f_\varphi \odot T_\Phi^*(f_\varphi), T_\Psi \rangle \\
&= \lim_{\beta\in B} \langle \pi_u (b_\beta)(f_\varphi), T_\Phi^*(f_\varphi) \rangle \\
&= \lim_{\beta\in B} \operatorname{tr} \left[\pi_u (b_\beta)(f_\varphi) \odot T_\Phi^*(f_\varphi) \right] \\
&= \lim_{\beta\in B} \langle \pi_u (b_\beta)(f_\varphi) \odot f_\varphi, T_\Phi \rangle \\
&= \lim_{\beta\in B} \lim_{\alpha\in A} \langle \pi_\varphi (a_\alpha b_\beta)(f_\varphi), f_\varphi \rangle \\
&= \lim_{\beta\in B} \lim_{\alpha\in A} \langle a_\alpha b_\beta, \varphi \rangle \\
&= \langle \varphi, \Phi \Diamond \Psi \rangle .
\end{aligned}
$$

La Arens-regularidad de $\mathcal{U}$ sigue ahora pues $\mathcal{U}^*$ es la cápsula lineal de $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ (V. [92], Corollary 2.3.24, p. 89).

10. Respecto a las álgebras $C_0(\Omega)$ y $\mathrm{M}(\Omega)$

Sea[25][26] Ω un espacio de Hausdorff localmente compacto y sea $\mathcal{U} = C_0(\Omega)$ el espacio de Banach usual de funciones continuas nulas en el infinito. Si Ω

[25] *Palabras clave:* Teorema de Gel´fand de estructura de álgebras de Banach abelianas. Espacio ideal maximal. Compactación de Alexandroff.

[26] Por álgebras de medidas y álgebras de operadores v. [108]. Respecto al bidual de espacios de funciones continuas y estructuras reticulares v. [81], [82] y [83]. Respecto a la estructura de álgebras de medidas v. [124], [125], [114]. Por regularidad, *regularidad local y puntual* en álgebras de medidas generales v. [87].

es compacto $\mathcal{U} = C(\Omega)$, en cuyo caso se trata de una C^*-álgebra abeliana unitaria. Por el *teorema de Gel´fand* hay un isomorfismo isométrico

$$\mathcal{U} \oplus \mathbb{C} \approx C(\Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}),$$

donde $\Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}$ es el espacio ideal maximal del álgebra unitizada de $\mathcal{U}$. Haciendo $\mathfrak{H}_\infty(f,a) = a$ para $(f,a) \in \mathcal{U}\oplus\mathbb{C}$ hay una biyección natural

$$\Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}} \sim \Phi_{\mathcal{U}} \cup \{\mathfrak{H}_\infty\}.$$

En particular, $\Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}$ es la compactación de Alexandroff de $\Phi_{\mathcal{U}}$. Se define entonces la transformada de Gel´fand $G_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}} : \mathcal{U} \oplus \mathbb{C} \to C(\Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}})$ de modo que para $(f,a) \in \mathcal{U}\oplus\mathbb{C}$ es

$$G_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}(f,a)(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}(f) + a \ \text{ si } \ \mathfrak{H} \in \Phi_{\mathcal{U}} \ \ y \ \ G_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}(f,a)(\mathfrak{H}_\infty) = a.$$

Como $\mathcal{U}$ es una C^*-álgebra, por la Prop. 9.3, resulta Arens regular. Asimismo, $\mathcal{U}$ tiene aproximación acotada de la unidad (V. [30], Th. I.4.8) y por el Corolario 12.29(ii) $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ es unitaria. Como además $\mathcal{U}$ es abeliana por la Prop. 2.7(vi) $\mathcal{U}^{**}$ es abeliana. Nuevamente, está definida la transformada de Gel´fand

$$G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)} : \mathcal{U}^{**} \to C\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right). \tag{52}$$

Tanto $G_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}$ como $G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}$ son isomorfismos $*$-isométricos de C^*-álgebras unitarias (cf. [21], Ch. VIII, §2. Th. 2.1) y los espacios $\Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}$ e $\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}$ son ambos compactos.

Proposición 10.1 **(i)** *La aplicación $\Phi_{\mathcal{U}} \to \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}$, $\mu \to \iota_{\mathbb{C}}^{-1} \circ \mu^{**}$ está bien definida.*

(ii) *Existe $A : \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)} \to \Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}$ función (w^*, w^*)-continua y suryectiva.*[27]

(iii) *Existe $w : \Omega \to \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}$ inyectiva.*

(iv) *$w(\Omega)$ es w^*-discreto.*

[27] Un *cubrimiento* de un espacio compacto Y es un par (X, f), donde X es espacio compacto y $f : X \to Y$ es función continua suryectiva. Por otra parte, un espacio compacto X se dice *hiper-stoneano* si $C(X)$ tiene algún predual. En particular, $\left(\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}, A\right)$ da un cubrimiento hiper-stoneano de $\Phi_{C_0(\Omega)\oplus\mathbb{C}}$. P. ej. si $f \in C_b(\mathbb{N})$ hay una extensión continua $f^\beta : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ de f a la compactación de Stone-Čech de f tal que $f^\beta(\delta(n)) = f(n)$, donde $\delta(n) \in \Phi_{C_b(\mathbb{N})}$ es el homomorfismo $\delta(n)(g) = g(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (V. [21], Ch. V, Prop. 6.2). Considerando $\mathbb{N}$ con la topología discreta $C_b(\mathbb{N}) = l^\infty(\mathbb{N})$ y queda inducido un isomorfismo $l^1(\mathbb{N})^* \approx C(\beta\mathbb{N})$, por lo que $\beta\mathbb{N}$ es espacio hiper-stoneano.

(v) *Hay un homeomorfismo* $\delta : \Omega \to \Phi_{\mathcal{U}}$*, vía la correspondencia* $x \to \delta_x$ *entre puntos de* Ω *y los homomorfismos* $\delta_x : f \to f(x)$*,* $f \in \mathcal{U}$*.*

(vi) w^{-1} *es continua.*

(vii) *Dados* $\mathfrak{H} \in \Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}} - \{\mathfrak{H}_\infty\}$ *y* $m \in \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}$*,* $A(m) = \mathfrak{H}$ *si y solo si*

$$m\mid_{\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})} = w(\delta^{-1}(m \circ \iota_{\mathcal{U}})) = \mathfrak{H} \circ j,$$

donde $j : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}\oplus\mathbb{C}$ *denota la inmersión natural. Luego*

$$A^{-1}(\{\mathfrak{H}\}) = \left\{m \in \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)} : m\mid_{\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})} = w\left(\delta^{-1}(\mathfrak{H} \circ j)\right)\right\}.$$

(viii) *Si* $m \in \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}$*,* $A(m) = \mathfrak{H}_\infty$ *si y solo si* $m\mid_{\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})} = 0_{\mathbb{C}}$*. Luego*

$$A^{-1}(\{\mathfrak{H}_\infty\}) = \left\{m \in \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)} : m\mid_{\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})} = 0_{\mathcal{U}^{**},\mathbb{C}}\right\}.$$

(ix) *Si* $f \in \mathcal{U}$ *y* $m \in \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}$ *resulta*

$$G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}(\iota_{\mathcal{U}}(f))(m) = \begin{cases} f(\delta^{-1}(A(m))) & si \quad A(m) \in \Phi_{\mathcal{U}}, \\ 0 & si \quad A(m) = \mathfrak{H}_\infty. \end{cases}$$

(x) $A\mid_{w(\Omega)} \in (w^*, \tau_\infty)$*, donde* τ_∞ *es la topología de la compactación de Alexandroff* Ω_∞ *de* Ω*, considerando que* $\Omega_\infty \approx \Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}$*.*

Demostración 10.2 **(i)** *Si* $\mu \in \Phi_{\mathcal{U}}$ *bastará ver que*

$$\mu^{**}(p\Box q) = \mu^{**}(p)\,\Box\mu^{**}(q) \tag{53}$$

si $p, q \in \mathcal{U}^{**}$*. Dados* $z, w \in \mathbb{C}$*,* $z^* \in \mathbb{C}^*$ *y* $f, g \in \mathcal{U}$ *arbitrarios tenemos*

$$\begin{aligned} \langle z^*, \mu^{**}(p\Box q)\rangle &= \langle \mu^*(z^*), p\Box q\rangle \\ &= \langle q\mu^*(z^*), p\rangle. \end{aligned} \tag{54}$$

Además $q\mu^*(z^*) \in \mathcal{U}^*$*,*

$$\langle f, q\mu^*(z^*)\rangle = \langle \mu^*(z^*) f, q\rangle \tag{55}$$

y

$$\begin{aligned} \langle g, \mu^*(z^*) f\rangle &= \langle fg, \mu^*(z^*)\rangle \\ &= \langle \mu(fg), z^*\rangle \\ &= \langle \mu(f)\mu(g), z^*\rangle \\ &= \langle g, \mu(f)\mu^*(z^*)\rangle, \end{aligned}$$

i.e.

$$\mu^*(z^*) f = \mu(f) \mu^*(z^*) . \tag{56}$$

Por (56) y (55)

$$\langle f, q\mu^*(z^*) \rangle = \langle \mu(f) \mu^*(z^*), q \rangle = \langle f, \langle \mu^*(z^*), q \rangle \mu \rangle ,$$

o sea

$$q\mu^*(z^*) = \langle \mu^*(z^*), q \rangle \mu. \tag{57}$$

Por (57) en (54) resulta

$$\langle z^*, \mu^{**}(p\Box q) \rangle = \langle \mu^*(z^*), q \rangle \langle \mu, p \rangle . \tag{58}$$

Además $\mu^*(z^*) \in \mathcal{U}^*$ *y* $\mu^*(z^*) = z^*\mu$ *pues* $z^* \equiv z^* Id_{\mathbb{C}}$. *Por (58) sigue que*

$$z^* \langle Id_{\mathbb{C}^*}, \mu^{**}(p\Box q) \rangle = z^* \langle \mu, p \rangle \langle \mu, q \rangle . \tag{59}$$

Por otra parte,

$$\langle z, \mu^{**}(q) z^* \rangle = \langle \mu^*(z^* z), q \rangle \tag{60}$$

y $\mu^*(z^* z) = z z^* \mu$ *porque*

$$\langle f, \mu^*(z^* z) \rangle = \langle z\mu(f), z^* \rangle = \langle f, z z^* \mu \rangle .$$

Luego por (60) es

$$\langle z, \mu^{**}(q) z^* \rangle = \langle z^* \mu, q \rangle z,$$

o bien

$$\mu^{**}(q) z^* = \langle z^* \mu, q \rangle Id_{\mathbb{C}}. \tag{61}$$

Así

$$\begin{aligned} \langle z^*, \mu^{**}(p) \Box \mu^{**}(q) \rangle &= \langle \mu^{**}(q) z^*, \mu^{**}(p) \rangle \\ &= \langle z^* \mu, q \rangle \langle Id_{\mathbb{C}}, \mu^{**}(p) \rangle \\ &= z^* \langle \mu, p \rangle \langle \mu, q \rangle . \end{aligned} \tag{62}$$

De (59) y (62) inferimos (53).

(ii) *Para* $(f, a) \in \mathcal{U} \oplus \mathbb{C}$ *y* $m \in \Phi_{(\mathcal{U}^{**}, \Box)}$ *sea*

$$A(m)(f, a) \triangleq \langle m, G_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}(\iota_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}(f, a)) \rangle . \tag{63}$$

Si E *es la identidad de* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *por (63) tenemos*

$$A(m)(f, a) = \langle \iota_{\mathcal{U}}(f) + aE, m \rangle = \langle \iota_{\mathcal{U}}(f), m \rangle + a. \tag{64}$$

Si además $(g,b) \in \mathcal{U}\oplus\mathbb{C}$ *tenemos*

$$\begin{aligned} A(m)(fh+ag+bf,ab) &= \langle \iota_{\mathcal{U}}(fg)+ag+bf), m\rangle + ab \\ &= \langle \iota_{\mathcal{U}}(f)\square\iota_{\mathcal{U}}(g)+ag+bf), m\rangle + ab \\ &= (\langle \iota_{\mathcal{U}}(f), m\rangle + a)(\langle \iota_{\mathcal{U}}(g), m\rangle + b) \end{aligned}$$

pues m *es un homomorfismo. Claramente* $A(m)$ *es homomorfismo y* A *está bien definida.* A *es continua, pues si* $m = w^*\text{-lím}_{i\in I}\, m_i$ *en* $\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}$ *y* $(f,a) \in \mathcal{U}\oplus\mathbb{C}$ *por (64) tenemos*

$$A(m)(f,a) = \lim_{i\in I}(\langle \iota_{\mathcal{U}}(f), m_i\rangle + a) = \lim_{i\in I} A(m_i)(f,a).$$

Si $\mathfrak{H} \in \Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}}$, $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{H}_\infty$, $m = \iota_{\mathbb{C}}^{-1} \circ (\mathfrak{H} \circ j)^{**}$. *Por (i)* $m \in \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}$ *y ciertamente* $A(m) = \mathfrak{H}$. *Veamos ahora que* $\mathfrak{H}_\infty \in \operatorname{Im}(A)$. *En efecto,* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \oplus \mathbb{C}E$ *es* C^**-subálgebra abeliana unitaria de* $(\mathcal{U}^{**},\square)$ *y contiene un homomorfismo nulo sobre* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$. *Así la familia* $\mathcal{F}$ *de pares* $(\mathcal{A},\chi)$, *formada por* C^**-subálgebras abelianas* $\mathcal{A}$ *que contienen a* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \oplus \mathbb{C}E$ *y poséen algún homomorfismo nulo* χ *sobre* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$, *es no vacía. Esta familia está parcialmente ordenada si para* $(\mathcal{A}_1,\chi_1)$ *y* $(\mathcal{A}_2,\chi_2)$ *en* $\mathcal{F}$ *escribimos* $(\mathcal{A}_1,\chi_1) \le (\mathcal{A}_2,\chi_2)$ *si y solo si* $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ *y* $\chi_2 \mid_{\mathcal{A}_1} = \chi_1$. *Una aplicación directa del lema de Zorn da lugar a la existencia de un elemento maximal* $(\mathcal{A}_\infty, m_\infty)$ *de* $\mathcal{F}$. *Es fácil ver que* $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{U}^{**}$ *y que* $A(m_\infty) = \mathfrak{H}_\infty$.

(iii) *Hagamos* $w(x) \triangleq \iota_{\mathcal{U}^*}(\delta_x)$, $x \in \Omega$. *Dados* $L, M \in \mathcal{U}^{**}$, $x \in \Omega$, $f, g \in \mathcal{U}$ *arbitrarios tenemos* $\delta_x f = f(x)\,\delta_x$ *ya que*

$$\langle g, \delta_x f\rangle = \langle fg, \delta_x\rangle = f(x)\, g(x) = \langle g, f(x)\rangle\, \delta_x.$$

Así $M\delta_x = \langle \delta_x, M\rangle\, \delta_x$ *pues*

$$\langle f, M\delta_x\rangle = \langle \delta_x f, M\rangle = f(x)\langle \delta_x, M\rangle = \langle f, \langle \delta_x, M\rangle\, \delta_x\rangle.$$

Luego

$$\begin{aligned} w(x)(L\square M) &= \langle \delta_x, L\square M\rangle \\ &= \langle M\delta_x, L\rangle \\ &= \langle \delta_x, L\rangle \langle \delta_x, M\rangle \\ &= w(x)(L)\, w(x)(M) \end{aligned}$$

y claramente w *está bien definida. Como* Ω *es localmente compacto y separado* $\mathcal{U}$ *separa puntos de* Ω, *por lo que* w *es inyectiva.*

(iv) *Si $y \in \Omega$ sea $P_y \in \mathcal{U}^{**}$ tal que $P_y(\mu) = \mu(\{y\})$. Si $x, y \in \Omega$ vemos que*

$$w(x)(P_y) = \langle P_y, \iota_{\mathcal{U}^*}(\delta_x) \rangle = P_y(\delta_x) = \delta_x(\{y\}) = \delta_{x,y}.$$

Así $\{w(x)\}$ resulta w^*-abierto en $w(\Omega)$ pues

$$\{w(x)\} = \{Q \in w(\Omega) : |\langle P_x, Q - w(x) \rangle| < 1\}.$$

(v) *La continuidad de δ es inmediata. Si $x \neq y$ en Ω, $y \in \Omega - \{x\}$ y $\Omega - \{x\}$ es abierto pues $\Omega \in T_1$. Como Ω es localmente compacto hay un abierto relativamente compacto U tal que $y \in U$ y $\overline{U} \subseteq \Omega - \{x\}$ (V. [115], Th. 2.7). Por el lema de Urysohn existe $f \in C_b(\Omega)$ tal que $f(y) = 1$ y $\mathrm{sop}(f) \subseteq U$. Deducimos entonces que f tiene soporte compacto pues $\overline{\mathrm{sop}(f)} \subseteq \overline{U}$. Luego $f \in \mathcal{U}$ y $f(x) \neq f(y)$ pues $f(x) = 0$. Así como $\langle f, \delta_x \rangle \neq \langle f, \delta_y \rangle$ sigue que $\delta_x \neq \delta_y$ y δ es inyectiva. Sea ahora $V \subseteq \Omega$ abierto y sea $z \in V$. Nuevamente, existen W entorno relativamente compacto de z tal que $\overline{W} \subseteq V$ y $g \in C_b(\Omega)$, con $g(z) = 1$ y $\mathrm{sop}(g) \subseteq W$. Como antes $g \in \mathcal{U}$ y además $\delta(z) \in \delta(V) \cap \Theta$, con $\Theta = \{\mu \in \mathcal{U}^* : \langle g, \mu \rangle > 0\}$. Pero Θ es w^*-abierto ya que si $\mu_0 \in \Theta$ entonces*

$$\{\mu \in \mathcal{U}^* : |\langle g, \mu - \mu_0 \rangle| < \langle g, \mu_0 \rangle / 2\} \subseteq \Theta.$$

Así $\delta(V)$ es w^*-abierto y $\delta : \Omega \to \delta(\Omega)$ deviene homeomorfismo. Finalmente, sea $\varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$ y veamos que $\varphi \in \mathrm{Im}(\delta)$. Escribiremos

$$\Omega_\varphi \triangleq \{z \in \Omega : h(z) = 0 \text{ si } h \in \ker(\varphi)\},$$
$$\mathcal{I}_\varphi \triangleq \{h \in \mathcal{U} : h(z) = 0 \text{ si } z \in \Omega_\varphi\}.$$

Entonces Ω_φ es subconjunto cerrado de Ω e $\mathcal{I}_\varphi$ es ideal cerrado de $\mathcal{U}$. Si $h \in \ker(\varphi)$ dado $z \in \Omega_\varphi$ es $h(z) = 0$, o sea $h \in \mathcal{I}_\varphi$. Así $\ker(\varphi) \subseteq \mathcal{I}_\varphi$. Sea $k \in C_{00}(\Omega)$ tal que $\mathrm{sop}(k) \cap \Omega_\varphi = \varnothing$. Si $z \in \mathrm{sop}(k)$ existe $h_z \in \ker(\varphi)$ tal que $h_z(z) \neq 0$. Luego $|h_z|^2 \in \ker(\varphi)$ porque φ es un homomorfismo y $|h_z(z)|^2 > 0$. Como $\mathrm{sop}(k)$ es compacto existe $F \in \mathcal{P}_f(\mathrm{sop}(k))$ tal que $\mathrm{sop}(k) \subseteq \cup_{z \in F} \{|h_z|^2 > 0\}$. Si $h \triangleq \sum_{z \in F} |h_z|^2$ vemos que $h \in \ker(\varphi)$ y $h\,|_{\mathrm{sop}(k)} > 0$. Ahora, si $k/h \triangleq l$ sigue que $l \in C_{00}(\Omega)$ está bien definida y $k = hl$. Como $\ker(\varphi)$ es un ideal $k \in \ker(\varphi)$. Deducimos entonces que $\ker(\varphi)$ contiene a la clase J de funciones continuas con soporte compacto sobre Ω cuyo soporte es disjunto con Ω_φ. Luego $J^- \subseteq \ker(\varphi)$ y como $J \subseteq \mathcal{I}_\varphi$ concluiremos que $\ker(\varphi) = \mathcal{I}_\varphi$ al demostrar que J es denso en $\mathcal{I}_\varphi$. Precisamente, dados $h_0 \in \mathcal{I}_\varphi$ y $\varepsilon > 0$ el conjunto $C = \{z \in \Omega : |h_0(z)| \geq \varepsilon\}$ es compacto *y disjunto con Ω_φ. Como antes existe un subconjunto Z de Ω abierto relativamente compacto tal que*

$$C \subseteq Z \subseteq Z^- \subseteq \Omega - \Omega_\varphi.$$

Por el lema de Urysohn existe $k_0 \in C(\Omega,[0,1])$ tal que $k_0 \mid_C = 1$ y $\mathrm{sop}(k_0) \subseteq Z$*. Podemos concluir que $\|h_0 - h_0 k_0\|_\infty \leq \varepsilon$ y $h_0 k_0 \in J$. Más aún, $\Omega_\varphi \neq \varnothing$ ya que es claro ahora que $\mathcal{I}_\varphi \neq \mathcal{U}$. Por otra parte, existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $\varphi(u) = 1$ porque φ es suryectiva, y así $(1-u)\mathcal{U} \subseteq \mathcal{I}_\varphi$. Como Ω es localmente compacto si $z \in \Omega_\varphi$ existe $v \in \mathcal{U}$ tal que $v(z) = 1$ y como $v - uv \in \mathcal{I}_\varphi$ entonces $u(z) = 1$. Siendo $\Omega_\varphi \subseteq \{z \in \Omega : |u(z)| \geq 1\}$ y $u \in C_0(\Omega)$ entonces Ω_φ es compacto. Finalmente, Ω_φ no podría tener más que un solo punto por el carácter maximal de* $\ker(\varphi)$*. En efecto, si Ω_φ tuviere al menos dos puntos distintos x_1 y x_2, como $\mathcal{U}$ separa puntos de Ω es*

$$\mathcal{I}_\varphi \subseteq \{h \in \mathcal{U} : h(x_1) = h(x_2) = 0\} \subsetneq \{h \in \mathcal{U} : h(x_1) = 0\}.$$

(vi) *Tenemos que $w^{-1} = \delta^{-1} \circ j^* \circ A \mid_{w(\Omega)}$. Además $A \in (w^*, w^*)$ por (i), $h^* \in (w^*, w^*)$ pues j es acotada y δ^{-1} es continua por (iv).*

(vii) *Sea $\mathfrak{H} \in \Phi_{\mathcal{U}\oplus\mathbb{C}} - \{\mathfrak{H}_\infty\}$ y $m \in A^{-1}(\{\mathfrak{H}\})$. Entonces $m \circ \iota_{\mathcal{U}} \in \Phi_{\mathcal{U}}$ y por (v) está definido $x = \delta^{-1}(m \circ \iota_{\mathcal{U}})$ en Ω. Si $f \in \mathcal{U}$ tenemos*

$$\begin{aligned} w(x)(\iota_{\mathcal{U}}(f)) &= \langle \iota_{\mathcal{U}}(f), \iota_{\mathcal{U}^*}(\delta(x))\rangle \\ &= \langle \delta(x), \iota_{\mathcal{U}}(f)\rangle \\ &= \langle f, m \circ \iota_{\mathcal{U}}\rangle \\ &= m(\iota_{\mathcal{U}}(f)). \end{aligned}$$

Que $m \mid_{\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})} = \mathfrak{H} \circ j$ es inmediato, así como la afirmación recíproca.

(viii) *Es trivial.*

(ix) *Sigue de (v), (vii) y (viii).*

(x) *Por (v) es $\widetilde{\delta} : \Omega \hookrightarrow \Omega_\infty$ si hacemos $\widetilde{\delta}(x)(f,a) = f(x) + a$, con $x \in \Omega$ y $(f,a) \in \mathcal{U}\oplus\mathbb{C}$. Como $A \circ w = \widetilde{\delta}$ sigue que $A \mid_{w(\Omega)} = \widetilde{\delta} \circ w^{-1}$ y por (vi) sigue la afirmación.*

10.1. Sobre $\mathrm{M}\left(\Phi_{\left(C_0(\Omega)^{**},\square\right)}\right)$.

Proposición 10.3 *En las condiciones de la Prop. 10.1:*

(i) $\mathcal{U}^* = \mathrm{M}(\Omega)$ y $\mathcal{U}^{***} \approx M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)$.

(ii) $\mathrm{M}(\Omega) \approx M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right) / \left[G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\right)\right]^o$.

(iii) $M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right) = \left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)^* \left[\iota_{\mathrm{M}(\Omega)}\left(\mathrm{M}(\Omega)\right)\right] \oplus \left[G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\right)\right]^o$.

(iv) Sea $B : M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right) \to \mathrm{M}(\Omega)$, $B = \left(G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)} \circ \iota_{\mathcal{U}}\right)^*$. Si $f \in \mathcal{U}$ y $\widetilde{\mu} \in M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)$ se tiene

$$\int_\Omega f(x)\, dB(\widetilde{\mu})(x) = \int_{\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}} m\left(\iota_{\mathcal{U}}(f)\right) d\widetilde{\mu}(m).$$

(v) Si $x \in \Omega$, $B^{-1}(\{\delta_x\}) = \left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)^* (w(x)) + \left[G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\right)\right]^o$.

(vi) Si $\widetilde{\delta} : \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)} \hookrightarrow M\left((\mathcal{U}^{**},\Box)\right)$, $B\,|_{\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}} : \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)} \hookrightarrow \Omega$ y $B \circ \widetilde{\delta} = j^* \circ A$.

(vii) Si $\widetilde{\mu} \in M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)$ y K es subconjunto compacto de Ω entonces

$$B(\widetilde{\mu})(K) = \widetilde{\mu}\left((B \circ \widetilde{\delta})^{-1}\left(\delta(K)\right)\right). \tag{65}$$

(viii) La relación (65) es válida si K es subconjunto de Borel de Ω.

Demostración 10.4 **(i)** *La primer afirmación sigue del teorema de F. Riesz (cf. [113]; [115], Th. 2.14). Además la transformada de Gel´fand (52) define un isomorfismo isométrico de C^*-álgebras abelianas unitarias y basta considerar nuevamente el teorema de F. Riesz.*

(ii) *Tenemos $M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right) = C\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)^*$, $\mathcal{U}^{***} = \mathrm{M}(\Omega)^{**}$ y*

$$M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right) \xrightarrow{\left(G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)^*} \mathrm{M}(\Omega)^{**} \xrightarrow{(\iota_{\mathcal{U}})^*} \mathrm{M}(\Omega). \tag{66}$$

Además $(\iota_{\mathcal{U}})^*$ es suryectiva: Sea $\upsilon \in \mathrm{M}(\Omega)$. Es inmediato que, por el teorema de Banach-Hahn, la aplicación $\upsilon \circ (\iota_{\mathcal{U}})^{-1} : \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \to \mathbb{C}$ admite una extensión a una aplicación $\widetilde{\upsilon} \in \mathrm{M}(\Omega)^{**}$ y entonces

$$(\iota_{\mathcal{U}})^*(\widetilde{\upsilon}) = \widetilde{\upsilon} \circ \iota_{\mathcal{U}} = \left(\upsilon \circ (\iota_{\mathcal{U}})^{-1}\right) \circ \iota_{\mathcal{U}} = \upsilon.$$

Por otra parte $\left(G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)^*$ es un isomorfismo y

$$\ker\left[(\iota_{\mathcal{U}})^* \circ \left(G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)^*\right] = \left[G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\right)\right]^o$$

y podemos concluir (ii).

(iii) *Si* $\widetilde{\mu} \in M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)$ *sea*

$$\widetilde{\widetilde{\mu}} = \left[\left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*} \circ \iota_{\mathcal{U}^{*}} \circ \left(\iota_{\mathcal{U}}\right)^{*} \circ \left(G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*}\right](\widetilde{\mu}).$$

Entonces $\widetilde{\widetilde{\mu}} \in M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)$ *y si* $f \in \mathcal{U}$ *tenemos*

$$\begin{aligned}\left\langle G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(f)\right), \widetilde{\widetilde{\mu}}\right\rangle &= \left\langle \iota_{\mathcal{U}}(f), \left(\iota_{\mathcal{U}^{*}} \circ \left(\iota_{\mathcal{U}}\right)^{*} \circ \left(G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*}\right)(\widetilde{\mu})\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\left(\iota_{\mathcal{U}}\right)^{*} \circ \left(G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*}\right)(\widetilde{\mu}), \iota_{\mathcal{U}}(f)\right\rangle \\ &= \left\langle f, \left(\left(\iota_{\mathcal{U}}\right)^{*} \circ \left(G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*}\right)(\widetilde{\mu})\right\rangle \\ &= \left\langle \iota_{\mathcal{U}}(f), \left(G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*}(\widetilde{\mu})\right\rangle \\ &= \left\langle G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(f)\right), \widetilde{\mu}\right\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\widetilde{\mu} - \widetilde{\widetilde{\mu}} \in \left[G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\right)\right]^{o}$. *Podemos inferir que*

$$M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right) = \left[G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\right)\right]^{o} + \left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*}\left[\iota_{\mathrm{M}(\Omega)}\left(\mathrm{M}(\Omega)\right)\right].$$

Si $\left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*}\left[\iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu)\right] \in \left[G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\right)\right]^{o}$ *para cierta* $\mu \in \mathrm{M}(\Omega)$ *dada* $g \in \mathcal{U}$ *es*

$$\begin{aligned}0 &= \left\langle G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(g)\right), \left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*}\left[\iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu)\right]\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\iota_{\mathcal{U}}\right)(g), \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu)\right\rangle \\ &= \langle g, \mu\rangle\end{aligned}$$

y por ello $\mu = 0$.

(iv) *Si* $f \in \mathcal{U}$ *y* $\widetilde{\mu} \in M\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)$ *escribimos*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x)\, dB(\widetilde{\mu})(x) &= \langle f, B(\widetilde{\mu})\rangle \\ &= \left\langle G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(f)\right), \widetilde{\mu}\right\rangle \\ &= \int_{\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}} m\left(\iota_{\mathcal{U}}(f)\right) d\widetilde{\mu}(m).\end{aligned}$$

(v) *Si* $x \in \Omega$ *y* $\widetilde{\mu}^{o} \in \left[G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\left(\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\right)\right]^{o}$ *entonces*

$$\begin{aligned}B\left(\left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*}(w(x)) + \widetilde{\mu}^{o}\right) &= \left[\left(G_{(\mathcal{U}^{**},\square)} \circ \iota_{\mathcal{U}}\right)^{*} \circ \left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^{*}\right](w(x)) \\ &= \left(\iota_{\mathcal{U}}\right)^{*}(w(x)) \\ &= \delta_{x}.\end{aligned}$$

Si $B(\widetilde{\mu}) = \delta_x$ *sea* $\widetilde{\mu} = \left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^* \left(\iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu)\right) + \widetilde{\mu}_o$, *con* $\mu \in \mathrm{M}(\Omega)$ *y* $\widetilde{\mu}_o \in \left[G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}(\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}))\right]^o$. *Dado* $f \in \mathcal{U}$ *tenemos*

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle f, B(\widetilde{\mu})\rangle \\ &= \left\langle G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}(\iota_{\mathcal{U}}(f)), \widetilde{\mu}\right\rangle \\ &= \left\langle \iota_{\mathcal{U}}(f), \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu)\right\rangle \\ &= \langle f, \mu\rangle, \end{aligned}$$

i.e. $\mu = \delta_x$ *y sigue la afirmación.*

(vi) *Si* $f \in \mathcal{U}$ *y* $m \in \Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}$ *resulta*

$$\begin{aligned} \left\langle f, B\left(\widetilde{\delta}_m\right)\right\rangle &= \left\langle G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}(\iota_{\mathcal{U}}(f)), \widetilde{\delta}_m\right\rangle \\ &= \langle \iota_{\mathcal{U}}(f), m\rangle \\ &= A(m)(j(f)) \\ &= \langle f, j^*(A(m))\rangle. \end{aligned}$$

Como claramente $j^*(A(m)) \in \Phi_{\mathcal{U}}$ *basta aplicar la Prop. 10.1(v).*

(vii) *Notemos que* $(B \circ \widetilde{\delta})^{-1}(\delta(K))$ *es subconjunto compacto de* $\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}$. *Si* $f \in \mathcal{U}$ *y* $F = G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}(\iota_{\mathcal{U}}(f))$ *entonces* $F \in C\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)$. *Dado* $m \in (B \circ \widetilde{\delta})^{-1}(\delta(K))$, $\left(B \circ \widetilde{\delta}\right)(m) = \delta_x$ *para un único* $x \in K$. *Por (v) podemos escribir*

$$\widetilde{\delta}_m = \left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right)^*(w(x)) + \widetilde{\mu}_o$$

para un único $\widetilde{\mu}_o \in \left[G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}(\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}))\right]^o$. *Luego*

$$F(m) = \left\langle G_{(\mathcal{U}^{**},\square)}(\iota_{\mathcal{U}}(f)), \widetilde{\delta}_m\right\rangle = \langle \iota_{\mathcal{U}}(f), w(x)\rangle = f(x). \tag{67}$$

De (67) vemos que $f|_K \equiv 1$ *si y solo si* $F|_{(B\circ\widetilde{\delta})^{-1}(\delta(K))} \equiv 1$. *Por (iv) tenemos*

$$\begin{aligned} B(\widetilde{\mu})(K) &= \inf_{f\in\mathcal{U}: f|_K\equiv 1} \int_\Omega f(x)\, dB(\widetilde{\mu})(x) \\ &= \inf_{f\in\mathcal{U}: f|_K\equiv 1} \int_{\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}} m(\iota_{\mathcal{U}}(f))\, d\widetilde{\mu}(m) \\ &= \inf_{F\in C\left(\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}\right): (B\circ\widetilde{\delta})^{-1}(\delta(K))\equiv 1} \int_{\Phi_{(\mathcal{U}^{**},\square)}} F(m)\, d\widetilde{\mu}(m) \\ &= \widetilde{\mu}\left((B\circ\widetilde{\delta})^{-1}(\delta(K))\right), \end{aligned}$$

(V. [115], Th. 2.14, p. 44).

(viii) *Sea $\Sigma_c(\Omega)$ la σ-álgebra de partes de Ω generada por la familia de partes compactas. Si U es abierto en Ω y $x \in U$, como Ω es espacio localmente compacto existe un entorno relativamente V de x tal que $V^- \subseteq U$. Pero $V = V^- - (V^- - V)$ y como Ω es espacio de Hausdorff y $V^- - V$ es cerrado en V^-, que es compacto, $V^- - V$ deviene compacto. Luego $V \in \Sigma_c(\Omega)$ y en consecuencia $\Sigma_c(\Omega)$ coincide con la σ-álgebra de Borel de Ω. Por otra parte, la clase de partes K de Ω que verifícan (65) contiene a las partes compactas de Ω y es una σ-álgebra, de donde sigue la afirmación.*

10.2. Isomorfismos entre espacios de medidas

Proposición 10.5 *Sea $T : \mathrm{M}(\Omega_1) \to \mathrm{M}(\Omega_2)$ un epimorfismo $*$-isométrico tal que $T(\lambda)(\Omega_2) = \lambda(\Omega_1)$ para todo $\lambda \in \mathrm{M}(\Omega_1)$, con Ω_1, Ω_2 espacios de Hausdorff compactos. Entonces:*

(i) $T^* : C\left[\Phi_{(C(\Omega_2)^{**},\Box)}\right] \to C\left[\Phi_{(C(\Omega_1)^{**},\Box)}\right]$ es isomorfismo $*$-isométrico unitario.

(ii) Hay un homeomorfismo $\tau : \Phi_{(C(\Omega_1)^{**},\Box)} \to \Phi_{(C(\Omega_2)^{**},\Box)}$ y si $N \in C(\Omega_2)^{**}$ resulta

$$T^*(N) = \left[G_{(C(\Omega_1)^{**},\Box)}\right]^{-1}\left(G_{(C(\Omega_2)^{**},\Box)}(N) \circ \tau\right). \qquad (68)$$

Demostración 10.6 **(i)** *Como T es epimorfismo isométrico también lo es T^*. Si $n \in \Phi_{(C(\Omega_2)^{**},\Box)}$ sea $\{g_j\}_{j \in J}$ una red acotada en $C(\Omega_2)$ tal que $n = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, \iota_{C(\Omega_2)}(g_j)$. Dado $\mu \in \mathrm{M}(\Omega_1)$ tenemos*

$$\begin{aligned}
\langle \mu, T^*(n^*)\rangle &= \langle T(\mu), n^*\rangle \\
&= \lim_{j\in J} \overline{\langle T(\mu)^*, n\rangle} \\
&= \lim_{j\in J} \overline{\langle g_j, T(\mu)^*\rangle} \\
&= \lim_{j\in J} \overline{\langle g_j, T(\mu^*)\rangle} \\
&= \overline{\langle T(\mu^*), n\rangle} \\
&= \overline{\langle \mu^*, T^*(n)\rangle} \\
&= \langle \mu, T^*(n)^*\rangle,
\end{aligned}$$

i.e. T^* *es* $*$*-operador. Si* $\lambda \in \mathrm{M}(\Omega_1)$ *vemos que*

$$\begin{aligned}
\left\langle \lambda, \iota_{C(\Omega_1)}(1_{\Omega_1}) \right\rangle &= \lambda(\Omega_1) \\
&= T(\lambda)(\Omega_2) \\
&= \left\langle T(\lambda), \iota_{C(\Omega_2)}(1_{\Omega_2}) \right\rangle \\
&= \left\langle \lambda, T^*\left(\iota_{C(\Omega_2)}(1_{\Omega_2})\right) \right\rangle,
\end{aligned}$$

i.e. $T^*\left(\iota_{C(\Omega_2)}(1_{\Omega_2})\right) = \iota_{C(\Omega_1)}(1_{\Omega_1})$ *y* T^* *es unitario.*

(ii) *Como* $(C(\Omega_1)^{**}, \Box)$ *y* $(C(\Omega_2)^{**}, \Box)$ *son* C^**-álgebras abelianas unitarias por el teorema de Gel´fand el operador*

$$S \triangleq G_{(C(\Omega_1)^{**},\Box)} \circ T^* \circ \left(G_{(C(\Omega_2)^{**},\Box)}\right)^{-1} \tag{69}$$

es epimorfismo isométrico. Por el Teorema 13.19 hay un homeomorfismo

$$\tau : \Phi_{(C(\Omega_1)^{**},\Box)} \to \Phi_{(C(\Omega_2)^{**},\Box)},$$

una función continua $c : \Phi_{(C(\Omega_1)^{**},\Box)} \to \mathbb{C}$ *tal que* $|c(m)| = 1$ *para todo* $m \in \Phi_{(C(\Omega_1)^{**},\Box)}$ *y*

$$S(F)(m) = c(m) F(\tau(m)) \tag{70}$$

si $F \in C\left[\Phi_{(C(\Omega_2)^{**},\Box)}\right]$. *Así*

$$\begin{aligned}
1_{\Phi_{(C(\Omega_1)^{**},\Box)}} &= G_{(C(\Omega_1)^{**},\Box)}\left[\iota_{C(\Omega_1)}(1_{\Omega_1})\right] \\
&= G_{(C(\Omega_1)^{**},\Box)}\left[T^*\left(\iota_{C(\Omega_2)}(1_{\Omega_2})\right)\right] \\
&= S\left(1_{\Phi_{(C(\Omega_2)^{**},\Box)}}\right),
\end{aligned}$$

de donde

$$1 = S\left(1_{\Phi_{(C(\Omega_2)^{**},\Box)}}\right)(m) = c(m)\, 1_{\Phi_{(C(\Omega_2)^{**},\Box)}}(\tau(m)) = c(m). \tag{71}$$

Por (70) y (71) $S(F) = F \circ \tau$. *Finalmente, de (69) sigue (68).*

10.3. Preduales de $\mathrm{M}(\Omega)$

Proposición 10.7 *Sea* Ω *es espacio de Hausdorff localmente compacto resulta*

$$C\left(\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right)_* \approx \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mathrm{M}(\Omega)).$$

Demostración 10.8 *Sean* $F \in C\left(\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right)$ *y* $\mu \in \mathrm{M}(\Omega)$. *Hacemos*

$$\left\langle \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu), C(F)\right\rangle \triangleq \left\langle \mu, \left(G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right)^{-1}(F)\right\rangle. \qquad (72)$$

Queda definido $C(F) \in \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mathrm{M}(\Omega))^*$, *resultando* C *monomorfismo contractivo y* $C : C\left(\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right) \hookrightarrow \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mathrm{M}(\Omega))^*$. *Si* $v \in \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mathrm{M}(\Omega))^*$ *tenemos que* $v \circ \iota_{\mathrm{M}(\Omega)} \in C_0(\Omega)^{**}$ *y* $C\left[G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\left(v \circ \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}\right)\right] = v$ *y sigue la tesis.*

Corolario 10.9 *Si* $\widetilde{\mu} \in \mathrm{M}\left(\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right)$, $\widetilde{\mu} \in \left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)^*\left[\iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mathrm{M}(\Omega))\right]$ *si y solo si* $\widetilde{\mu} \circ C^{-1}$ *es* w^**-continuo.*

Demostración 10.10 *Sea* $\left(G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)^*(\widetilde{\mu}) = \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu_0)$ *con* $\mu_0 \in \mathrm{M}(\Omega)$. *Si* $v \in \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mathrm{M}(\Omega))^*$ *tenemos*

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{\mu} \circ C^{-1}\right)(v) &= \left\langle C^{-1}(v), \widetilde{\mu}\right\rangle \\
&= \left\langle G_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\left(v \circ \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}\right), \left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)^*\left[\iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu_0)\right]\right\rangle \\
&= \left\langle v \circ \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}, \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu_0)\right\rangle \\
&= \left\langle \mu_0, v \circ \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}\right\rangle \\
&= \left\langle \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu_0), v\right\rangle
\end{aligned}$$

y la condición es ciertamente necesaria. Recíprocamente, si $\widetilde{\mu} \circ C^{-1}$ *es* w^**-continuo existirá* $\mu_0 \in \mathrm{M}(\Omega)$ *de modo que* $\left(\widetilde{\mu} \circ C^{-1}\right)(v) = \left\langle \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu_0), v\right\rangle$ *para cada* $v \in \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mathrm{M}(\Omega))^*$, *o bien* $\langle F, \widetilde{\mu}\rangle = \left\langle \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu_0), C(F)\right\rangle$ *para cada* $F \in C\left(\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right)$. *Por (72) obtenemos*

$$\begin{aligned}
\langle F, \widetilde{\mu}\rangle &= \left\langle \mu_0, \left(G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right)^{-1}(F)\right\rangle \\
&= \left\langle \left(G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right)^{-1}(F), \iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu_0)\right\rangle \\
&= \left\langle F, \left(G^{-1}_{(\mathcal{U}^{**},\Box)}\right)^*\left[\iota_{\mathrm{M}(\Omega)}(\mu_0)\right]\right\rangle
\end{aligned}$$

y sigue la afirmación.

10.4. Acciones de $M(G)$ sobre $L^1(G)$

Observación 10.11 *Dados un grupo compacto* G, $x \in L^1(G)$ *y* $\mu \in M(G)$, *como consecuencia del teorema de Fubini-Tonelli quedan definidos*

$$\begin{aligned}
R_\mu(x)(s) &\triangleq \int_G x\left(st^{-1}\right)\Delta_G\left(t^{-1}\right)d\mu(t), \\
L_\mu(x)(s) &\triangleq \int_G x\left(t^{-1}s\right)d\mu(t)
\end{aligned}$$

salvo algunos subconjuntos de elementos $s \in G$ de medida de Haar nula. Se tiene $L_\mu, R_\mu \in \mathcal{B}(L^1(G))$ y quedan definidas sendas acciones del álgebra de Banach $M(G)$ sobre $L^1(G)$. También indicaremos

$$j : C(G) \hookrightarrow L^\infty(G), \ k : L^1(G) \hookrightarrow M(G)$$

las inclusiones naturales. Como $L^\infty(G)$ es espacio de Banach abstracto por el Teorema 13.50(i) hay un espacio de Hausdorff compacto Ω_K, extremadamente desconexo por el Teorema 12.25, y un isomorfismo entre de espacios de Banach reticulares $\delta_K : L^\infty(G) \to C(\Omega_K)$. En particular, $\Omega_K \subseteq \left[L^1(G)_+^{**}\right]_1$ y $\delta_K(f)(w) = \langle f, w\rangle$ si $f \in L^\infty(G)$ y $w \in \Omega_K$.

Teorema 10.12 *(Cf. [75], Th. 3.1, Th. 3.2, Th. 3.3) Sea G grupo compacto con unidad e.*

(i) Si $\xi, \eta \in L^1(G)^{**}$,

$$\text{(a) } \xi \square \eta = R^{**}_{j^*(\eta)}(\xi) \quad \text{y} \quad \text{(b) } \xi \Diamond \eta = L^{**}_{j^*(\xi)}(\eta). \tag{73}$$

(ii) Sea $\varphi \in L^1(G)_+^{**}$ tal que $\varphi x = x\varphi = \iota_{L^1(G)}(x)$ si $x \in L^1(G)$. Entonces $j^*(\varphi) = \delta_e$.

(iii) El siguiente conjunto

$$\mathfrak{K} = \left\{\varphi \in L^1(G)_+^{**} : \varphi x = x\varphi = \iota_{L^1(G)}(x) \quad \text{si} \quad x \in L^1(G)\right\}$$

es no vacío, w^*-compacto, convexo y

$$\mathfrak{K} = (j^*)^{-1}(\{\delta_e\}) \cap \delta_K^*(P(\Omega_K)). \tag{74}$$

(iv) $j^*(\Omega_K) = \operatorname{Ext}\left[M(G)^+\right]_1$.

(v) $\operatorname{Ext}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K} \cap \Omega_K$.

(vi) Dado $\varphi \in \mathfrak{K}$ hay una aproximación acotada de la unidad $\{x_i\}_{i\in I}$ en $L^1(G)^+$ tal que $\varphi = w^*\text{-lím}_{i\in I}\, \iota_{L^1(G)}(x_i)$.

(vii) $\mathfrak{K} \subseteq U_d(L^1(G)^{**}, \square) \cap U_i(L^1(G)^{**}, \Diamond)$.

(viii) $j^* : (L^1(G)^{**}, \square) \to (M(G), *)$ es homomorfismo.

(ix) Dado $\varphi \in \mathfrak{K}$,

$$\ker(j^*) = \left\{\eta \in L^1(G)^{**} : \varphi \square \eta = 0\right\} = (1-\varphi)\square L^1(G)^{**}.$$

(x) Si $\varphi \in \mathfrak{K}$, $\ker(j^*)$ es w^*-cerrado, $\varphi \Box L^1(G)^{**}$ es w^*-denso y

$$L^1(G)^{**} = \varphi \Box L^1(G)^{**} + \ker(j^*), \tag{75}$$

donde la suma es algebraico-topológica pero en general

$$L^1(G)^{**} \neq \varphi \Box L^1(G)^{**} \oplus_1 \ker(j^*).$$

(xi) $\varphi \Box L^1(G)^{**} \approx \mathrm{M}(G)$ y $\ker(j^*) = J(L^1(G)^{**}, \Box)$.

(xii) $\iota_{L^1(G)}(L^1(G))$ es ideal bilátero cerrado de $L^1(G)^{**}$.

(xiii) Las acciones de $L^1(G)$ son separadamente débilmente compactas.

(xiv) $\varphi \Box L^1(G)^{**} \neq \psi \Box L^1(G)^{**}$ si $\varphi \neq \psi$ en $\mathfrak{K}$

Demostración 10.13 **(i)** *Dados $x, y \in L^1(G)$, $f \in L^\infty(G)$ tenemos*

$$\left\langle f, R^{**}_{j^*\left(\iota_{\mathcal{L}^1(G)}(y)\right)}\left(\iota_{L^1(G)}(x)\right)\right\rangle = \left\langle x, R^*_{k(y)}(f)\right\rangle = \left\langle R_{k(y)}(x), f\right\rangle. \tag{76}$$

Además para casi todo $s \in G$ respecto a la medida de Haar es

$$\begin{aligned}(x * y)(s) &= \int_G x(t)\, y\left(t^{-1}s\right) dm_G(s) \\ &= \int_G x\left(t^{-1}\right) y(ts)\, \Delta_G\left(t^{-1}\right) dm_G(s) \\ &= \int_G x\left(su^{-1}\right) y(u)\, \Delta_G\left(u^{-1}\right) dm_G(u) \\ &= R_{k(y)}(x)(s).\end{aligned} \tag{77}$$

De (76) y (77) obtenemos

$$R^{**}_{j^*\left(\iota_{\mathcal{L}^1(G)}(y)\right)}\left(\iota_{L^1(G)}(x)\right) = \iota_{L^1(G)}(x * y).$$

Claramente $R^{**}_{j^*(\eta)} \in (w^*,w^*)$ si $\eta \in L^1(G)^{**}$. Además

$$\eta \to R^{**}_{j^*(\eta)}\left(\iota_{L^1(G)}(x)\right)$$

es (w^*,w^*) para cada $x \in L^1(G)$. En efecto, sean $\{\eta_i\}_{i \in I}$ una red w^*-convergente a cero en $L^1(G)^{**}$, $x \in L^1(G)$, $f \in L^\infty(G)$ e $i \in I$.

Entonces

$$\left\langle f, R^{**}_{j^*(\eta_i)}\left(\iota_{L^1(G)}(x)\right)\right\rangle = \left\langle R^{*}_{j^*(\eta_i)}(f), \iota_{L^1(G)}(x)\right\rangle \tag{78}$$
$$= \left\langle x, R^{*}_{j^*(\eta_i)}(f)\right\rangle$$
$$= \left\langle R_{j^*(\eta_i)}(x), f\right\rangle$$
$$= \int_G \int_G x\left(st^{-1}\right)\Delta_G\left(t^{-1}\right) dj^*(\eta_i)(t)\, dm_G(s)$$
$$= \int_G \int_G x\left(st^{-1}\right)\Delta_G\left(t^{-1}\right) f(s)\, dm_G(s)\, dj^*(\eta_i)(t).$$

Como en el Teorema 11.6 la función

$$t \to \int_G x\left(st^{-1}\right)\Delta_G\left(t^{-1}\right) f(s)\, dm_G(s)$$

es continua sobre G. *Además* $w^*\text{-lím}_{i\in I}\, j^*(\eta_i) = 0$ *porque* $j^* \in (w^*,w^*)$ *y por (78) es*

$$\lim_{i\in I}\left\langle f, R^{**}_{j^*(\eta_i)}\left(\iota_{L^1(G)}\right)\right\rangle = 0.$$

Si $\xi = w^*\text{-lím}_{\alpha\in A}\, \iota_{L^1(G)}(x_\alpha)$, $\eta = w^*\text{-lím}_{\beta\in B}\, \iota_{L^1(G)}(y_\beta)$, *obtenemos*

$$R^{**}_{j^*(\eta)}(\xi) = w^*\text{-}\lim_{\alpha\in A} R^{**}_{j^*(\eta)}\left(\iota_{L^1(G)}(x_\alpha)\right)$$
$$= w^*\text{-}\lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B} R^{**}_{j^*\left(\iota_{L^1(G)}(y_\beta)\right)}\left(\iota_{L^1(G)}(x_\alpha)\right)$$
$$= w^*\text{-}\lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B} \iota_{L^1(G)}(x_\alpha * y_\beta)$$
$$= \xi \Box \eta$$

y sigue (73)(a). Análogamente, dados $x, y \in L^1(G)$ *se verifica*

$$L^{**}_{j^*\left(\iota_{L^1(G)}(x)\right)}\left(\iota_{L^1(G)}(y)\right) = \iota_{L^1(G)}(x * y).$$

y $\xi \to L^{**}_{j^*(\xi)}\left(\iota_{L^1(G)}(y)\right)$ *es* (w^*,w^*) *para cada* $y \in L^1(G)$: *sean* $\{\xi_j\}_{j\in J}$ *una red* w^**-convergente a cero en* $L^1(G)^{**}$, $y \in L^1(G)$, $f \in L^\infty(G)$ *y* $j \in J$. *Entonces*

$$\left\langle f, L^{**}_{j^*(\xi_j)}\left(\iota_{L^1(G)}(y)\right)\right\rangle = \left\langle y, L^{*}_{j^*(\xi_j)}(f)\right\rangle \tag{79}$$
$$= \langle j^*(\xi_j) * y, f\rangle$$
$$= \int_G \int_G y\left(t^{-1}s\right) dj^*(\xi_j)(t)\, f(s) dm_G(s)$$
$$= \int_G (f * y^\vee)(t)\, dj^*(\xi_j)(t).$$

Pero $\Theta_{f,y} : t \to (f * y^{\vee})(t)$ *es función continua sobre* G *y por (79) es*

$$\lim_{j\in J}\left\langle f, L^{**}_{j^*(\xi_j)}\left(\iota_{L^1(G)}(y)\right)\right\rangle = \lim_{j\in J}\langle j(\Theta_{f,y}), \xi_j\rangle = 0.$$

Ahora, con la notación anterior

$$\begin{aligned}
L^{**}_{j^*(\xi)}(\eta) &= w^*\text{-}\lim_{\beta\in B} L^{**}_{j^*(\xi)}\left(\iota_{L^1(G)}(y_\beta)\right)\\
&= w^*\text{-}\lim_{\beta\in B}\lim_{\alpha\in A} L^{**}_{j^*\left(\iota_{L^1(G)}(x_\alpha)\right)}\left(\iota_{L^1(G)}(y_\beta)\right)\\
&= w^*\text{-}\lim_{\beta\in B}\lim_{\alpha\in A}\iota_{L^1(G)}(x_\alpha * y_\beta)\\
&= \xi\Diamond\eta
\end{aligned}$$

y resulta (73)(b).

(ii) *Notamos que*

$$\varphi\mid_{L^1(G)^*L^1(G)} = m_G\mid_{L^1(G)^*L^1(G)} \quad y \quad \varphi\mid_{L^1(G)L^1(G)^*} = m_G\mid_{L^1(G)L^1(G)^*}$$

pues dados $x \in L^1(G)$ *y* $f \in L^\infty(G)$ *resulta*

$$\int_G xf dm_G = \langle x, f\rangle = \langle f, \varphi x\rangle = \langle f, x\varphi\rangle. \tag{80}$$

En general fx *y* xf *están definidos, en cuanto elementos de* $L^\infty(G)$*, mediante*

$$\begin{aligned}
(fx)(u) &= \Delta_G\left(u^{-1}\right)\int_G x\left(su^{-1}\right)f(s)\,dm_G(s) \text{ a.e. } u\in G, \qquad (81)\\
(xf)(u) &= \int_G x(s)f(us)dm_G(s) \text{ a.e. } u\in G.
\end{aligned}$$

Más aún, dichas funciones están definidas en todo punto y como G *es compacto son ambas continuas. Sean* $g \in C(G)$, $\mathcal{Q} = \{U_a\}_{a\in A}$ *la familia de entornos relativamente compactos de* e *en* G *con el orden parcial de inclusión y* $x_a = \chi_{U_a}/m_G(U_a)$ *si* $a \in A$. *Entonces* $\mathcal{Q}$ *es aproximación acotada de la unidad de* $L^1(G)$ *(v. el Teorema 11.6). Como* g *deviene uniformemente continua sobre* G *dado* $\varepsilon > 0$ *existe* V *entorno de* e *tal que* $|g(s_1) - g(s_2)| < \varepsilon$ *si* $s_1^{-1}s_2 \in V$. *Sean* $a_0 \in A$ *tal que* $U_{a_0} \subseteq V$, $a \in A$ *tal que* $a \geq a_0$, $t \in G$. *Por (81) y la invariancia a* *izquierda de la medida de Haar obtenemos*

$$\begin{aligned}
|(x_a g)(t) - g(t)| &= \left| \frac{1}{m_G(U_a)} \int_{U_a} (g(ts) - g(t))\, dm_G(s) \right| \\
&= \left| \frac{1}{m_G(tU_a)} \int_{tU_a} (g(u) - g(t))\, dm_G(s) \right| \\
&\leq \frac{1}{m_G(tU_a)} \int_{tU_a} |g(u) - g(t)|\, dm_G(s) \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

y $\text{lím}_{a\in A}(x_a g) = g$ *en* $C(G)$, *i.e.* $\text{lím}_{a\in A}(x_a j(g)) = j(g)$ *en* $L^\infty(G)$. *Por (80) podemos escribir*

$$\begin{aligned}
\langle g, j^*(\varphi)\rangle &= \text{lím}_{a\in A} \langle x_a j(g), \varphi\rangle \\
&= \text{lím}_{a\in A} \frac{1}{m_G(U_a)} \int_{U_a} g(s)\, dm_G(s) \\
&= g(e) \\
&= \langle g, \delta_e\rangle .
\end{aligned}$$

(iii) *Sea* $\{x_i\}_{i\in I}$ *una aproximación acotada no negativa de la unidad de* $L^1(G)$ *(V. el Teorema 11.6). Podemos suponer, considerando eventualmente alguna subred, que existe* $\varphi = w^*\text{-lím}_{i\in I}\, \iota_{L^1(G)}(x_i)$ *en* $L^1(G)^{**}$. *Como* $\varphi \in \mathfrak{K}$ *es* $\mathfrak{K} \neq \varnothing$. *Puesto que* $j^* \in (w^*, w^*)$ *y* δ_K *es isomorfismo isométrico reticular* $\mathfrak{K}$ *es subconjunto* w^**-cerrado de* $\left[L^1(G)_+^{**}\right]_1$, *por lo que es* w^**-compacto. La convexidad de* $\mathfrak{K}$ *es evidente. El resto sigue de (i), (ii), y del hecho que* δ_K *es isomorfismo reticular.*

(iv) *Supongamos existe* $w \in \Omega_K$ *tal que* $j^*(w) \notin \text{Ext}\left[M(G)^+\right]_1$. *Por el Teorema 13.1 hay al menos dos puntos distintos* $a, b \in \text{Sop}(j^*(w))$. *Sean* U, V *entornos abiertos disjuntos de* a *y* b *respectivamente. Como ambos tienen* $j^*(m)$*-medida positiva hay funciones* $x_1, x_2 \in \left[C(G)^+\right]_1$, *con soportes contenidos en* U *y* V *respectivamente, tales que* $\langle x_j, j^*(w)\rangle > 0$, $j = 1, 2$. *Notamos que* $x_1 \wedge x_2 = 0_{C(G)}$ *y*

$$\begin{aligned}
0 &= \langle x_1 \wedge x_2, j^*(w)\rangle \\
&= \langle j(x_1 \wedge x_2), w\rangle \\
&= \langle j(x_1) \wedge j(x_2), w\rangle \quad \textit{(por la Prop. 12.21)} \\
&= \text{mín}\{\langle j(x_1), w\rangle, \langle j(x_2), w\rangle\} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Ahora, por el Teorema 13.1 bastará ver que dado $a \in G$ existe una extensión $\Delta_a \in \Omega_K$ de δ_a. Precisamente, δ_a es un estado de $C(G)$, $C(G) \hookrightarrow L^\infty(G)$ en cuanto C^*-subálgebra. Existe $\Delta_a \in \Phi_{L^\infty(G)}$ tal que $\Delta_a \mid_{j(CG))} = \delta_a$, o bien $j^*(\Delta_a) = \delta_a$ (V. [79], Th. 4.3.13). Como $L^\infty(G)$ es C^*-álgebra abeliana $\Phi_{L^\infty(G)} = \mathrm{Ext}\left(L^1(G)_+^{**}\right)$ (cf. [79], Prop. 4.4.1). Más aún, $\Phi_{L^\infty(G)} = \Omega_K$ (Combinar la Prop. 12.19 con la Prop. 3.4.6 de [79]).

(v) *Dado $w \in \mathrm{Ext}(\mathfrak{K})$, como $w \in \mathfrak{K}$ existe $v \in P(\Omega_K)$ tal que $w = \delta_K^*(v)$ y*

$$w(1_G) = \langle 1_G, \delta_K^*(v)\rangle = \langle 1_G, v\rangle = 1.$$

Bastará ahora, por la Prop. 12.21, ver que w es homomorfismo reticular sobre $L^\infty(G)$. Aplicando la Prop. 12.19 veamos que $\mathbb{R}_{\geq 0}w$ es un rayo extremo de $L^\infty(G)_+^*$. Supongamos que $cw - z = v$ para ciertos $c > 0$, $z, v \in L^\infty(G)_+^*$, y veamos que $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}w$. Podemos suponer que v y z son no nulos. Como $L^\infty(G)$ es espacio de tipo (AM) con unidad tenemos

$$\|j^*(v)\| = \|v\| = v(1_G) > 0 \quad y \quad \|j^*(z)\| = \|z\| = z(1_G) > 0.$$

Ahora

$$\begin{aligned} w &= \frac{z+v}{c} = \frac{z(1_G)}{c}\frac{z}{\|j^*(z)\|} + \frac{v(1_G)}{c}\frac{v}{\|j^*(v)\|}, \\ 1 &= w(1_G) = \frac{z(1_G)}{c} + \frac{v(1_G)}{c}. \end{aligned} \tag{82}$$

Además

$$\delta_e = j^*(w) = \frac{z(1_G)}{c}\frac{j^*(z)}{\|j^*(z)\|} + \frac{v(1_G)}{c}\frac{j^*(v)}{\|j^*(v)\|}$$

y como $\delta_e \in \mathrm{Ext}\left[M(G)^+\right]_1$,

$$\{z/\|j^*(z)\|, v/\|j^*(v)\|\} \subseteq (j^*)^{-1}(\{\delta_e\}).$$

Como $\delta_K^*(P(\Omega_K)) = L^\infty(G)_+^*$ deducimos que tanto $z/\|j^*(z)\|$ como $v/\|j^*(v)\|$ pertenecen a $\mathfrak{K}$ y, por (82), $z = \|j^*(z)\|\, w$. Notemos ahora que $\mathfrak{K} \subseteq \left[L^\infty(G)_+^*\right]_1$ y $\mathrm{Ext}(\mathfrak{K}) \supseteq \mathfrak{K} \cap \Omega_K$ como consecuencia de la Prop. 12.21.

(vi) *Dado $\varphi \in \mathfrak{K} \cap \Omega_K$ sea $U \in \mathcal{U}_\varphi(\Omega_K)$, entorno abierto y cerrado de φ en Ω_K. Escribamos*

$$x_U = \chi_{\delta^{-1}(j^*(U))}/m_G\left[\delta^{-1}(j^*(U))\right], \tag{83}$$

donde $\delta : G \to \mathrm{Ext}\left[M(G)^+\right]_1$ *es el homeomorfismo definido en la Prop. 10.1(v) (V. el Teorema 13.1). Notemos que* $j^* |_{\Omega_K}$ *es isométrica, i.e. es inyectiva. Por (iv)* $j^* |_{\Omega_K} : \Omega_K \to \mathrm{Ext}\left[M(G)^+\right]_1$ *es continua y cerrada porque* Ω_K *es compacto separado. Como* U *es abierto y*

$$j^*(\Omega_K - U) = \mathrm{Ext}\left[M(G)^+\right]_1 - j^*(U),$$

$j^*(U)$ *es abierto en* $\mathrm{Ext}\left[M(G)^+\right]_1$. *Así* $\delta^{-1}(j^*(U))$ *es abierto en* G *y (83) está bien definido. Por otra parte, si* $V \in \mathcal{U}_e(G)$, $V_1 \in \mathcal{U}_\varphi(\Omega_K)$ *si* $V_1 = (j^*)^{-1}(\delta(V))$. *Sea* $V_2 \in \mathcal{U}_\varphi(\Omega_K)$ *abierto y cerrado tal que* $V_2 \subseteq V_1$. *Ahora* $\delta^{-1}(j^*(V_2)) \subseteq V$. *Podemos concluir que* $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}_\varphi(\Omega_K)}$ *es una aproximación acotada de la unidad de* $L^1(G)^+$ *(V. el Teorema 11.6). Ahora,* $\delta_e = w^*\text{-lím}_{U \in \mathcal{U}_\varphi(\Omega_K)} k(x_U)$ *y como* $j^* |_{\Omega_K}$ *deviene homeomorfismo y* $\delta_e = j^*(\varphi)$ *deducimos que* $\varphi = w^*\text{-lím}_{U \in \mathcal{U}_\varphi(\Omega_K)} \iota_{L^1(G)}(x_U)$. *Por (iii) y (v) sigue la afirmación cuando* $\varphi \in \mathfrak{K}$.

(vii) *Es ahora inmediato.*

(viii) *Sean* $a \in C(G)$, $x, y \in L^1(G)$, $\eta \in L^1(G)^{**}$. *Como*

$$\begin{aligned}
\langle y, j(a)x \rangle &= \langle x * y, j(a) \rangle \\
&= \int_G \int_G x(t)\, y\left(t^{-1}s\right) dm_G(t)\, a(s)\, dm_G(s) \\
&= \int_G \int_G x\left(t^{-1}\right) y(ts)\, \Delta_G\left(t^{-1}\right) dm_G(t)\, a(s)\, dm_G(s) \\
&= \int_G y(u)\, \Delta_G\left(u^{-1}\right) \int_G x\left(su^{-1}\right) a(s)\, dm_G(s)\, dm_G(u) \\
&= \int_G y(u) \int_G x(v)\, a(vu)\, dm_G(v) dm_G(u),
\end{aligned}$$

observamos que no solamente

$$(j(a)x)(u) = \int_G x(v)\, a(vu)\, dm_G(v) \ \text{si } u \in G$$

sinó que $j(a)x \in C(G)$. *Ahora*

$$\begin{aligned}
\left\langle a, j^*\left(\iota_{L^1(G)}(x)\right) * j^*(\eta) \right\rangle &= \int_G \int_G a(st)\, x(s)\, dm_G(s)\, dj^*(\eta)(t) \qquad (84) \\
&= \int_G (j(a)x)(t)\, dj^*(\eta)(t) \\
&= \langle j(a)x, j^*(\eta) \rangle \\
&= \langle a, j^*(x\eta) \rangle.
\end{aligned}$$

Por (84), como $j^* \in (w^*, w^*)$*,* $R_v^{(M(G),*)} \in (w^*, w^*)$ *si* $v \in M(G)$ *y* $R_\eta^{\left(L^1(G)^{**},\square\right)} \in (w^*, w^*)$ *sigue (viii).*

(ix) *Si* $\varphi \in \mathfrak{K}$*, como* $j^*(\varphi) = \delta_e$*,* φ *es idempotente y* j^* *es homomorfismo claramente se tiene*

$$(1-\varphi)\,\square L^1(G)^{**} \subseteq \left\{\eta \in L^1(G)^{**} : \varphi\square\eta = 0\right\} \subseteq \ker(j^*)\,.$$

Si $\eta \in \ker(j^*)$ *por (i)* $\varphi\square\eta = 0$*. Como*

$$L^1(G)^{**} = \varphi\square L^1(G)^{**} + (1-\varphi)\,\square L^1(G)^{**}$$

obtenemos que $\eta \in (1-\varphi)\,\square L^1(G)^{**}$*.*

(x) *Dado* $\varphi \in \mathfrak{K}$*,* $\ker(j^*)$ *es ciertamente* w^**-cerrado y como* $\iota_{L^1(G)}(x) = \varphi x$ *si* $x \in L^1(G)$*,* $\varphi\square L^1(G)^{**}$ *es* w^**-denso en* $L^1(G)^{**}$*. Además como* j^* *es homomorfismo y* $j^*(\varphi) = \delta_e$

$$\left[\varphi\square L^1(G)^{**}\right] \cap \ker(j^*) = \{0\}\,,$$

por lo que la suma en (75) es algebraica. Además $\ker(j^*)$ *y* $\varphi\square L^1(G)^{**}$ *son cerrados pues* j^* *es acotado,* φ *es idempotente y* $(L^1(G)^{**}, \square)$ *es álgebra asociativa. Si* $\varphi, \psi \in \mathfrak{K}$ *fueren distintos será*

$$\psi - \varphi \in (1-\varphi)\,\square L^1(G)^{**}$$

pero

$$1 = \|\psi\| < \|\psi - \varphi\| + \|\varphi\| = \|\psi - \varphi\| + 1.$$

(xi) *Por (x),* $\varphi\square L^1(G)^{**} \approx \mathrm{M}(G)$ *pues* j^* *es suryectiva. Por (i) sigue que*

$$\ker(j^*) \subseteq an_{der}\left(L^1(G)^{**}, \square\right) \subseteq J\left(L^1(G)^{**}, \square\right) \tag{85}$$

Pero $\mathrm{M}(G)$ *es semisimple (cf. [24], Th. 3.3.6 (i)) y*

$$\mathrm{M}(G) \approx L^1(G)^{**} / \ker(j^*)\,. \tag{86}$$

De (85) y (86) deducimos que $J(L^1(G)^{**}, \square) = \ker(j^*)$*.*

(xii) *Por (i)* $L^1(G)$ *anula a* $\ker(j^*)$ *a ambos lados. Por (xi), si* $\varphi \in \mathfrak{K}$ *hay un isomorfismo* $F : \varphi\square L^1(G)^{**} \to \mathrm{M}(G)$ *tal que* $F(\varphi\square\psi) = j^*(\psi)$ *si* $\psi \in L^1(G)^{**}$*. Notemos que* F *está bien definido, ya que si* $\varphi\square\psi = 0$ *por (ix)* $\psi \in \ker(j^*)$*. Por otra parte* F *es claramente lineal y suryectivo por serlo* j^**. Además, como* $\varphi \in U_d(L^1(G)^{**}, \square)$*, podemos escribir*

$$F((\varphi\square\psi)\,\square\,(\varphi\square\eta)) = F(\varphi\square(\psi\square\eta)) = j^*(\psi\square\eta) = j^*(\psi) * j^*(\eta)$$

si $\psi, \eta \in L^1(G)^{**}$, *i.e.* F *es homomorfismo algebraico. Asimismo,* F *es inyectivo como sigue observando la demostración de (x). En particular,* $\iota_{L^1(G)}(L^1(G)) \subseteq \varphi \Box L^1(G)^{**}$ *y si* $x \in L^1(G)$ *tenemos*

$$F\left(\varphi \Box \iota_{L^1(G)}(x)\right) = j^*\left(\iota_{L^1(G)}(x)\right) = k(x). \tag{87}$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} F(x(\varphi \Box \psi)) &= F\left(\left(\varphi \Box \iota_{L^1(G)}(x)\right) \Box (\varphi \Box \psi)\right) \\ &= F\left(\varphi \Box \iota_{L^1(G)}(x)\right) * F(\varphi \Box \psi) \\ &= k(x) * j^*(\psi), \end{aligned}$$

y como $k(L^1(G))$ *es ideal de* $\mathrm{M}(G)$, $F(x(\varphi \Box \psi)) \in k(L^1(G))$. *Análogamente,*

$$F((\varphi \Box \psi) x) = F(\varphi \Box (\psi x)) = j^*(\psi x) = j^*(\psi) * k(x)$$

y $F((\varphi \Box \psi) x) \in k(L^1(G))$. *En definitiva, por (87) sigue que*

$$\mathrm{Im}\left[\iota_{L^1(G)}\right] = F^{-1}(\mathrm{Im}(k))$$

deviene en ideal bilátero de $(L^1(G)^{**}, \Box)$.

(xiii) *Basta considerar el Teorema 6.1 y la Obs. 6.3.*

(xiv) *Dados* $\varphi \neq \psi$ *en* $\mathfrak{K}$, $\psi \in \psi \Box L^1(G)^{**}$ *pues* ψ *es idempotente. Además* $\psi = \varphi \Box \psi + (\psi - \varphi \Box \psi)$ *es la única representación posible de* φ *en cuanto elemento de* $\varphi \Box L^1(G)^{**} + \ker(j^*)$ *conforme a (75). Pero* ψ *es unidad a derecha y como* $\varphi \neq \psi$ *inferimos que* $\psi \notin \varphi \Box L^1(G)^{**}$.

10.5. Submódulos de $\mathrm{M}(\Omega)$

Proposición 10.14 *(cf. [28], Prop. 4.1) Sea* Ω *espacio de Hausdorff localmente compacto.*

(i) Si X es $C_0(\Omega)$-submódulo cerrado de $\mathrm{M}(\Omega)$ entonces X^o es ideal w^*-cerrado de $(C_0(\Omega)^{**}, \Box)$, $(X^*, \Box)$ es C^*-álgebra y $\Phi_{(X^*,\Box)} \approx \mathfrak{h}(X^o)$, donde

$$\mathfrak{h}(X^o) = \left\{m \in \Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} : X^o \subseteq \ker(m)\right\}$$

es la *cápsula* de X^o en $\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}$.

(ii) Hay una correspondencia biyectiva entre $C_0(\Omega)$ submódulos cerrados de $\mathrm{M}(\Omega)$ y la clase clo $\left[\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right]$ de subconjuntos clopen (o simultáneamente abiertos y cerrados) del cubrimiento hiper-stoneano $\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}$.

(iii) Todo $C_0(\Omega$-)submódulo cerrado de $\mathrm{M}(\Omega)$ es suplementable.

Demostración 10.15 **(i)** *Si X es submódulo cerrado de $\mathrm{M}(\Omega)$, X^o es ideal w^*-cerrado de $(C_0(\Omega)^{**}, \Box)$ y $(X^*, \Box)$ es C^*-álgebra como consecuencia de la Prop. 12.6. Por otra parte, sea $F : \mathfrak{h}(X^o) \to \Phi_{(X^*,\Box)}$ la función siguiente: fijada $m \in \mathfrak{h}(X^o)$ sea $\widetilde{m} : C_0(\Omega)^{**}/X^o \to \mathbb{C}$ el único homomorfismo tal que $m = \widetilde{m} \circ p$, donde $p : C_0(\Omega)^{**} \to C_0(\Omega)^{**}/X^o$ es la proyección al cociente. Con la notación de la Proposición 12.4(ii) hagamos $F(m) = \widetilde{m} \circ F_{C_0(\Omega),X}$. Es fácil ver que dado $x^* \in X^*$ es $F(m)(x^*) = m(\Psi)$, donde $\Psi \in C_0(\Omega)^{**}$ es cualquier extensión de x^*. Luego F está bien definida, es inyectiva y $F \in (w^*, w^*)$. Si $s \in \Phi_{(X^*,\Box)}$ sea $m_s : C_0(\Omega)^{**} \to \mathbb{C}$ tal que $m_s(\Psi) = s(\Psi|_X)$ si $\Psi \in C_0(\Omega)^{**}$. Entonces $s \in \Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}$ porque $m_s = s \circ F^{-1}_{C_0(\Omega),X} \circ p$. Además, si $\Psi \in X^o$ entonces $m_s(\Psi) = 0$, i.e. $m_s \in \mathfrak{h}(X^o)$. Finalmente, con esta notación*

$$F(m_s)(x^*) = m_s(\Psi) = s(x^*),$$

o sea $F(m_s) = s$ y necesariamente F es un homeomorfismo.

(ii) *Como X^o deviene ideal cerrado de la C^*-álgebra $(C_0(\Omega)^{**}, \Box)$ tiene una aproximación acotada $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ de la identidad (V. [30], Th. I.4.8, p. 11). Por el teorema de Alaoglu, considerando eventualmente alguna subred, podemos suponer existe $\Lambda \in X^o$ tal que $\Lambda = w^*\text{-lím}_{j\in J} \Lambda_j$. Veamos que*

$$\chi_{\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} - \mathfrak{h}(X^o)} = G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}(\Lambda). \tag{88}$$

En efecto, si $m \in \mathfrak{h}(X^o)$,

$$G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}(\Lambda)(m) = m(\Lambda) = 0 = \chi_{\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} - \mathfrak{h}(X^o)}(m).$$

Además $\Lambda\Box\Phi = \Phi$ si $\Phi \in X^o$: si $\mu \in \mathrm{M}(\Omega)$ resulta

$$\langle \mu, \Phi \rangle = \lim_{j\in J} \langle \mu, \Lambda_j \Box \Phi \rangle = \lim_{j\in J} \langle \Phi\mu, \Lambda_j \rangle = \langle \Phi\mu, \Lambda \rangle = \langle \mu, \Lambda\Box\Phi \rangle.$$

Si $m \in \Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} - \mathfrak{h}(X^o)$ consideremos $\Phi \in X^o - \ker(m)$. Como

$$m(\Phi) = m(\Lambda\Box\Phi) = m(\Lambda)\, m(\Phi)$$

sigue que

$$G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}(\Lambda)(m) = m(\Lambda) = 1 = \chi_{\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} - \mathfrak{h}(X^o)}(m),$$

tenemos (88) y $\mathfrak{h}(X^o) \in \mathrm{clo}\left[\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right]$. Si $L \in \mathrm{clo}\left[\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right]$ existe $\sigma_L \in C_0(\Omega)^{**}$ único tal que

$$G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}(\sigma_L) = \chi_L.$$

Si $X_L \triangleq \mathrm{M}(\Omega)\,\sigma_L$, *como* σ_L *es necesariamente idempotente en* $C_0(\Omega)^{**}$, X_L *es un* $C_0(\Omega)$*-submódulo de Banach de* $\mathrm{M}(\Omega)$. *Veamos ahora que*

$$\mathfrak{h}\left((X_L)^o\right) = L. \tag{89}$$

En efecto, sean $m \in L$ *y* $\Psi \in C_0(\Omega)^{**}$ *tal que* $\Psi\mid_{X_L} = 0$. *Entonces* $\Psi \in (X_L)^o$ *y si* $\mu \in \mathrm{M}(\Omega)$ *es*

$$\langle \sigma_L \mu, \Psi \rangle = \langle \mu, \Psi \Box \sigma_L \rangle = 0,$$

i.e. $\Psi \Box \sigma_L = 0_{C_0(\Omega)^{**}}$. *Así*

$$G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}(\Psi \Box \sigma_L) = G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}(\Psi)\,\chi_L = 0_{C\left[\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right]},$$

$\langle \Psi, m \rangle = 0$, $(X_L)^o \subseteq \ker(m)$ *y* $m \in \mathfrak{h}\left((X_L)^o\right)$. *Si* $n \in \Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} - L$ *sea* $\sigma_{L^c} \in C_0(\Omega)^{**}$ *tal que* $G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}(\sigma_{L^c}) = \chi_{\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} - L}$. *Como*

$$0 = \chi_L \chi_{\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} - L} = G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}(\sigma_L \Box \sigma_{L^c})$$

resulta $\sigma_L \Box \sigma_{L^c} = 0_{C_0(\Omega)^{**}}$ *y si* $\mu \in \mathrm{M}(\Omega)$ *es*

$$\langle \sigma_L \mu, \sigma_{L^c} \rangle = \langle \mu, \sigma_L \Box \sigma_{L^c} \rangle = 0.$$

Luego $\sigma_{L^c} \in (X_L)^o$ *pero*

$$\langle \sigma_{L^c}, n \rangle = G_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}(\sigma_{L^c})(n) = \chi_{\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} - L}(n) = 1,$$

o sea $(X_L)^o \nsubseteq \ker(n)$, $n \notin \mathfrak{h}\left((X_L)^o\right)$ *y sigue (89). Si* $L \in \mathrm{clo}\left[\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right]$ *es fácil ver que*

$$\mathfrak{h}\left[\mathrm{M}(\Omega)\,G^{-1}_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}(\chi_L)\right] = L,$$

mientras que si X *es* $C_0(\Omega)$*-submódulo de Banach de* $\mathrm{M}(\Omega)$ *entonces*

$$X = \mathrm{M}(\Omega)\,G^{-1}_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\left(\chi_{\mathfrak{h}(X^o)}\right), \tag{90}$$

de donde sigue (i).

(iii) *Como señalamos en la Sección 10* $(C_0(\Omega)^{**}, \Box)$ *es una* C^**-álgebra unitaria. Dado un* $C_0(\Omega)$*-submódulo cerrado* X *de* $\mathrm{M}(\Omega)$ *tenemos*

$$\begin{aligned} 1_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} &= G^{-1}_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\left(1_{C\left(\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\right)}\right) \\ &= G^{-1}_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\left(\chi_{\mathfrak{h}(X^o)}\right) + G^{-1}_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)}\left(\chi_{\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\Box)} - \mathfrak{h}(X^o)}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto si $\mu \in \mathrm{M}(\Omega)$ *tenemos*

$$\begin{aligned}\mu &= 1_{(C_0(\Omega)^{**},\square)} \\ &= \mu G^{-1}_{(C_0(\Omega)^{**},\square)}\left(\chi_{\mathfrak{h}(X^o)}\right) + \mu G^{-1}_{(C_0(\Omega)^{**},\square)}\left(\chi_{\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\square)}-\mathfrak{h}(X^o)}\right),\end{aligned}$$

y si $Y \triangleq \mathrm{M}(\Omega)\, G^{-1}_{(C_0(\Omega)^{**},\square)}\left(\chi_{\Phi_{(C_0(\Omega)^{**},\square)}-\mathfrak{h}(X^o)}\right)$ *por (90) vemos que* $\mathrm{M}(\Omega) = X + Y$. *Más aún, como* $G^{-1}_{(C_0(\Omega)^{**},\square)}\left(\chi_{\mathfrak{h}(X^o)}\right)$ *es idempotente* $X \cap Y = \left\{0_{\mathrm{M}(\Omega)}\right\}$.

11. El problema de regularidad en $L^1(\mathcal{G})$

11.1. Una observación de M. M. Day

Definición 11.1 [28][29] *Sea* $\mathcal{G}$ *grupo localmente compacto. Se dice que un elemento* $P \in L^\infty(\mathcal{G})^*$ *es un promedio si* $\|P\| = \langle 1, P\rangle = 1$. *Un promedio* P *es invariante a izquierda (resp. invariante a derecha) si* $\langle l_a^*\lambda, P\rangle = \langle \lambda, P\rangle$ *(resp.* $\langle r_a^*\lambda, P\rangle = \langle \lambda, P\rangle$*) cualesquiera sean* $\lambda \in L^\infty(\mathcal{G})$ *y* $a \in \mathcal{G}$, *donde* $(l_a f)(x) \triangleq f(ax)$ *(resp.* $(r_a f)(x) \triangleq f(xa)$*) si* $a, x \in \mathcal{G}$ *y* $f \in L^1(\mathcal{G})$. *Un promedio es invariante si lo es tanto a izquierda como a derecha.*

Lema 11.2 *(cf. [36], Th. 1, p. 530) Si* $\mathcal{G}$ *es un grupo discreto* $L^\infty(\mathcal{G})^*$ *es no abeliano si tiene al menos dos promedios invariantes a izquierda.*

Demostración 11.3 *Siendo discreto,* $L^\infty(\mathcal{G})$ *se identifica con la clase de funciones complejas acotadas. Consideremos el subespacio*

$$\mathfrak{F} = \{\Psi \in L^\infty(\mathcal{G})^* : \langle l_a^*\lambda, \Psi\rangle = \langle \lambda, \Psi\rangle \;\; si\ \lambda \in L^\infty(\mathcal{G}) \;\; y\ a \in \mathcal{G}\}$$

y sean $\Phi \in L^\infty(\mathcal{G})^*$, $\Psi \in \mathfrak{F}, \lambda \in L^\infty(\mathcal{G})$. *Si* $f \in L^1(\mathcal{G})$ *y* $a \in \mathcal{G}$ *resulta*

$$\begin{aligned}\left\langle f, \lambda\chi_{\{a\}}\right\rangle &= \left\langle \chi_{\{a\}} * f, \lambda\right\rangle \\ &= \sum_{x\in\mathcal{G}} \left(\chi_{\{a\}} * f\right)(x)\,\lambda(x) \\ &= \sum_{x\in\mathcal{G}} f\left(a^{-1}x\right)\lambda(x) \\ &= \sum_{y\in\mathcal{G}} f(y)\lambda(ay), \\ &= \langle f, l_{a^{-1}}^*\lambda\rangle,\end{aligned}$$

[28] *Palabras clave:* Promedios. Invariancia.

[29] V. [90].

o bien $\lambda\chi_{\{a\}} = l^*_{a^{-1}}\lambda$. *Así*

$$\left\langle \chi_{\{a\}}, \Psi\lambda \right\rangle = \left\langle l^*_{a^{-1}}\lambda, \Psi \right\rangle = \langle \lambda, \Psi \rangle .$$

Luego $\Psi\lambda = \langle \lambda, \Psi \rangle 1$ *y* $\langle \lambda, \Phi\Box\Psi \rangle = \langle \lambda, \Psi \rangle \langle 1, \Phi \rangle$, *o bien* $\Phi\Box\Psi = \langle 1, \Phi \rangle \Psi$. *Supongamos que hay dos promedios distintos* P, Q *invariantes a izquierda. Entonces*

$$P\Box Q = \langle 1, P \rangle Q = Q \neq P = \langle 1, Q \rangle P = Q\Box P.$$

Corolario 11.4 *Si* $\mathcal{G}$ *es discreto, abeliano y* $L^\infty(\mathcal{G})^*$ *tiene al menos dos promedios entonces* $L^1(\mathcal{G})$ *no es Arens-regular.*

Demostración 11.5 *Sigue del Lema 11.2 y de la Prop. 2.7,(vi).*

11.2. Teorema de C. Graham

Teorema 11.6 [30] *(cf. [19]; [58]) Sea* $\mathcal{G}$ *un grupo localmente compacto separado no discreto. Entonces* $L^1(\mathcal{G})$ *no es Arens-regular y* $L^1(\mathcal{G})^{**}$ *no es semisimple.*

Demostración 11.7 *Sea* $\mathcal{Q} = \{U_a\}_{a\in A}$ *la familia de entornos relativamente compactos de la identidad* e *de* $\mathcal{G}$. *Si* $a, b \in A$ *escribiremos* $a \leq b$ *si y solo si* $\overline{U_b} \subseteq U_a$, *lo que induce un orden parcial en* $\mathcal{Q}$. *Para* $a \in A$ *escribiremos* $g_a \triangleq (\chi_{U_a})/m_{\mathcal{G}}(U_a)$, *donde* $m_{\mathcal{G}}$ *denota de medida de Haar de* $\mathcal{G}$. *Entonces* $\{g_a\}_{a\in A}$ *es una aproximación acotada de la identidad de* $L^1(\mathcal{G})$. *En efecto, ciertamente, si* $a \in A$ *tenemos* $\|g_a\|_1 = 1$ *y si* $f \in L^1(\mathcal{G})$ *vemos que*

$$\begin{aligned} \|f - g_a * f\|_1 &\leq \frac{1}{m_{\mathcal{G}}(U_a)} \int_{U_a} \|f - L_{x^{-1}}f\|_1 \, dm_{\mathcal{G}}(x), \\ \|f - f * g_a\|_1 &\leq \frac{1}{m_{\mathcal{G}}(U_a)} \int_{U_a} \|f - R_x f\|_1 \, dm_{\mathcal{G}}(x), \end{aligned} \tag{91}$$

donde para $x, y \in \mathcal{G}$ *y* $f \in L^1(\mathcal{G})$ *escribimos*

$$\begin{aligned} L &: \mathcal{G} \to \mathcal{B}(L^1(\mathcal{G})), \quad (L_x f)(y) \triangleq f(xy), \\ R &: \mathcal{G} \to \mathcal{B}(L^1(\mathcal{G})), \quad (R_x f)(y) = f(yx). \end{aligned}$$

Notamos que las funciones anteriores están bien definidas. Por (91) la conclusión será consecuencia de la continuidad de las funciones $x \to L_x f$ *y* $x \to R_x f$ *en* e, *ya que la inversión es continua sobre* $\mathcal{G}$. *Si* $f \in C_c(\mathcal{G})$ *entonces* f *es uniformemente continua a derecha. Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $a_0 \in A$

[30] V. el Corolario 11.37.

tal que $|f(s)-f(t)| \leq \varepsilon$ *si* $st^{-1} \in U_{a_0}$. *Luego, si* $a \geq a_0$ *en* A *y si* $x \in U_a$ *tenemos*

$$\|f - L_x f\|_1 = \int_{\mathrm{Sop}(f)\cup x^{-1}\,\mathrm{Sop}(f)} |f(y) - f(xy)|\, dm_{\mathcal{G}}(y) \leq 2\varepsilon m_{\mathcal{G}}(\mathrm{Sop}(f)).$$

Como $\varepsilon > 0$ *es arbitrario sigue la afirmación. Para el caso general, basta considerar la densidad de* $C_c(\mathcal{G})$ *en* $L^1(\mathcal{G})$ *y que* $\{L_x\}_{x\in\mathcal{G}}$ *es una familia de isometrías por la invariancia a izquierda de la medida de Haar.*[31] *Asimismo, si* $f \in C_c(\mathcal{G})$ *también* f *es uniformemente continua a izquierda y no hay pérdida de generalidad si suponemos que* $|f(s)-f(t)| \leq \varepsilon$ *si* $s^{-1}t \in U_{a_0}$. *Ahora, si* $a \geq a_0$ *y si* $x \in U_a$ *tenemos*

$$\begin{aligned} \|f - R_x f\|_1 &= \int_{\mathrm{Sop}(f)\cup \mathrm{Sop}(f)x^{-1}} |f(y) - f(yx)|\, dm_{\mathcal{G}}(y) \\ &\leq \varepsilon m_{\mathcal{G}}(\mathrm{Sop}(f))\left(1 + \Delta_{\mathcal{G}}\left(x^{-1}\right)\right), \end{aligned} \tag{92}$$

donde $\Delta_{\mathcal{G}}$ *denota la función modular de* $\mathcal{G}$. *Como* $\Delta_{\mathcal{G}}$ *es continua y* U_{a_0} *tiene clausura compacta de (92) tenemos*

$$\|f - R_x f\|_1 \leq \varepsilon m_{\mathcal{G}}(\mathrm{Sop}(f)) \max_{x\in\overline{U_{a_0}}} \left\{1 + \Delta_{\mathcal{G}}\left(x^{-1}\right)\right\},$$

y sigue la continuidad de $x \to R_x f$. *En el caso general, se ha de considerar nuevamente la densidad de* $C_c(\mathcal{G})$ *en* $L^1(\mathcal{G})$, *la continuidad de la función modular y que* $\|R_x g\|_1 = \|g\|_1 / \Delta_{\mathcal{G}}(x)$ *si* $x \in \mathcal{G}$ *y* $g \in L^1(\mathcal{G})$. *Fijado ahora* $a_1 \in A$, *puesto que* $\mathcal{G}$ *no es discreto existe* $x_0 \in U_{a_1} - \{e\}$. *Como* $U_{a_1} - \{x_0\}$ *es entorno abierto de* e *existe* V *entorno abierto de* e *tal que* $VV \subseteq U_{a_1} - \{x_0\}$. *Sea* W_1 *entorno abierto relativamente compacto de* e *tal que* $\overline{W_1} \subseteq V$ *(cf. [115], Th. 2.7, p. 38). Como* $\overline{W_1}$ *es compacto,* $\overline{W_1 W_1} \subseteq \overline{W_1}\,\overline{W_1}$. *Así* $W_1 \in \mathcal{Q}$ *y* $\overline{W_1 W_1} \subsetneq U_{a_1}$. *Sea* $b_1 \in A$ *tal que* $U_{b_1} \triangleq U_{a_1} - \overline{W_1 W_1}$. *Existe* $c_1 \in A$ *tal que* $\|g_{b_1} - g_{b_1} * g_b\|_1 \leq 2^{-1}$ *si* $b \geq c_1$. *Sea* $a_2 \in A$ *tal que* $\overline{U_{a_2}} \subsetneqq W_1 \cap U_{c_1}$ *y* $W_2 \in \mathcal{Q}$ *tal que* $\overline{W_2 W_2} \subsetneq U_{a_2}$. *Sea* $b_2 \in A$ *tal que* $U_{b_2} \triangleq U_{a_2} - \overline{W_2 W_2}$, *de modo que* $\overline{U_{b_2}} \subseteq \overline{U_{a_2}} \subsetneqq U_{c_1}$ *y* $\|g_{b_1} - g_{b_1} * g_{b_2}\|_1 \leq 2^{-1}$. *Inductivamente, si* n *es un entero positivo mayor que uno supongamos hallados* $a_1, b_1, c_1, ..., a_n, b_n, c_{n-1} \in A$,

[31] Basta notar que $C_c(G)$ es denso en la clase de funciones simples soportadas en subconjuntos de medida finita de G. Si E es un subconjunto medible de G, $0 < m_G(E) < \infty$ y $\delta > 0$ hay un abierto V y un compacto C tales que $C \subseteq E \subseteq V$ y $m_G(V - C) < \delta/2$. Por el lema de Urysohn existe $g : G \to [0,1]$ continua tal que $g(C) = \{1\}$ y $g(G - V) = \{0\}$. Entonces

$$\|g - \chi_E\|_1 = \int_{V-C} |g(x) - \chi_E(x)|\, dm_G(x) \leq 2m_G(V - C) < \delta.$$

$W_1, ..., W_n \in \mathcal{Q}$ de manera que $\overline{W_j W_j} \subsetneqq U_{a_j}$, $U_{b_j} \triangleq U_{a_j} - \overline{W_j W_j}$ si $1 \leq j \leq n$, $\left\| g_{b_j} - g_{b_j} * g_{b_k} \right\|_1 \leq 2^{-j-k+2}$ si $1 \leq j < k \leq n$ y $\overline{U_{a_{j+1}}} \subsetneqq W_j \cap U_{c_j}$ si $1 \leq j < n$. Sea $c_n \in A$ tal que $\left\| g_{b_j} - g_{b_j} * g_b \right\|_1 \leq 2^{-2n+1}$ si $b \geq c_n$ y sea $a_{n+1} \in A$ tal que $\overline{U_{a_{n+1}}} \subsetneqq W_n \cap U_{c_n}$. Existen entonces $W_{n+1} \in \mathcal{Q}$ y $b_{n+1} \in A$ tales que $\overline{W_{n+1} W_{n+1}} \subsetneqq U_{a_{n+1}}$ y $U_{b_{n+1}} = U_{a_{n+1}} - \overline{W_{n+1} W_{n+1}}$. Si $1 \leq j \leq n$ tenemos $\overline{U_{b_{n+1}}} \subseteq \overline{U_{a_{n+1}}} \subsetneqq U_{c_n}$ y

$$\left\| g_{b_j} - g_{b_j} * g_{b_{n+1}} \right\|_1 \leq 2^{-2n+1} \leq 2^{-j-(n+1)+2},$$

y sigue el paso inductivo. Hagamos ahora $f_j \triangleq g_{b_{2j-1}} - g_{b_{2j}}$, $j \in \mathbb{N}$. Como las funciones g_{b_j}´s tienen soportes disjuntos existe $\lambda \in [L^\infty(\mathcal{G})]_1$ tal que $\langle f_j, \lambda \rangle = 2$ para todo j. Pasando eventualmente a subsucesiones, podemos suponer que existen $G = w^*\text{-lím}_{j\to\infty} \iota_{L^1(\mathcal{G})}(f_j)$ y $F = w^*\text{-lím}_{k\to\infty} \iota_{L^1(\mathcal{G})}(g_{b_k})$ en $L^\infty(\mathcal{G})^*$. Tenemos entonces

$$\langle \lambda, F \Box G \rangle = \lim_{j\to\infty} \lim_{k\to\infty} \langle f_j g_{b_k}, \lambda \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle f_j, \lambda \rangle = 2,$$
$$\langle \lambda, F \Diamond G \rangle = \lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} \langle f_j g_{b_k}, \lambda \rangle = 0,$$

i.e. $L^1(\mathcal{G})$ no es Arens regular. Por otra parte, si $\mu \in L^\infty(\mathcal{G})$ y $f \in L^1(\mathcal{G})$ tenemos

$$\langle f, G\mu \rangle = \langle \mu f, G \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle f_j, \mu f \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle f * f_j, \mu \rangle = 0,$$

i.e. $G\mu = 0$. En consecuencia $\langle \mu, G \Box G \rangle = 0$ y concluímos que $G \Box G = 0$. Pero $\langle \lambda, G \rangle = 2$, i.e. $G \neq 0$ y concluímos que $(L^1(\mathcal{G})^{**}, \Box)$ no es semisimple. Análogamente, $G \Diamond G = 0$ y $(L^1(\mathcal{G})^{**}, \Diamond)$ es no semisimple.

11.3. La caracterización de N. J. Young

Teorema 11.8 *(cf. [140]) Sea $\mathcal{G}$ un grupo separado localmente compacto. Entonces $L^1(\mathcal{G})$ es Arens regular si y solo si $\mathcal{G}$ es finito.*

Demostración 11.9 *La condición es claramente suficiente, pues si $\mathcal{G}$ es finito entonces $L^1(\mathcal{G})$ es finito dimensional y, por lo tanto, reflexivo. Para probar la necesidad, demostraremos la existencia de sucesiones $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ de subconjuntos compactos de medida de Haar positiva de $\mathcal{G}$ tales que la sucesión $\{C_n D_m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ es disjunta y*

$$\left(\cup_{n=1}^\infty \cup_{m>n} C_n D_m\right) \bigcap \left(\cup_{m=1}^\infty \cup_{n>m} C_n D_m\right) = \varnothing.$$

Luego haremos $f_n \triangleq m_{\mathcal{G}}(C_n)^{-1}\chi_{C_n}$, $g_m \triangleq m_{\mathcal{G}}(D_m)^{-1}\chi_{D_m}$ *donde* $m, n \in \mathbb{N}$. *Si* $h \triangleq \chi_{\cup_{n=1}^{\infty}\cup_{m>n}C_nD_m}$ *entonces* $h \in L^{\infty}(\mathcal{G})$ *y*

$$\langle f_n * g_m, h\rangle = \int_{\cup_{n=1}^{\infty}\cup_{m>n}C_nD_m}\int_{C_n}\chi_{D_m}\left(y^{-1}x\right)dm_{\mathcal{G}}(y)\frac{dm_{\mathcal{G}}(x)}{m_{\mathcal{G}}(C_n)\,m_{\mathcal{G}}(D_m)} \tag{93}$$

$$= \frac{1}{m_{\mathcal{G}}(C_n)\,m_{\mathcal{G}}(D_m)}\int_{\cup_{n=1}^{\infty}\cup_{m>n}C_nD_m} m_{\mathcal{G}}\left(xD_m^{-1}\cap C_n\right)dm_{\mathcal{G}}(x)$$

$$= \frac{1}{m_{\mathcal{G}}(C_n)\,m_{\mathcal{G}}(D_m)}\sum_{p>q}\int_{C_qD_p} m_{\mathcal{G}}\left(xD_m^{-1}\cap C_n\right)dm_{\mathcal{G}}(x).$$

Claramente $\langle f_n * g_m, h\rangle = 0$ *si* $m < n$. *Si* $m > n$ *tenemos* $xD_m^{-1}\cap C_n \neq \varnothing$ *si y solo si* $x \in C_nD_m$, *y por (93) obtenemos*[32]

$$\begin{aligned}\langle f_n * g_m, h\rangle &= \frac{1}{m_{\mathcal{G}}(C_n)\,m_{\mathcal{G}}(D_m)}\int_{C_nD_m} m_{\mathcal{G}}\left(xD_m^{-1}\cap C_n\right)dm_{\mathcal{G}}(x)\\ &= \frac{1}{m_{\mathcal{G}}(C_n)\,m_{\mathcal{G}}(D_m)}\int_{\mathcal{G}} m_{\mathcal{G}}\left(xD_m^{-1}\cap C_n\right)dm_{\mathcal{G}}(x)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Deducimos que los límites iterados

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\langle f_n * g_m, h\rangle \quad y \quad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\langle f_n * g_m, h\rangle$$

existen y son distintos y basta aplicar el Teorema 3.1. Haremos la construcción de las sucesiones considerando (i) $\mathcal{G}$ *localmente compacto no compacto, y (ii)* $\mathcal{G}$ *compacto.*

(i) Como $\mathcal{G}$ es separado y localmente compacto no compacto existen conjuntos disjuntos, compactos, con interior no vacío, C_1 y D_1. Supongamos hallados conjuntos compactos $C_1, ..., C_n$ y $D_1, ..., D_n$ tales que $C_i \cap C_j = D_i \cap D_j = \varnothing$ si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, y de modo que la familia $\{C_iD_j\}_{1\leq i,j\leq n}$ es disjunta. El conjunto

$$H \triangleq C_1 \cup ... \cup C_n \bigcup \cup_{r,s,t\leq n} C_rD_sD_t^{-1}$$

[32] Por [68], Th. F, p. 261 tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{G}} m_{\mathcal{G}}\left(xD_m^{-1}\cap C_n\right)dm_{\mathcal{G}}(x) &= \int_{\mathcal{G}} m_{\mathcal{G}}\left(D_m^{-1}\cap x^{-1}C_n\right)dm_{\mathcal{G}}(x)\\ &= m_{\mathcal{G}}(C_n)\,m_{\mathcal{G}}(D_m).\end{aligned}$$

es compacto y $\mathcal{G} - \cup_{r \neq s \leq n} D_r D_s^{-1}$ es entorno abierto del elemento idéntico e de $\mathcal{G}$. Luego, el conjunto

$$V \triangleq \left\{(y,z) : y^{-1}z \in \mathcal{G} - \cup_{r \neq s \leq n} D_r D_s^{-1}\right\}$$

es abierto en $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Si $x \in \mathcal{G} - H$ entonces $(x,x) \in V$ y hay entonces un entorno abierto U de x tal que $U \times U \subseteq V$. Asimismo, $U - H$ es entorno abierto de x y por la regularidad de la medida de Haar hay un compacto con medida de Haar positiva C_{n+1} contenido en $U - H$. Así, $C_1, ..., C_n, C_{n+1}$ son disjuntos y $C_{n+1} D_k \cap C_i D_j = \varnothing$ si $1 \leq i,j,k \leq n$. Análogamente, el conjunto

$$H_1 \triangleq D_1 \cup ... \cup D_n \bigcup \cup_{r,s \leq n+1, t \leq n} C_r^{-1} C_s D_t$$

es compacto y $\mathcal{G} - \cup_{r \neq s \leq n+1} C_r C_s^{-1}$ es entorno abierto del elemento idéntico e de $\mathcal{G}$. Asimismo, el conjunto

$$V_1 \triangleq \left\{(y,z) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : y^{-1}z \in \mathcal{G} - \cup_{r \neq s \leq n+1} C_r C_s^{-1}\right\}$$

es abierto en $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Si $y \in \mathcal{G} - H_1$ entonces $(y,y) \in V_1$ y hay un entorno abierto U_1 de y tal que $U_1 \times U_1 \subseteq V_1$. Además $U_1 - H_1$ deviene entorno abierto de y, y tiene necesariamente medida de Haar positiva. Por la regularidad de la medida existe un conjunto compacto D_{n+1} de medida positiva contenido en $U_1 - H_1$. Luego $D_1, ..., D_n, D_{n+1}$ son disjuntos y $C_r D_{n+1} \cap C_s D_t \neq \varnothing$ solo si $r = s$ y $t = n+1$, de modo que es válido el paso inductivo.

(ii) Si $\mathcal{G}$ es compacto e infinito su topología es no discreta. Determinaremos las sucesiones disjuntas $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ de subconjuntos compactos de medida de Haar positiva de $\mathcal{G}$ sujetas a las condiciones adicionales siguientes: (C1) $e \notin C_r \cup D_r$. (C2) $C_r \cap (D_s \cup D_s^{-1}) = \varnothing$. (C3) $C_r D_s \cap C_p D_q = \varnothing$ si $r < s$ y $p > q$. (C4) $e \notin C_r D_s D_t^{-1}$ si $r < s$ y $e \notin C_r^{-1} C_s D_t$ si $s > t$. Para ello, si $x \neq e$ sean U, V entornos disjuntos de x y e respectivamente. Como $U \neq \varnothing$ por la regularidad de la medida de Haar sea C_1 subconjunto compacto de medida positiva de U. Análogamente, como $V - \{e\}$ es abierto no vacío existe D_1 compacto con medida de Haar positiva disjunto con $C_1 \cup C_1^{-1} \cup \{e\}$. Evidentemente C_1 y D_1 satisfacen las condiciones (C1)-(C4). Supongamos inductivamente hallados $C_1, ..., C_n$ y $D_1, ..., D_n$ con las condiciones requeridas. Escribiremos

$$H_2 \triangleq \bigcup_{r \leq n} \left(C_r \cup D_r \cup C_r^{-1} \cup D_r^{-1}\right) \bigcup \bigcup_{r,s \leq n} C_r \left(D_s \cup D_s^{-1}\right) \bigcup \bigcup_{\substack{t \leq n, \\ r < s \leq n}} C_r D_s D_t^{-1}. \tag{94}$$

Notar que H_2 es compacto y $e \notin H_2$ por (C1), (C2) y (C4). Además $\mathcal{G} - \cup_{r \leq n} D_r$ es entorno de e y razonando como antes el conjunto

$$V_2 \triangleq \left\{ (y,z) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : y^{-1}z \in \mathcal{G} - \bigcup_{r \leq n} D_r \right\}$$

es un entorno de (e,e). Sea U_2 abierto tal que $U_2^{-1}U_2 \cap D_r = \varnothing$ si $r \leq n$ y $e \in U_2$. Como $\mathcal{G}$ es no discreto hay un subconjunto compacto C_{n+1} de $U_2 - \{e\}$ con medida de Haar positiva. Como $C_{n+1} \cap H_2 = \varnothing$ los conjuntos $C_1, ..., C_n, C_{n+1}, D_1, ..., D_n$ devienen disjuntos. Notar que $C_{n+1}D_q \cap C_r D_s = \varnothing$ si $r < s \leq n$ y $q \leq n$. Asimismo, $e \notin C_{n+1}^{-1} C_s D_t$ si $s, t \leq n$ y $e \notin C_r^{-1} C_{n+1} D_t$ si $r, t \leq n$. Con leves modificaciones y un razonamiento análogo sigue la construcción de D_{n+1}, y luego el paso inductivo.

11.4. Productos de Arens y compactaciones de Stone-Čech

Si $\mathcal{G}$ es grupo discreto por el teorema de Hildebrandt $l^1(\mathcal{G})^{**} \approx \mathrm{M}_{f.ad.}(\mathcal{G})$, de modo que queda inducido en $\mathrm{M}_{f.ad.}(\mathcal{G})$ el siguiente producto de medidas: sean $\upsilon_1, \upsilon_2 \in \mathrm{M}_{f.ad.}(\mathcal{G})$, $E \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ y $\Psi : l^1(\mathcal{G})^{**} \to \mathrm{M}_{f.ad.}(\mathcal{G})$ el isomorfismo definido en el Teorema 13.39. Escribimos

$$\begin{aligned} (\upsilon_1 * \upsilon_2)(E) &\triangleq \Psi\left(\Psi^{-1}(\upsilon_1) \Box \Psi^{-1}(\upsilon_2)\right)(E) \\ &= \left\langle \chi_E, \Psi^{-1}(\upsilon_1) \Box \Psi^{-1}(\upsilon_2) \right\rangle \\ &= \left\langle \Psi^{-1}(\upsilon_2)\chi_E, \Psi^{-1}(\upsilon_1) \right\rangle \\ &= \int_{\mathcal{G}} \Psi^{-1}(\upsilon_2)\chi_E d\upsilon_1 \\ &= \int_{\mathcal{G}} \upsilon_2\left(a^{-1}E\right) d\upsilon_1(a). \end{aligned} \tag{95}$$

Así $\Psi : (l^1(\mathcal{G})^{**}, \Box) \to (\mathrm{M}_{f.ad.}(X), *)$ es un isomorfismo isométrico de álgebras de Banach. Por otra parte, $l^\infty(\mathcal{G}) = C_b(\mathcal{G})$ ya que $\mathcal{G}$ se asume discreto. Sea $\delta : \mathcal{G} \to C_b(\mathcal{G})^*$ tal que $\langle x, \delta(a) \rangle = x(a)$ para $a \in \mathcal{G}$ y $x \in C_b(G)$. Haciendo $x^a \triangleq \{\delta_{a,b}x(a)\}_{b \in \mathcal{G}}$ para $a \in \mathcal{G}$, como

$$\langle x, \delta(a) \rangle = x(a) = \left\langle x, \iota_{l^1(\mathcal{G})}\left(\{\delta_{a,b}x(a)\}_{b \in \mathcal{G}}\right)\right\rangle$$

si $x \in l^1(\mathcal{G})^*$ resulta $\delta(a) = \iota_{l^1(\mathcal{G})}(x^a)$. Además, $\beta\mathcal{G} = \overline{\{\delta(a) : a \in \mathcal{G}\}}^{w^*}$ es la compactación de Stone-Čech de $\mathcal{G}$.

Teorema 11.10 *(cf. [19], Th. 3.4) Sea $\mathcal{G}$ un grupo discreto.*

(i) $(\beta\mathcal{G},\square)$ *es semigrupo.*

(ii) *Si $\mathcal{G}$ posee algún elemento de orden infinito entonces $(\beta\mathcal{G},\square)$ no es es semigrupo topológico.*

Demostración 11.11 **(i)** *Sea $s\in\beta\mathcal{G}$, $s=w^{*}\text{-}\lim_{j\in J}\iota\left(x^{a_j}\right)$. Si $E\subseteq\mathcal{G}$ se tiene*

$$\Psi\left(s\right)\left(E\right)=\left\langle \chi_E,s\right\rangle =\lim_{j\in J}\left\langle x^{a_j},\chi_E\right\rangle =\lim_{j\in J}\chi_E\left(a_j\right),$$

i.e. $\operatorname{Im}\left(\Psi\left(s\right)\right)\subseteq\{0,1\}$. *Si $\mu\in\mathrm{M}_{f.ad.}\left(X\right)$ e $\operatorname{Im}\left(\mu\right)\subseteq\{0,1\}$ entonces $\Psi^{-1}\left(\mu\right)\in\beta\mathcal{G}$. Precisamente, supongamos existe $E\in\mathcal{P}\left(\mathcal{G}\right)$ tal que $\mu\left(E\right)\notin\{0,1\}$. Sea $U=\left\{\Phi\in l^{1}\left(\mathcal{G}\right)^{**}:\left|\left\langle \chi_E,\Phi-\Psi^{-1}\left(\mu\right)\right\rangle\right|<d\right\}$, con $0<d<\min\left\{\left|\mu\left(E\right)\right|,1-\left|\mu\left(E\right)\right|\right\}$. Entonces U es $w*$-entorno de $\Psi^{-1}\left(\mu\right)$ disjunto con $\delta\left(\mathcal{G}\right)$, de modo que $\Psi^{-1}\left(\mu\right)\notin\beta\mathcal{G}$. Hemos probado entonces que $\Psi\left(\beta\mathcal{G}\right)$ consiste de las medidas finitamente aditivas acotadas sobre $\mathcal{G}$ que toman solo los valores cero o uno. Indiquemos $\Psi\left(s_j\right)=\mu_j$, $j=1,2$, con $s_1,s_2\in\beta\mathcal{G}$. Si $F\in\mathcal{P}\left(\mathcal{G}\right)$ por (95) tenemos*

$$\begin{aligned}\left(\mu_1*\mu_2\right)\left(F\right)&=\int_F\mu_2\left(a^{-1}F\right)d\mu_1(a)\\&=\mu_1\left(\left\{a\in\mathcal{G}:\mu_2\left(a^{-1}F\right)=1\right\}\right),\end{aligned}$$

i.e. $\operatorname{Im}(\mu_1*\mu_2)\subseteq\{0,1\}$ *y como $\Psi^{-1}\left(\mu_1*\mu_2\right)=s_1\square s_2$ sigue la afirmación.*

(ii) *Sea $a_0\in\mathcal{G}$ tal que el subgrupo $\mathcal{H}\triangleq\{a_0^{m}:m\in\mathbb{Z}\}$ es isomorfo al grupo aditivo de números enteros. Consideremos $\mu_1\in\mathrm{M}_{f.ad.}\left(\mathcal{G}\right)$ tal que $\mu_1\left(\mathcal{H}^{+}\right)=1$ y $\mu_1\left(F\right)=0$ si F es una parte de $\mathcal{G}$ finita o disjunta con $\mathcal{H}^{+}\triangleq\{a_0^{m}:m\in\mathbb{N}\}$. Sea $\mu_2\in\mathrm{M}_{f.ad.}\left(\mathcal{G}\right)$ tal que $\mu_2\left(F\right)\triangleq\mu_1\left(F^{-1}\right)$ si $F\in\mathcal{P}\left(\mathcal{G}\right)$. Escribiremos $s_i\triangleq\Psi^{-1}\left(\mu_i\right)$, $i=1,2$. Entonces*

$$\begin{aligned}\left(\mu_1*\mu_2\right)\left(\mathcal{H}^{+}\right)&=\mu_1\left(\left\{a\in\mathcal{G}:\mu_2\left(a^{-1}\mathcal{H}^{+}\right)=1\right\}\right)\\&=\mu_1\left(\left\{a\in\mathcal{G}:\mu_1\left(\mathcal{H}^{-}a\right)=1\right\}\right),\end{aligned}\tag{96}$$

donde $\mathcal{H}^{-}\triangleq\left\{a_0^{-m}:m\in\mathbb{N}\right\}$. Si para $a\in\mathcal{G}$ fuera $\mu_1\left(\mathcal{H}^{-}a\right)=1$ será $\left(\mathcal{H}^{-}a\right)\cap\mathcal{H}^{+}\neq\varnothing$ y finito, de modo que

$$1=\mu_1\left(\mathcal{H}^{-}a\right)=\mu_1\left(\left(\mathcal{H}^{-}a\right)\cap\mathcal{H}^{+}\right)=0,$$

lo cual es absurdo. De (96) sigue que

$$\left(\mu_1*\mu_2\right)\left(\mathcal{H}^{+}\right)=\left\langle \chi_{\mathcal{H}^{+}},s_1\square s_2\right\rangle =0.\tag{97}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}(\mu_2 * \mu_1)\left(\mathcal{H}^{+}\right) &= \mu_2\left(\left\{a \in \mathcal{G} : \mu_1\left(a^{-1}\mathcal{H}^{+}\right) = 1\right\}\right) \\ &= \mu_1\left(\left\{a^{-1} \in \mathcal{G} : \mu_1\left(a^{-1}\mathcal{H}^{+}\right) = 1\right\}\right) \\ &= \mu_1(\mathcal{H}) \\ &= 1.\end{aligned} \tag{98}$$

Veamos que $s_1 \in \beta\mathcal{H}$*: sea* $t \in l^1(\mathcal{H})^{**}$ *el único funcional correspondiente a* $\mu_1 \mid_{\mathcal{P}(\mathcal{H})}$*por el teorema de Hildebrandt. Dado* $h^* \in l^1(\mathcal{H})^*$ *vemos que*

$$\langle h^*, t\rangle = \int_{\mathcal{H}} h^* d\mu_1 = \int_{\mathcal{G}} h^* \chi_{\mathcal{H}} d\mu_1 = \langle h^* \chi_{\mathcal{H}}, s_1\rangle .$$

Como $\mu_1 \mid_{\mathcal{P}(\mathcal{H})}$ *toma solo los valores cero o uno sea* $\{a_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{H}$ *tal que* $t = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, \iota_{l^1(\mathcal{H})}(x^{a_j})$. *Si* $g^* \in l^1(\mathcal{G})^*$ *tenemos*

$$\begin{aligned}\langle g^*, s_1\rangle &= \int_{\mathcal{G}} g^* d\mu_1 \\ &= \int_{\mathcal{H}^{+}} g^* d\mu_1 \\ &= \langle g^* \chi_{\mathcal{H}}, t\rangle \\ &= \lim_{j\in J} \langle x^{a_j}, g^* \chi_{\mathcal{H}}\rangle = \lim_{j\in J} \langle x^{a_j}, g^*\rangle ,\end{aligned}$$

de modo que $s_1 \in \beta\mathcal{H}$*. Fijado* $a \in \mathcal{H}$ *notamos que* $x^a g^* = g^* x^a$*. En efecto, como* $\mu_2 \mid_{\mathcal{P}(\mathcal{G}-\mathcal{H})} \equiv 0$ *bastará ver que ambos funcionales coinciden sobre* $\mathcal{H}$*. Pero si* $b \in \mathcal{H}$ *tenemos*

$$\begin{aligned}(x^a g^*)(b) &= \left\langle x^b, x^a g^*\right\rangle \\ &= \left\langle x^b * x^a, g^*\right\rangle \\ &= \left\langle x^{ba}, g^*\right\rangle \\ &= \left\langle x^{ab}, g^*\right\rangle \\ &= \left\langle x^a * x^b, g^*\right\rangle \\ &= \left\langle x^b, g^* x^a\right\rangle = (g^* x^a)(b) .\end{aligned}$$

En consecuencia sigue que

$$s_1 \Box s_2 = w^*\text{-}\lim_{j\in J} (x^{a_j} s_2) = w^*\text{-}\lim_{j\in J} (s_2 x^{a_j}) . \tag{99}$$

Si $(\beta\mathcal{G}, \Box)$ *fuere semigrupo topológico por (99) sería* $s_1 \Box s_2 = s_2 \Box s_1$*, lo cual no es cierto en virtud de (97) y (98).*

11.5. Álgebras sobre semigrupos semitopológicos

Lema 11.12 [33]*Sean E un espacio topológico, E_1 un subespacio denso de E, F un espacio de Tijonov y $f : E \to F$ una función tal que para cada $x_0 \in E$ es $f(x_0) = \lim_{x \in E_1, x \to x_0} f(x)$. Entonces f es continua.*

Demostración 11.13 *Por hipótesis F resulta homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^{C(F,[0,1])}$ (cf. [85], Cap. 4, Teo. 7, p. 140). Dicho homeomorfismo lo da la aplicación $\Lambda : F \to [0,1]^{C(F,[0,1])}$, $\Lambda(y) = \{g(y)\}_{g \in C(F,[0,1])}$, definida para cada $y \in F$. Bastará ver entonces la continuidad de $\Lambda \circ f$, notando que $(\Lambda \circ f)(x_0) = \lim_{x \in E_1, x \to x_0} (\Lambda \circ f)(x)$ si $x_0 \in E$. Luego basta ver que $g \circ f \in C(E,[0,1])$ si $g \in C(F,[0,1])$. Como en todo caso se verifíca la hipótesis podemos asumir entonces que $F \subseteq \mathbb{R}$. Sean $x_0 \in E$, $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ y $r < \sup_{x \in U} f(x)$. Existe $x \in U$ tal que $r < f(x)$ y $f(x) = \lim_{x_1 \in E_1, x_1 \to x} f(x_1)$. Sea $V \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(x_1) > r$ para todo $x_1 \in V \cap E_1$. Así*

$$r < \sup_{x_1 \in U \cap V \cap E_1} f(x_1) \leq \sup_{x_1 \in U \cap E_1} f(x_1)$$

y deducimos que

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) \leq \sup_{x \in U} f(x) \leq \sup_{x_1 \in U \cap E_1} f(x_1),$$

i.e. $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) \leq \underline{\lim\limits_{x_1 \in E_1, x_1 \to x_0}} f(x_1) = f(x_0)$ *y sigue enseguida la tesis.*

Lema 11.14 *Sean E un espacio topológico separado, E_1 un subespacio denso de E, F un espacio de Tijonov y A un subconjunto de $C(E,F)$. Supongamos que para cada sucesión $\{f_m\} \subseteq A$ y cada sucesión $\{x_n\}$ de E_1 la sucesión doble $\{f_m(x_n)\}$ tiene algún punto de doble acumulación ω, i.e. dado un entorno U de ω se tiene*

$$\sharp\{n : \sharp\{m : f_m(x_n) \in U\}\} = \infty \quad y \quad \sharp\{m : \sharp\{n : f_m(x_n) \in U\}\} = \infty.$$

Entonces todo límite puntual de sucesiones de A es continuo y A deviene compacto respecto de la topología de la convergencia puntual de $C(E,F)$ en cuanto subespacio de F^E.

Demostración 11.15 *Sea $\{f_m\} \subseteq A$ tal que existe $f(x) \triangleq \lim_{m \to \infty} f_m(x)$ para cada $x \in E$. Usaremos el Lema 11.12 para ver que $f \in C(E,F)$, para lo cual bastará probar que $f(x_0) = \lim_{x \in E_1, x \to x_0} f(x)$ cuando $x_0 \in E$. Como*

[33]*Palabras clave: Espacios de Tijonov.* Compactación de Stone-Čech. Funciones débilmente casi periódicas. Puntos de doble acumulación.

antes, podemos reducir el análisis al caso en que $F \subseteq \mathbb{R}$. Suponiendo que $f(x_0) \neq \lim_{x\in E_1, x\to x_0} f(x)$ existirá $\alpha > 0$ de modo que si $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ existe $x_U \in U \cap E_1$ tal que $|f(x_U) - f(x_0)| \geq \alpha$. Por hipótesis

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x_U) = f(x_U) \ \text{ si } U \in \mathcal{U}_{x_0} \tag{100}$$

y como $\{f_m\} \subseteq C(E,F)$ y E es separado es

$$\lim_{U\in\mathcal{U}_{x_0}} f_m(x_U) = f_m(x_0) \ \text{ si } m \in \mathbb{N}. \tag{101}$$

En particular, existen $m_1 \in \mathbb{N}$ y $U_1 \in \mathcal{U}_{x_0}$ tales que

$$\max\{|f_{m_1}(x_0) - f(x_0)|, |f_1(x_{U_1}) - f_1(x_0)|, |f_{m_1}(x_{U_1}) - f_{m_1}(x_0)|\} \leq 1$$

para cierto $x_{U_1} \in U \cap E_1$. Sea $n \in \mathbb{N}_{>1}$ y supongamos $x_{U_1}, ..., x_{U_n} \in E_1$ y $f_{m_1}, ..., f_{m_n} \in A$ tales que $m_1 < ... < m_n$ y

$$\max\left\{\max_{1\leq i<n} |f_{m_n}(x_{U_i}) - f(x_{U_i})|, \max_{1\leq j\leq n} \left|f_{m_j}(x_{U_n}) - f_{m_j}(x_0)\right|\right\} \leq 1/n. \tag{102}$$

Por (100) existe $m_{n+1} > m_n$ tal que $\left|f_{m_{n+1}}(x_{U_i}) - f(x_{U_i})\right| \leq (n+1)^{-1}$ si $1 \leq i \leq n$. Por (101) existe $x_{U_{n+1}} \in E_1$ tal que

$$\left|f_{m_j}\left(x_{U_{n+1}}\right) - f_{m_j}(x_0)\right| \leq (n+1)^{-1}$$

si $1 \leq j \leq n+1$ y sigue el paso inductivo. Ahora, por hipótesis existe un punto de doble acumulación $z \in F$ de la sucesión doble $\left\{f_{m_i}\left(x_{U_j}\right)\right\}$. Si $j \in \mathbb{N}$, como $\left|f\left(x_{U_j}\right) - f(x_0)\right| > \alpha/2$ existe $i_j \in \mathbb{N}$ tal que $\left|f_{m_i}\left(x_{U_j}\right) - f(x_0)\right| \geq \alpha/2$ si $i \geq i_j$. En consecuencia $z \neq f(x_0)$. Sin embargo, por (102) dado $i \in \mathbb{N}$ es $\lim_{j\to\infty} f_{m_i}\left(x_{U_j}\right) = f_{m_i}(x_0)$ y

$$f(x_0) = \lim_{i\to\infty} f_{m_i}(x_0) = \lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty} f_{m_i}\left(x_{U_j}\right).$$

Luego, ya que z es punto de doble acumulación deberá ser $z = f(x_0)$, resultando una contradicción.

Lema 11.16 *Sean X, Y y Z espacios de Tijonov y $f: X \times Y \to Z$ una función lateralmente continua tal que para todo par de sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_m\}$ de X e Y el conjunto $\{f(x_n, y_m)\}$ tiene algún punto de doble acumulación. Entonces hay una extensión lateralmente continua $F: \beta X \times \beta Y \to \beta Z$ de f.*

Demostración 11.17 *Fijado $y \in Y$ la función $f(\circ, y) \in C(X, \beta Z)$ posee una extensión $f_1(\circ, y) \in C(\beta X, \beta Z)$ (V. [85], Cap. 5, Teo. 24, p. 176). Si $\widehat{x} \in \beta X$ entonces $f_1(\widehat{x}, \circ)$ se realiza como límite puntual de elementos de $f(X, \circ)$ en $C(Y, \beta Z)$. Así $f_1 : \beta X \times Y \to \beta Z$ resulta lateralmente continua y por el Lema 11.14 el conjunto $\overline{\operatorname{Im} f_1(\circ, Y)}$ deviene compacto en $C(\beta X, \beta Z)$ (en cuanto subespacio de $\beta Z^{\beta X}$). Análogamente, hay una extensión continua $f_2(x, \circ) \in C(\beta Y, \beta Z)$ de $f(x, \circ)$ para cada $x \in X$ y $f_2 : X \times \beta Y \to \beta Z$ es lateralmente continua. A continuación definimos las aplicaciones continuas $\lambda : Y \hookrightarrow \beta Y$,*

$$\begin{array}{rll} \mu : Y \to \overline{\operatorname{Im} f_1(\circ, Y)}, & \mu(y) = f_1(\circ, y) & \text{si } y \in Y, \\ \pi : \beta Y \to C(X, Z), & \pi(\widehat{y}) = f_2(\circ, \widehat{y}) & \text{si } \widehat{y} \in \beta Y, \\ \upsilon : C(\beta X, \beta Z) \to C(X, \beta Z), & \upsilon(g) = g\,|_X & \text{si } g \in C(\beta X, \beta Z). \end{array}$$

Notemos que υ es inyectiva por la densidad de X en βX y si $(x, y) \in X \times Y$ se tiene

$$\begin{aligned} (\upsilon \circ \mu)(y)(x) &= \mu(y)(x) \\ &= f_1(x, y) \\ &= f(x, y) \\ &= f_2(x, y) \\ &= \pi(y)(x) = (\pi \circ \lambda)(y)(x), \end{aligned}$$

i.e. $\upsilon \circ \mu = \pi \circ \lambda$. Más aún, si $\widehat{y} = \lim_{i \in I} y_i$ en βY, $\pi(\widehat{y}) = \upsilon(\lim_{i \in I} f_1(\circ, y_i))$ y $\operatorname{Im}(\pi) \subseteq \operatorname{Im}(\upsilon)$. Como $\overline{\operatorname{Im} f_1(\circ, Y)}$ es compacto y $C(X, Z)$ es separado υ define un homeomorfismo entre $\overline{\operatorname{Im} f_1(\circ, Y)}$ e $\operatorname{Im}(\upsilon)$. Luego $\widehat{\mu} \triangleq \upsilon^{-1} \circ \pi$ extiende μ de manera continua a una aplicación $\widehat{\mu} : \beta Y \to C(\beta X, \beta Z)$. Finalmente, hagamos

$$F : \beta X \times \beta Y \to \beta Z,\ F(\widehat{x}, \widehat{y}) \triangleq \widehat{\mu}(\widehat{y})(\widehat{x}).$$

Si $(x, y) \in X \times Y$ tenemos

$$F(x, y) = \widehat{\mu}(y)(x) = \upsilon^{-1}(\pi(y))(x) = f(x, y),$$

de modo que F extiende a f. Además $F(\circ, \widehat{y}) = \widehat{\mu}(\widehat{y})$ en $C(\beta X, \beta Z)$ para cada $\widehat{y} \in \beta Y$. Si $\widehat{x} \in \beta X$ e $\widehat{y} = \lim_{j \in J} \widehat{y}_j$ en βY entonces $\widehat{\mu}(\widehat{y}) = \lim_{j \in J} \widehat{\mu}(\widehat{y}_j)$ en $C(\beta X, \beta Z)$ (en cuanto subespacio de $\beta Z^{\beta X}$). Luego

$$F(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widehat{\mu}(\widehat{y})(\widehat{x}) = \lim_{j \in J} \widehat{\mu}(\widehat{y}_j)(\widehat{x}) = \lim_{j \in J} F(\widehat{x}, \widehat{y}_j)$$

y F es lateralmente continua.

Observación 11.18 *Sea K subconjunto acotado K de $C_b(Z)$, siendo Z espacio localmente compacto. Entonces K es compacto en la topología de la convergencia puntual si y solo si $\varkappa(K)$ es w^*-compacto en $C_0(Z)^{**}$, donde $\varkappa$ denota el monomorfismo*

$$\langle \lambda, \varkappa(f) \rangle = \int_X f d\lambda \ \text{si } f \in C_b(Z) \ \text{ y } \lambda \in \mathrm{M}(Z),$$

(cf. [50], Th. 5.1). Sean X, Y espacios localmente compactos, $F : X \times Y \to \mathbb{C}$ una función acotada lateralmente continua y $\mu \in \mathrm{M}(X)$. Queda definida $F_\mu \in C_b(Y)$ tal que $F_\mu(y) = \int_X F(x,y)\, d\mu(x)$ para $y \in Y$ (cf. [50], Corollary 5.2). Se puede formar entonces la integral iterada

$$\int_Y \int_X F(x,y)\, d\mu(x)\, d\upsilon(y), \ \text{ con } \mu \in \mathrm{M}(X) \ \text{ y } \upsilon \in \mathrm{M}(Y).$$

Esta integral es independiente del orden de integración (V. (cf. [51],Th. 3.1). Sea entonces S un semigrupo semitopológico localmente continuo (i.e. el producto de S es separadamente continuo). Si $\mu, \upsilon \in \mathrm{M}(S)$ hay un único $\mu * \upsilon \in \mathrm{M}(S)$ tal que

$$\int_S f d(\mu * \upsilon) = \int_S \int_S f(xy)\, d\mu(x)\, d\upsilon(y) \ \text{ si } f \in C_b(S).$$

Munido de esta convolución, $\mathrm{M}(S)$ deviene en un álgebra de Banach (cf. [106], Th. 7.2).

Teorema 11.19 *(cf. [141]) Sea S un semigrupo semitopológico localmente compacto de Hausdorff. Son equivalentes:*

(i) $\beta(S_d)$ admite estructura de semigrupo semitopológico y contiene a S como subsemigrupo, donde $\beta(S_d)$ es la compactación de Stone-Čech de S munido de la topología discreta.

(ii) No hay sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_m\}$ de S tales que los siguientes conjuntos $\{x_n y_m : n > m\}$ y $\{x_n y_m : n < m\}$ están contenidos en conjuntos nulos disjuntos.[34]

(iii) $\mathrm{M}(S)$ es regular.

(iv) $l^1(S)$ es regular.

[34] Un subconjunto cerrado de S se dice *nulo* si consiste del conjunto de puntos en los que se anula alguna función real continua. Un subconjunto abierto de S se dice co-nulo si su complemento es nulo.

(v) $l^{\infty}(S) = \mathrm{WAP}(S)$, donde WAP($S$) es la clase de *funciones débilmente casi periódicas*[35] sobre S.

Demostración 11.20 ($i \Rightarrow ii$) *Por hipótesis hay una función lateralmente continua* $F : \beta(S_d) \times \beta(S_d) \to \beta(S_d)$, *la cual define el producto del semigrupo* $\beta(S_d)$ *y extiende la multiplicación de la inmersión de* S *en cuanto subespacio de* $\beta(S_d)$. *Supongamos existen sucesiones* $\{x_n\}, \{y_m\}$ *de* S *contenidas en sendos conjuntos nulos y disjuntos. Por la compacidad de* $\beta(S_d)$, *considerando eventualmente subsucesiones, podemos suponer la existencia de*

$$\xi = w^{*} - \lim_{n\to\infty} x_n \text{ y } \eta = w^{*} - \lim_{m\to\infty} y_m.$$

Puesto que $\mathrm{l}^{\infty}(S_d)$ *se identifica con la clase de funciones continuas acotadas complejas sobre* S_d *todo* w^{*}*-entorno* U *de* $F(\xi,\eta)$ *es de la forma*

$$U = \left\{ \Lambda \in \beta(S_d) : \max_{x\in G} |\langle x, \Lambda - F(\xi,\eta)\rangle| < 1 \right\},$$

para cierto $G \in \mathcal{P}_f(\mathrm{l}^{\infty}(S))$. *Como* F *es continua a izquierda existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $F(x_n,\eta) \in U$ *si* $n \geq n_0$. *Además, para cada* $n \geq n_0$ *existe* $m_n > n$ *tal que* $F(x_n, y_m) \in U$ *si* $m \geq m_n$. *Como* F *extiende el producto de* S *podemos inferir que* $F(\xi,\eta) \in \overline{\{x_n y_m : n < m\}}^{w^{*}}$. *Análogamente,* $F(\xi,\eta) \in \overline{\{x_n y_m : n > m\}}^{w^{*}}$, *de modo que*

$$\overline{\{x_n y_m : n < m\}}^{w^{*}} \bigcap \overline{\{x_n y_m : n > m\}}^{w^{*}} \neq \varnothing.$$

Escribiremos

$$A \triangleq \{x_n y_m : n < m\}, \ B \triangleq \{x_n y_m : n > m\},$$
$$F(\xi,\eta) = w^{*}\text{-}\lim_{a\in\alpha} \Lambda_a = w^{*}\text{-}\lim_{b\in\beta} \Psi_b,$$

donde $\{\Lambda_a\}_{a\in\alpha}$ *y* $\{\Psi_b\}_{b\in\beta}$ *son sendas redes en* A *y* B *respectivamente. Entonces*

$$0 = \lim_{b\in\beta} \langle \chi_A, \Psi_b\rangle = \langle \chi_A, F(\xi,\eta)\rangle = \lim_{a\in\alpha} \langle \chi_A, \Lambda_a\rangle = 1,$$

lo cual es evidentemente absurdo.

[35] WAP(S) consiste de las funciones escalares acotadas λ sobre S tales que $\{{}_s\lambda\}_{s\in S}$ es relativamente débilmente compacto, donde ${}_s\lambda(t) = \lambda(st)$ para todo $s, t \in S$.

$(ii \Rightarrow i)$ *Más generalmente, asumamos que S es un semigrupo semitopológico de Tijonov. Si la multiplicación $p : S \times S \to S$ admíte una extensión lateralmente continua $\beta p : \beta S \times \beta S \to \beta S$ entonces βp devendrá asociativa. Precisamente, sean $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \beta S$, digamos $\eta_j = w^*\text{-lím}_{s\in\Lambda_j} \delta_{x_{j,s}}$ para $j = 1, 2, 3$, siendo $\delta_x \in C_b(S)^*$ la evaluación usual en cada $x \in S$. Entonces*

$$\begin{aligned}
\beta p\left(\beta p\left(\eta_1, \eta_2\right), \eta_3\right) &= \lim_{u\in\Lambda_3} \beta p\left(\beta p\left(\eta_1, \eta_2\right), \delta_{x_{3,u}}\right) \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \beta p\left(\lim_{s\in\Lambda_1} \beta p\left(\delta_{x_{1,s}}, \eta_2\right), \delta_{x_{3,u}}\right) \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \beta p\left(\lim_{s\in\Lambda_1} \lim_{t\in\Lambda_2} \beta p\left(\delta_{x_{1,s}}, \delta_{x_{2,t}}\right), \delta_{x_{3,u}}\right) \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \lim_{s\in\Lambda_1} \lim_{t\in\Lambda_2} \beta p\left(\beta p\left(\delta_{x_{1,s}}, \delta_{x_{2,t}}\right), \delta_{x_{3,u}}\right) \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \lim_{s\in\Lambda_1} \lim_{t\in\Lambda_2} \beta p\left(\delta_{p(x_{1,s}, x_{2,t})}, \delta_{x_{3,u}}\right) \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \lim_{s\in\Lambda_1} \lim_{t\in\Lambda_2} \delta_{p(p(x_{1,s}, x_{2,t}), x_{3,u})} \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \lim_{s\in\Lambda_1} \lim_{t\in\Lambda_2} \delta_{p(x_{1,s}, p(x_{2,t}, x_{3,u}))} \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \lim_{s\in\Lambda_1} \lim_{t\in\Lambda_2} \beta p\left(\delta_{x_{1,s}}, \delta_{p(x_{2,t}, x_{3,u})}\right) \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \lim_{s\in\Lambda_1} \lim_{t\in\Lambda_2} \beta p\left(\delta_{x_{1,s}}, \beta p\left(\delta_{x_{2,t}}, \delta_{x_{3,u}}\right)\right) \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \lim_{t\in\Lambda_2} \beta p\left(\eta_1, \beta p\left(\delta_{x_{2,t}}, \delta_{x_{3,u}}\right)\right) \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \beta p\left(\eta_1, \lim_{t\in\Lambda_2} \beta p\left(\delta_{x_{2,t}}, \delta_{x_{3,u}}\right)\right) \\
&= \lim_{u\in\Lambda_3} \beta p\left(\eta_1, \beta p\left(\eta_2, \delta_{x_{3,u}}\right)\right) \\
&= \beta p\left(\eta_1, \lim_{u\in\Lambda_3} \beta p\left(\eta_2, \delta_{x_{3,u}}\right)\right) \\
&= \beta p\left(\eta_1, \beta p\left(\eta_2, \eta_3\right)\right).
\end{aligned}$$

Consideremos el caso general de espacios de Tijonov X, Y, Z entre los que hay definida una aplicación $f : X \times Y \to Z$ lateralmente continua. Si f no admitiese una extensión lateralmente continua de $\beta X \times \beta Y$ en βZ por el Lema 11.16 habrá sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_m\}$ de X e Y de modo que $\{f(x_n, y_m)\}$ no tiene punto de doble acumulación. Como Z es completamente regular la clase de abiertos co-nulos es base de abiertos de Z. En efecto, sean V abierto en Z y sea $z \in V$. Como Z es completamente regular hay una función continua $g : Z \to \mathbb{R}$ tal que $g(z) = 1$ y $g(Z - V) = \{0\}$. Así $\{g \neq 0\}$ es abierto co-nulo, contiene a z y *está contenido en* V. *Luego todo* $\omega \in \beta Z$ *tiene un entorno co-nulo* U_ω *de alguno de los siguientes tipos:* $\sharp\left\{n : \sharp\left\{m : f\left(x_n, y_m\right) \in U_\omega\right\}\right\} < \infty$ *(tipo I) o* $\sharp\left\{m : \sharp\left\{n : f\left(x_n, y_m\right) \in U\right\}\right\} < \infty$ *(tipo II). Por la compacidad de* βZ *existe* $F \in \mathcal{P}_f\left(\beta Z\right)$ *de modo que* $\beta Z = \cup_{\omega \in F} U_\omega$. *Podemos hacer* $F = F_I \cup F_{II}$, *donde* U_ω *será abierto de tipo I o de tipo II según* $\omega \in F_I$ *o* $\omega \in F_{II}$ *respectivamente. Hagamos* $P = \cup_{\omega \in F_I} U_\omega$ *y* $Q = \cup_{\omega \in F_{II}} U_\omega$. *Notando que la unión finita de abiertos co-nulos es abierto co-nulo* P *y* Q *devienen abiertos co-nulos. Además, como*

$$\{n : \sharp\{m : f(x_n, y_m) \in P\} = \infty\} \subseteq \bigcup_{w \in F_I} \{n : \sharp\{m : f(x_n, y_m) \in U_\omega\} = \infty\}$$

sigue que P *tiene tipo I y, análogamente,* Q *tiene tipo II. Luego, salvo un número finito de elementos de las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_m\}$ *los conjuntos* $\{m : f(x_n, y_m) \in P\}$ *y* $\{n : f(x_n, y_m) \in Q\}$ *son finitos. Los conjuntos* $H = \beta Z - P$ *y* $K = \beta Z - Q$ *devienen nulos y disjuntos. Escribamos* $u_1 = x_1$, $v_1 = y_1$. *Existe* $u_2 \in \{x_n\}$ *tal que* $f\left(u_2, v_1\right) \in K$, *ya que* $\{n : f(x_n, y_1) \in Q\}$ *es finito. Asimismo, existe* $v_2 \in \{y_m\}$ *tal que* $f\left(u_1, v_2\right) \in H$ *pues* $\{m : f(x_1, y_m) \in P\}$ *es finito. Dado un entero* k *mayor que uno supongamos hallados* $u_1, v_1, ..., u_k, v_k$ *tales que* $f\left(u_i, v_j\right) \in K$ *si* $1 \leq j < i \leq k$ *y* $f\left(u_i, v_j\right) \in H$ *si* $1 \leq i < j \leq k$. *Escogemos entonces* $u_{k+1} \in \{x_n\}$ *tal que* $f(u_{k+1}, v_j) \in K$ *si* $1 \leq j \leq k$, *lo que es posible porque* $\cup_{j=1}^{k}\{n : f(x_n, v_j) \in Q\}$ *es finito. Luego sea* $v_{k+1} \in \{y_m\}$ *tal que* $f\left(u_i, v_{k+1}\right) \in H$ *si* $1 \leq i \leq k$, *el que existe pues* $\cup_{i=1}^{k}\{m : f(u_i, y_m) \in P\}$ *es finito. Quedan definidas las sucesiones* $\{u_i\}$ *y* $\{v_j\}$ *en* X *e* Y *de modo que* $\left\{f\left(u_i, v_j\right) : i > j\right\}$ *y* $\left\{f\left(u_i, v_j\right) : j > i\right\}$ *están contenidos en conjuntos nulos disjuntos en contradicción con la hipótesis.*

$(iii \Rightarrow ii)$ *Sino, sean* $\{x_n\}$ *e* $\{y_m\}$ *sucesiones de* S *tales que los conjuntos*

$$A \triangleq \{x_n y_m : n > m\} \quad y \quad B \triangleq \{x_n y_m : n < m\}$$

están contenidos en conjuntos nulos disjuntos. En particular, $A \cap B = \varnothing$ *y la función de Borel acotada* χ_A *induce un funcional* $H \in \mathrm{M}\left(S\right)^*$ *tal que* $\langle \mu, H \rangle = \mu\left(A\right)$ *para* $\mu \in \mathrm{M}\left(S\right)$. *Si* $n, m \in \mathbb{N}$ *y* E *es un subconjunto* *de Borel de S tenemos*

$$\begin{aligned}\left(\delta_{x_n} * \delta_{y_m}\right)(E) &= \iint\limits_{(x,y)\in S\times S: xy\in E} d\delta_{x_n} \times d\delta_{y_m} \\ &= \int_{x\in S: xy_m\in E} d\delta_{x_n} \\ &= \chi_E\left(x_n y_m\right) \\ &= \delta_{x_n y_m}(E).\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\left\langle \delta_{x_n} * \delta_{y_m}, H\right\rangle = \left(\delta_{x_n} * \delta_{y_m}\right)(A) = \delta_{x_n y_m}(A) = \chi_A\left(x_n y_m\right). \qquad (103)$$

Por (103) y el Teo. 3.1 deducimos que $\mathrm{M}(S)$ *no es Arens-regular.*

$(iv \Leftrightarrow v)$ *Sigue del Teo. 3.1.*

$(ii \Rightarrow v)$ *Supongamos que existe una función acotada* $\lambda \notin \mathrm{WAP}(S)$*. No siendo* $\{{}_s\lambda\}_{s\in S}$ *relativamente débilmente compacto habrá sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_m\}$ *de* S *tales que la sucesión doble* $\{\lambda(x_n y_m)\}$ *tiene límites iterados distintos, digamos*

$$a = \lim_n \lim_m \lambda\left(x_n y_m\right) < \lim_m \lim_n \lambda\left(x_n y_m\right) = b$$

(cf. [64], Théorème 6). Si $a < c < d < b$ *hagamos*

$$A = \{s \in S : \lambda(s) < c\} \ \text{ y } B = \{s \in S : \lambda(s) > d\}.$$

Así $A \cap B = \varnothing$ *y salvo un número finito de elementos de cada sucesión para cada* n *será* $x_n y_m \in A$ *salvo finitos* m *´s y para cada* m *es* $x_n y_m \in B$ *salvo finitos* n *´s. Razonando inductivamente como en* $(ii \Rightarrow i)$ *podemos extraer subsucesiones tales que* $x_n y_m \in A$ *si* $m > n$ *y* $x_n y_m \in B$ *si* $n > m$*, de donde sigue la afirmación.*

$(v \Rightarrow iii)$ *Si* $\mathrm{M}(S)$ *no fuere regular por el Teorema 3.1 habrá sucesiones* $\{\mu_n\}$ *y* $\{\upsilon_m\}$ *en* $[\mathrm{M}(S)]_1$ *y algún* $H \in \mathrm{M}(S)^*$ *tal que la sucesión doble* $\{H(\mu_n * \upsilon_m)\}$ *tiene límites iterados distintos. Haciendo*

$$\sigma \triangleq \frac{1}{3}\left[\sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p}\left(|\mu_p| + |\upsilon_p|\right) + \sum_{n,m=0}^{\infty} 2^{-n-m}\left|\mu_n * \upsilon_m\right|\right]$$

queda definida $\sigma \in \mathrm{M}(S)$ *y* $\mathcal{U} \subseteq L^1(\sigma)$*, donde* $\mathcal{U}$ *es el álgebra de Banach generada por* $\{\mu_n, \upsilon_m : n, m \in \mathbb{N}\}$*, donde consideramos* $L^1(\sigma)$

inmerso en $\mathrm{M}(S)$. *Ahora* $H\mid_{L^1(\sigma)}\in L^1(\sigma)^*$, *i.e. existe* $h\in L^\infty(\sigma)$ *único tal que*

$$H(\mu*\upsilon)=\int\int_{S\times S}h(xy)\,d\mu(x)\,d\upsilon(y)\tag{104}$$

para todo $\mu,\upsilon\in L^1(\sigma)$. *Más aún, redefiniendo eventualmente a* h *en un subconjunto de* σ*-medida nula podemos asumir* h *acotada sobre* S. *Como* $h\in\mathrm{WAP}(S)$ *no hay sucesiones* $\{x_r\}$ *e* $\{y_s\}$ *de* S *tal que la sucesión doble* $\{h(x_ry_s)\}$ *tiene límites iterados distintos (cf. [64], Théorème 6). Luego la aplicación bilineal inducida por (104) sobre* $L^1(\sigma)\times L^1(\sigma)$ *es agrupante (o cluster) sobre conjuntos acotados, i.e. no puede haber sucesiones acotadas* $\{\mu_n\}$ *y* $\{\upsilon_m\}$ *en* $L^1(\sigma)$ *tal que* $\{H(\mu_n*\upsilon_m)\}$ *tenga límites iterados distintos (V. [142], §4.1, Ex. 2). Sigue entonces la afirmación.*

11.6. Regularidad de álgebras de Beurling discretas

[36]Si el *álgebra de Beurling* $l^1(S,w)$ sobre un semigrupo S fuere irregular[37] sabemos que habrá sucesiones acotadas $\{a_n\},\{b_m\}$ en $l^1(S,w)$ y cierto $\lambda\in l^\infty(S,w^{-1})$ de modo que $\{\langle a_n*b_m,\lambda\rangle\}$ tiene límites iterados distintos.

[36]Para información relacionada en el contexto de álgebras de Beurling v. [6], [12], [41], [110], [17]. Cuestiones de regularidad de álgebras pesadas de convolución construídas sobre subsemigrupos de la recta real se tratan en [25]. Espacios biduales asociados a álgebras de Beurling se consideran en [27].

[37]Mediante w indicamos un *peso* sobre S, i.e. una función positiva y submultiplicativa. El álgebra de Beurling $l^1(S,w)$ consiste de las funciones $a:S\to\mathbb{C}$ tales que

$$\|a\|_{1,w}\triangleq\sum_{x\in S}|a(x)|\,w(x)$$

es finito. Con la estructura vectorial natural y definiendo para $a,b\in l^1(S,w)$ el producto

$$(a*b)(z)=\sum_{(x,y)\in S\times S:xy=z}a(x)\,b(y)$$

entonces $l^1(S,w)$ es un álgebra de Banach. Por otra parte, $l^1(S,w)^*\approx l^\infty\left(S,w^{-1}\right)$, donde $l^\infty\left(S,w^{-1}\right)$ contiene las aplicaciones $\lambda:S\to\mathbb{C}$ tales que $\lambda w^{-1}\in l^\infty(S)$. Para $\lambda\in l^\infty\left(S,w^{-1}\right)$ la norma correspondiente es $\|\lambda\|_{\infty,w^{-1}}\triangleq\left\|\lambda w^{-1}\right\|_\infty$.

Fijados $m, n \in \mathbb{N}$ escribimos

$$\begin{aligned}
\langle a_n * b_m, \lambda \rangle &= \sum_{z \in S} (a_n * b_m)(z) \lambda(z) \\
&= \sum_{z \in S} \left(\sum_{xy=z} a_n(x) b_m(y) \right) \lambda(z) \\
&= \sum_{x,y \in S} a_n(x) w(x) b_m(y) w(y) \frac{\lambda(xy)}{w(xy)} \Omega(x,y) \\
&= \langle (a_n w) * (b_m w), m_\lambda \rangle,
\end{aligned}$$

donde $m_\lambda(x,y) = (\lambda w^{-1})(xy) \Omega(x,y)$ si $x, y \in S$. Concluímos que la forma bilineal

$$\left[l^1(S) \right]_1 \times \left[l^1(S) \right]_1 \to \mathbb{C}, \ \ (A,B) \to \sum_{x,y \in S} A(x) B(y) m_\lambda(x,y),$$

no es agrupante. Entonces m_λ no será agrupante (V. [142], §4, Ex. 2). Como $\lambda w^{-1} \in l^\infty(S)$ es fácil ver que Ω no será agrupante. Más precisamente, es válido el siguiente:

Teorema 11.21 *(cf. [22], Th. 1) Si el álgebra de Beurling $l^1(S,w)$ es no regular habrá sucesiones inyectivas $\{x_n\}, \{y_m\}$ de S de modo que la sucesión doble $\{\Omega(x_n, y_m)\}$ tiene algún límite iterado no nulo, donde Ω es la función*

$$\Omega : S \times S \to (0,1], \ \Omega(st) = \frac{w(st)}{w(s) w(t)}.$$

En caso que S sea semigrupo cancelativo esta condición es además suficiente.

Ejemplo 11.22 *$l^1(\mathbb{Z}, w)$ es regular si* $\lim_{n \to \infty} w(n+1)/w(n) = 0$. *En este caso, dadas sucesiones infinitas $\{n_k\}, \{m_h\}$ en $\mathbb{Z}$ es*

$$\lim_{h \to \infty} \frac{w(n_k + m_h)}{w(m_h)} = \lim_{h \to \infty} \prod_{p=1}^{n_k} \frac{w(p + m_h)}{w(p + m_h - 1)} = 0,$$

de modo que en todo caso los límites iterados son nulos y basta aplicar el Teorema 11.21.

Corolario 11.23 *(cf. [22], Corollary 1) Todo semigrupo numerable admíte un peso respecto al cual la correspondiente álgebra de Beurling es regular.*

Demostración 11.24 *Sea* $\mathfrak{F}$ *el semigrupo libre generado por un conjunto numerable* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. *Todo elemento* $x \in \mathfrak{F}$ *es del tipo* $x = a_{k_1}...a_{k_n}$*, en cuyo caso escribimos* $w(x) = 1 + k_1 + ... + k_n$. *Es fácil ver que* w *define un peso sobre* $\mathfrak{F}$. *Si* $\{z_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ *es cualquier sucesión de elementos distintos de* $\mathfrak{F}$ *será* $w(z_r) \to \infty$*, y como* $w(xy) = w(x) + (y) - 1$ *para* $x, y \in \mathfrak{F}$ *se ve que* $\{\Omega(x_n, y_m)\}$ *tiene límites iterados nulos cualesquiera sean las sucesiones inyectivas* $\{x_n\}$ *e* $\{y_m\}$ *de* $\mathfrak{F}$*, por lo que* $l^1(\mathfrak{F}, w)$ *es regular. Ahora, si* S *es un semigrupo numerable hay un semigrupo libre* $\mathfrak{F}$ *y un epimorfismo* $\phi : \mathfrak{F} \to S$. *La función*

$$\widetilde{w} : S \to (0, +\infty)\,,\ \widetilde{w}(X) = \text{mín}\left\{w(x) : x \in \phi^{-1}(\{X\})\right\},$$

define un peso sobre S. *Notamos que* $\widetilde{w}(XY) \leq \widetilde{w}(X) + \widetilde{w}(Y) - 1$ *para* $X, Y \in S$ *y* $\widetilde{w}(Z_r) \to \infty$ *si* $\{Z_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ *es cualquier sucesión infinita de* S*, de donde sigue enseguida la regularidad de* $l^1(S, \widetilde{w})$.

Corolario 11.25 *(Ibídem) Toda álgebra de Beurling* $l^1(G, w)$ *sobre un grupo no numerable es no regular.*

Demostración 11.26 *Notamos que* $\Omega(x, y) \geq w(y)^{-1} w(y^{-1})^{-1}$ *puesto que* $w(x) \leq w(xy)w(y^{-1})$ *para* $x, y \in G$. *Supongamos que para todo* $a > 0$ *hay algún entorno* U_a *de* a *tal que* $W^{-1}(U_a)$ *es numerable, donde*

$$W(y) = w(y)^{-1} w\left(y^{-1}\right)^{-1} \text{ para } y \in G.$$

Como $(0, +\infty)$ *es espacio de Lindelöf hay una sucesión* $\{a_n\}$ *de manera que* $(0, +\infty) = \cup U_{a_n}$. *Pero* $G = \cup W^{-1}(U_{a_n})$*, lo que no es posible puesto que* G *es no numerable. Existe entonces* $a_0 > 0$ *y una sucesión inyectiva* $\{y_m\}$ *tal que* $w(y_m)^{-1} w(y_m^{-1})^{-1} \geq a_0$ *para todo* m. *Si* $\{x_n\}$ *es cualquier otra sucesión inyectiva de* G*, considerando eventualmente subsucesiones de* $\{x_n\}$ *e* $\{y_m\}$*, podemos suponer que* $\{\Omega(x_n, y_m)\}$ *tiene límites iterados y* $\Omega(x_n, y_m) \geq a_0$ *para todo* $n, m \in \mathbb{N}$*, con lo que sigue la tesis.*

11.7. Sobre $l^1(\mathcal{G})^{**}$ siendo $\mathcal{G}$ grupo discreto

[38]Sabemos, por el teorema de Hildebrandt, que si $\mathcal{G}$ es un conjunto no vacío hay un isomorfismo isométrico

$$\Psi : l^1(\mathcal{G})^{**} \to \mathrm{M}_{f.ad.}(\mathcal{G})$$

tal que $\Psi(F)(S) = \langle \chi_S, F\rangle$ para $F \in l^1(\mathcal{G})^{**}$ y $S \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$.

[38]*Palabras clave:* Radical de Jacobson. Teorema de Hildebrandt. Álgebras semisimples. Anuladores. Cuasi-regularidad.

Proposición 11.27 *(cf. [19], Th. 3.2) Si $\mathcal{G}$ es un grupo discreto entonces*

$$\left(l^1(\mathcal{G})^{**}, \square\right) = \iota_{L^1(\mathcal{G})}\left(l^1(\mathcal{G})\right) \oplus \mathcal{R},$$

donde $\mathcal{R}$ es el ideal bilátero

$$\mathcal{R} = \left\{F \in l^1(\mathcal{G})^{**} : \Psi(F)(S) = 0 \text{ para todo } S \in \mathcal{P}_f(\mathcal{G})\right\}. \tag{105}$$

Demostración 11.28 *Sean $F \in \mathcal{R}$, $G \in l^1(\mathcal{G})^{**}$, $a \in \mathcal{G}$. Entonces*

$$\Psi(G\square F)(\{a\}) = \left\langle \chi_{\{a\}}, G\square F\right\rangle = \left\langle F\chi_{\{a\}}, G\right\rangle. \tag{106}$$

Para $b \in \mathcal{G}$ haremos $x^b : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ tal que $x^b(c) = \delta_{b,c}$ para cada $c \in \mathbb{C}$. Luego $\left\{x^b\right\}_{b\in\mathcal{G}} \subseteq l^1(\mathcal{G})$ y si $x \in l^1(\mathcal{G})$ se tiene $x = \sum_{b\in\mathcal{G}} x(b)\, x^b$. Como para $a, b, c \in \mathcal{G}$ es

$$\left\langle x^c, \chi_{\{a\}}x^b\right\rangle = \left\langle x^b * x^c, \chi_{\{a\}}\right\rangle = \left\langle x^{bc}, \chi_{\{a\}}\right\rangle$$

concluímos que $\chi_{\{a\}}x^b = \chi_{\{b^{-1}a\}}$. Pero entonces

$$\left\langle x^b, F\chi_{\{a\}}\right\rangle = \left\langle \chi_{\{a\}}x^b, F\right\rangle = \left\langle \chi_{\{b^{-1}a\}}, F\right\rangle = 0$$

ya que $F \in \mathcal{R}$, i.e. $F\chi_{\{a\}} = 0_{l^1(\mathcal{G})^*}$ y por (106) $\Psi(G\square F)(\{a\}) = 0$. Es claro entonces que $G\square F \in \mathcal{R}$. Por otra parte si $C \in \mathcal{P}_f(\mathcal{G})$ hay un conjunto escalares complejos de módulo uno $\{u_c\}_{c\in C}$ tales que

$$\sum_{c\in C}\left|\left\langle \chi_{\{c\}}, G\right\rangle\right| = \sum_{c\in C} u_c \left\langle \chi_{\{c\}}, G\right\rangle = \left\langle \sum_{c\in C} u_c\chi_{\{c\}}, G\right\rangle \leq \|G\|.$$

Luego $\sum_{c\in\mathcal{G}}\left|\left\langle \chi_{\{c\}}, G\right\rangle\right| < \infty$ y el conjunto $N = \left\{c \in \mathcal{G} : \left\langle \chi_{\{c\}}, G\right\rangle \neq 0\right\}$ es necesariamente numerable, digamos $N = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Tenemos

$$\Psi(F\square G)(\{a\}) = \left\langle \chi_{\{a\}}, F\square G\right\rangle = \left\langle G\chi_{\{a\}}, F\right\rangle \tag{107}$$

y $\left\langle x^b, G\chi_{\{a\}}\right\rangle = \left\langle \chi_{\{b^{-1}a\}}, G\right\rangle$. Dados $k \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathcal{G}$ haremos

$$g_k(b) = \left\langle \chi_{\{b^{-1}a\}}, G\right\rangle \chi_{\left\{ac_1^{-1}, \ldots, ac_k^{-1}\right\}}(b).$$

Entonces $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq l^1(\mathcal{G})^*$ y

$$\left\|g_k - G\chi_{\{a\}}\right\|_{\infty} = \sup_{j>k}\left|\left\langle \chi_{\{c_j\}}, G\right\rangle\right| \to 0 \text{ si } k \to \infty.$$

Ahora por (107) escribimos

$$\Psi(F\square G)(\{a\}) = \lim_{k\to\infty}\langle g_k, F\rangle = 0$$

y $F\square G \in \mathcal{R}$, i.e. $\mathcal{R}$ es ideal bilátero. Más aún, si hacemos $x(c) = \left\langle \chi_{\{c\}}, G\right\rangle$ para $c \in \mathcal{G}$ sabemos que $x \in l^1(\mathcal{G})$ y claramente $G - \iota_{l^1(\mathcal{G})}(x) \in \mathcal{R}$, de donde sigue enseguida la tesis.

Proposición 11.29 *(cf. [19], Th. 3.5)*

(i) $J\left(l^1(\mathcal{G})^{**}, \square\right) \subseteq \mathcal{R}$, i.e. $\mathcal{R}$ contiene al correspondiente *radical de Jacobson* de $\left(l^1(\mathcal{G})^{**}, \square\right)$.

(ii) Si $\mathcal{G}$ es grupo abeliano, discreto y compacto entonces

$$J\left[\left(l^1(\mathcal{G})^{**}, \square\right)\right] = an_{der}\left(l^1(\mathcal{G})^{**}, \square\right) = \left\langle \Delta_{l^1(\mathcal{G})}\right\rangle^o = \left\{0_{l^1(\mathcal{G})^{**}}\right\}.$$

Demostración 11.30 **(i)** *Basta notar que* $l^1(\mathcal{G})^{**}/\mathcal{R} \approx l^1(\mathcal{G})$ *es semisimple, a raíz de la Prop. 11.27 y del Teo. 13.67. Como* $\mathcal{R}$ *es ideal bilátero sigue la afirmación.*

(ii) *Dado* $F \in \mathcal{R}$, *como* $\mathcal{G}$ *deviene finito, por (105) es* $\Psi(F) = 0_{\mathrm{M}_{f.ad.}(\mathcal{G})}$. *En consecuencia* $F = 0$. *Por (i) deducimos que* $\left(l^1(\mathcal{G})^{**}, \square\right)$ *es semisimple. Además* $an_{der}\left(l^1(\mathcal{G})^{**}, \square\right)$ *es ideal a izquierda de* $l^1(\mathcal{G})^{**}$, *y está contenido en el radical de Jacobson pues todo elemento en él es cuasiregular a izquierda. Finalmente, si* $\Gamma : l^1(\mathcal{G}) \to C\left(\Delta_{l^1(\mathcal{G})}\right)$ *es la trasformada de Gel´fand de* $l^1(\mathcal{G})$ *se sabe que* $J\left[\left(l^1(\mathcal{G}), *\right)\right] = \ker(\Gamma)$. *Así si* $x \in J\left[\left(l^1(\mathcal{G}), *\right)\right]$ *y* $h \in \Delta_{l^1(\mathcal{G})}$ *resulta*

$$0 = \langle x, h\rangle = \left\langle h, \iota_{l^1(\mathcal{G})}(x)\right\rangle,$$

i.e. $\iota_{l^1(\mathcal{G})}\left(J\left[\left(l^1(\mathcal{G}), *\right)\right]\right) \subseteq \left\langle \Delta_{l^1(\mathcal{G})}\right\rangle^o$. *Puesto que* $\mathcal{G}$ *es finito* $\iota_{l^1(\mathcal{G})}$ *es epimorfismo y se deduce enseguida que* $\iota_{l^1(\mathcal{G})}\left(J\left[\left(l^1(\mathcal{G}), *\right)\right]\right) = \left\langle \Delta_{l^1(\mathcal{G})}\right\rangle^o$. *Pero por el teorema de Segal* $\left(l^1(\mathcal{G}), *\right)$ *es semisimple y sigue la tesis.*

11.8. Sobre el radical de Jacobson de $\left(\left(l^1(\mathbb{Z}), *\right)^{**}, \square\right)$

Proposición 11.31 *(cf. [19], Th. 3.5)*$J\left(l^1(\mathbb{Z})^{**}\right)$ *es infinito dimensional.*

Demostración 11.32 *Sea* $T \in \mathcal{B}\left(l^1(\mathbb{Z})^*\right)$ *tal que*

$$Tf(m) = m + 1 \ \ para \ \ f \in l^1(\mathbb{Z})^* \ \ y \ \ m \in \mathbb{Z}.$$

Sea $\{e_k^r\}_{r,k\in\mathbb{Z}} \subseteq l^1(\mathbb{Z})^*$ *tal que* $e_k^r(m) = 1$ *si* $m \equiv r \,(\mathrm{mod}\, k)$ *y* $e_k^r(m) = 0$ *en otro caso para* $k, r, m \in \mathbb{Z}$. *Si* $k \in \mathbb{N}$ *sea*

$$\mathcal{I}_k = \left\{\Phi \in l^1(\mathcal{G})^{**} : \left(T^k\right)^*(\Phi) = \Phi \ y \ \langle e_k^r, \Phi\rangle = 0 \ si \ 0 \leq r < k\right\}.$$

En particular, $e_1^0 \equiv e$, *con* $e = \{..., 1, 1, 1, ...\}$. *Si*

$$\Phi \in l^1(\mathcal{G})^{**}, \ f \in l^1(\mathbb{Z})^*, \ m \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N}$$

tenemos

$$\langle x^m, \Phi f\rangle = \langle f x^m, \Phi\rangle = \langle T^m f, \Phi\rangle = \langle f, (T^m)^* (\Phi)\rangle . \tag{108}$$

Por (108) es $\Phi f = \{\langle f, (T^m)^* (\Phi)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *en* $l^1(\mathbb{Z})^*$. *Si* $\Phi \in \mathcal{I}_k$ *podemos escribir*

$$\Phi f = \sum_{r=0}^{k-1} \langle f, (T^m)^* (\Phi)\rangle\, e_k^r.$$

Dado entonces $\Psi \in l^1(\mathbb{Z})^{**}$ *es*

$$\begin{aligned}\langle f, \Psi\Box\Phi\rangle &= \langle \Phi f, \Psi\rangle \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \langle f, (T^m)^* (\Phi)\rangle \langle e_k^r, \Psi\rangle \\ &= \left\langle f, \sum_{r=0}^{k-1} \langle e_k^r, \Psi\rangle (T^m)^* (\Phi)\right\rangle ,\end{aligned}$$

o sea $\Psi\Box\Phi = \sum_{r=0}^{k-1} \langle e_k^r, \Psi\rangle \Phi$. *Luego* $\Psi\Box\Phi \in \mathcal{I}_k$ *e* $\mathcal{I}_k$ *es ideal a izquierda de* $(l^1(\mathbb{Z})^{**}, \Box)$. *Como* $\mathcal{I}_k^2 = \{0\}$ *sigue que* $\mathcal{I}_k^2 \subseteq J(l^1(\mathbb{Z})^{**}, \Box)$ *(cf. [24], Prop. 1.5.6(ii)). Bastará ver finalmente que* $\mathcal{I}_{2^m} \subsetneq \mathcal{I}_{2^{m+1}}$ *si* $m \in \mathbb{N}$. *Para ello, notemos que*

$$e_{2^m}^r = e_{2^{m+1}}^r + e_{2^{m+1}}^{r+2^m} \text{ si } 0 \le r < 2^m \text{ y } m \in \mathbb{N}. \tag{109}$$

En efecto, si $n \equiv k \,(\operatorname{mod} 2^{m+1})$ *existe* $0 \le r < 2^m$ *único tal que*

$$n \equiv r (\operatorname{mod} 2^{m+1}) \text{ o } n \equiv r + 2^m \left(\operatorname{mod} 2^{m+1}\right).$$

En ambos casos $n \equiv r\,(\operatorname{mod} 2^m)$. *Por otra parte, si* $n \equiv r(\operatorname{mod} 2^m)$ *existe* $a \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n = a2^m + r$. *Si* a *es par resulta* $n \equiv r(\operatorname{mod} 2^{m+1})$. *Sinó existe* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a = 2\alpha + 1$ *y* $n - r = 2^{m+1}\alpha + 2^m$, *i.e.* $n \equiv r + 2^m \,(\operatorname{mod} 2^{m+1})$ *y sigue (109). Tomando* $\Phi \in \mathcal{I}_{2^m}$ *tenemos*[39]

$$\langle e_{2^{m+1}}^r, \Phi\rangle = \left\langle T^{2^m} (e_{2^{m+1}}^r), \Phi\right\rangle = \left\langle e_{2^{m+1}}^{r-2^m}, \Phi\right\rangle . \tag{110}$$

Por (109) y (110) si $0 \le r < 2^m$ *escribimos*

$$\langle e_{2^{m+1}}^r, \Phi\rangle = \left\langle e_{2^m}^r - e_{2^{m+1}}^{r+2^m}, \Phi\right\rangle = -\left\langle e_{2^{m+1}}^{r+2^m}, \Phi\right\rangle = -\left\langle e_{2^{m+1}}^r, \Phi\right\rangle ,$$

[39]Si $s, n \in \mathbb{Z}$ observar que

$$T^s (e_k^r)(n) = e_k^r (n+s) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n + s \equiv r \,(\operatorname{mod} k),$$

i.e. $T^s (e_k^r) = e_k^{r-s}$.

o sea $\left\langle e^r_{2^{m+1}}, \Phi \right\rangle = 0$.*Por (110) lo mismo ocurre si*

$$2^m \leq r < 2^{m+1} \quad y \quad \Phi \in \mathcal{I}_{2^{m+1}}.$$

Ahora, como el grupo aditivo de enteros es abeliano hay al menos dos promedios invariantes distintos $\Theta_1, \Theta_2 \in l^1(\mathbb{Z})^{**}$ *(V. Def. 11.1 y [36], Corollary 3). Entonces* $\langle e, \Theta_i \rangle = 1$ *y* $T^*(\Theta_i) = \Theta_i$ *si* $i = 1, 2$. *Sea* $U \in \mathcal{B}(l^1(\mathbb{Z})^*)$ *tal que* $Uf(n) = f(n2^m)$ *si* $n \in \mathbb{Z}$. *Escribiendo* $H = U^*(\Theta_1 - \Theta_2)$ *veremos que* $H \in \mathcal{I}_{2^{m+1}} - \mathcal{I}_{2^m}$. *En efecto:*

$$\begin{aligned}
\left(T^{2^{m+1}}\right)^*(H) &= \left(\left(T^{2^{m+1}}\right)^* U^*\right)(\Theta_1 - \Theta_2) \\
&= \left(UT^{2^{m+1}}\right)^*(\Theta_1 - \Theta_2) \\
&= (TU)^*(\Theta_1 - \Theta_2) \\
&= U^*(T^*(\Theta_1) - T^*(\Theta_2)) \\
&= U^*(\Theta_1 - \Theta_2) \\
&= H.
\end{aligned}$$

Además $U\left(e^r_{2^{m+1}}\right)(n) = 0$ *si y solo si* $2^{m+1} \nmid r$. *Como* $e^0_{2^{m+1}} = e$ *en todo caso* $H\left(e^r_{2^{m+1}}\right) = 0$ *si* $0 \leq r < 2^{m+1}$, *i.e.* $H \in \mathcal{I}_{2^{m+1}}$. *Consideremos por otra parte* $f \in l^1(\mathbb{Z})^*$ *tal que* $\langle f, \Theta_1 - \Theta_2 \rangle \neq 0$ *y sea* $g \in l^1(\mathbb{Z})^*$ *tal que* $U(g) = f$, *i.e.* $g(n2^{m+1}) = f(n)$ *si* $n \in \mathbb{Z}$, *haciendo* $g(k) = 0$ *si* $2^{m+1} \nmid k$. *Así*

$$H(g) = \langle U(g), \Theta_1 - \Theta_2 \rangle = \langle f, \Theta_1 - \Theta_2 \rangle \neq 0,$$

mientras que si $n \in \mathbb{Z}$ *es*

$$\left(UT^{2^m}\right)(g)(n) = T^{2^m}(g)\left(n2^{m+1}\right) = g\left(n2^{m+1} + 2^m\right) = 0,$$

o sea $\left(T^{2^m}\right)^*(H)(g) = 0$. *Pero entonces* $\left(T^{2^m}\right)^*(H) \neq H$ *y* $H \notin \mathcal{I}_{2^m}$.

11.9. Sobre $L^1(\mathcal{G})^{**}$ siendo $\mathcal{G}$ grupo no discreto

Lema 11.33 [40] *([19], Th. 3.12) Sean* $\mathcal{U}$ *álgebra de Banach abeliana y* $\mathcal{J}$ *subespacio de Banach de* $\mathcal{U}^*$. *Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{U}^*\mathcal{U} \subseteq \mathcal{J}$.

(ii) $\mathcal{U}^{**} \square \mathcal{J}^o = \{0_{\mathcal{U}^{**}}\}$.

(iii) $\mathcal{J}^o\mathcal{U} = \{0_{\mathcal{U}^{**}}\}$.

[40] V. [48].

Demostración 11.34 *$(i \Rightarrow ii)$ Si $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$ y $\lambda \in \mathcal{U}^{*}$, $\langle \lambda, \Phi \Box \Psi \rangle = \langle \Psi\lambda, \Phi \rangle$. Por la hipótesis $\Psi\lambda = 0_{\mathcal{U}^*}$ si $\Psi \in \mathcal{J}^o$. Así $\Phi \Box \Psi = 0_{\mathcal{U}^{**}}$.*

$(ii \Rightarrow iii)$ Si $\Psi \in \mathcal{J}^o$, $x \in \mathcal{U}$ y $\lambda \in \mathcal{U}^*$ es

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \Psi x \rangle &= \langle x\lambda, \Psi \rangle \\ &= \langle \lambda x, \Psi \rangle \quad \textit{(pues } \mathcal{U} \textit{ es abeliana)} \\ &= \langle \lambda, x\Psi \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

$(iii \Rightarrow i)$ Supongamos $\lambda x \notin \mathcal{J}$ para ciertos $x \in \mathcal{U}$ y $\lambda \in \mathcal{U}^*$. Por el teorema de Banach-Hahn existe $\Psi \in \mathcal{J}^o$ tal que

$$0 \neq \langle \lambda x, \Psi \rangle = \langle x\lambda, \Psi \rangle = \langle x, \lambda\Psi \rangle,$$

lo que contradice (iii).

Corolario 11.35 *Si se verifica cualquiera de las condiciones anteriores se tiene $\mathcal{J}^o \subseteq J(\mathcal{U}^{**}, \Box)$, valiendo la igualdad si $\mathcal{J} = \overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}$ donde $\Phi_{\mathcal{U}}$ es el espacio ideal maximal de $\mathcal{U}$.*

Demostración 11.36 *Evidentemente $\mathcal{J}^o$ es ideal a izquierda de $\mathcal{U}^{**}$ y además $\mathcal{J}^o \subseteq \mathcal{QR}(\mathcal{U})$ (V. §13.15). En consecuencia $\mathcal{J}^o \subseteq J(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ (cf. [18], Ch. III, §24, Prop. 16). En particular, es fácil ver que $\overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o$ es ideal bilátero. Además $(\mathcal{U}^{**}, \Box) / \overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o$ es semisimple: sea $m \in J\left[(\mathcal{U}^{**}, \Box) / \overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o\right]$ y sea $p : (\mathcal{U}^{**}, \Box) \rightarrow (\mathcal{U}^{**}, \Box) / \overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o$ la proyección al cociente. Sea $\Theta \in \mathcal{U}^{**}$ tal que $p(\Theta) = m$ y sea $h \in \Phi_{\mathcal{U}}$. Notar que quedan definidos $\widehat{h} \in \Phi_{(\mathcal{U}^{**}, \Box)}$ tal que $\widehat{h}(\Lambda) = \Lambda(h)$ si $\Lambda \in \mathcal{U}^{**}$ y $\widetilde{h} \in \Phi_{(\mathcal{U}^{**}, \Box)/\overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o}$ tal que $\widetilde{h}(p(\Lambda)) = \widehat{h}(\Lambda)$. Luego*

$$0 = \widetilde{h}(m) = \widetilde{h}(p(\Theta)) = \widehat{h}(\Theta) = \Theta(h).$$

Como h es arbitrario $\Theta \in \overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o$ y $m = 0_{\mathcal{U}^{**}/\overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o}$. Así

$$J(\mathcal{U}^{**}, \Box) \subseteq \overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o,$$

pues si $\Lambda \in J(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ y π es representación irreducible de $(\mathcal{U}^{**}, \Box) / \overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o$ en un espacio vectorial X, $\pi \circ m$ es representación irreducible de $\mathcal{U}^{**}$ en X. Luego $(\pi \circ m)(\Lambda) = 0_X$ y

$$m(\Lambda) \in J\left[(\mathcal{U}^{**}, \Box) / \overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o\right],$$

i.e. $m(\Lambda) = 0_{\mathcal{U}^{**}/\overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o}$ y $* \in \overline{\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rangle}^o$.

Corolario 11.37 *([19]; [58]) Sea $\mathcal{G}$ grupo abeliano localmente compacto no discreto. Entonces $L^1(\mathcal{G})^{**}$ es no conmutativo y no semisimple.*

Demostración 11.38 *Como $\mathcal{G}$ es no discreto $C_b(\mathcal{G})$ es subespacio de Banach propio de $L^1(\mathcal{G})^*$, y por el teorema de Banach-Hahn $C_b(\mathcal{G})^o$ es no nulo. Razonando como en la Prop. 6.11 vemos que $L^1(\mathcal{G})^* L^1(\mathcal{G}) \subseteq C_b(\mathcal{G})$, y por el Corolario 11.35 $C_b(\mathcal{G})^o \subseteq J(L^1(\mathcal{G})^{**}, \Box)$. Como $L^1(\mathcal{G})$ tiene aproximación acotada de la unidad, por el Teorema 12.27 existe $E \in U_d(L^1(\mathcal{G})^{**}, \Box)$. Si $F \in C_b(\mathcal{G})^o$ es no nulo por el Lema 11.33(ii) es $E \Box F = 0_{\mathcal{U}^{**}}$ y $F \Box E = F$ es no nulo.*

12. Dualidad general en álgebras y espacios de Banach

12.1. Espacios introvertidos

Definición 12.1 *Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach y X un $\mathcal{U}$-submódulo a izquierda (resp. a derecha) de $\mathcal{U}^*$. Decimos que X es espacio introvertido a izquierda (resp. a derecha) si $\mathcal{U}^{**}X \subseteq X$ (resp. si $X\mathcal{U}^{**} \subseteq X$). Decimos que X es introvertido si lo es a ambos lados.*

Teorema 12.2 *Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach y X un $\mathcal{U}$-submódulo de $\mathcal{U}^*$.*

(i) (cf. [89], Lemma 1.2) X es introvertido a izquierda si y solo si dado $\lambda \in X$ se tiene $\overline{R_\lambda^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}([\mathcal{U}]_1)}^{w^*} \subseteq X$.

(ii) X es introvertido a izquierda si es w^*-cerrado o si $X \subseteq \mathrm{WAP}(\mathcal{U})$[41].

Demostración 12.3 (i) *Sean $\lambda \in X$ y $\eta \in \overline{L_\lambda^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}([\mathcal{U}]_1)}^{w^*}$, digamos*

$$\eta = w^* - \lim_{i\in I} (a_i\lambda).$$

Pasando eventualmente a alguna subred, podemos suponer que existe

$$\Phi = w^* - \lim_{i\in I} \iota_{\mathcal{U}}(a_i). \tag{111}$$

Si $b \in \mathcal{U}$ tenemos

$$\langle b, \eta \rangle = \lim_{i\in I} \langle b, a_i\lambda \rangle = \lim_{i\in I} \langle ba_i, \lambda \rangle = \lim_{i\in I} \langle a_i, \lambda b \rangle = \langle \lambda b, \Phi \rangle = \langle b, \Phi\lambda \rangle,$$

i.e. $\eta = \Phi\lambda$ y por ello $\eta \in X$. Recíprocamente, sean $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ y $\lambda \in X$. Podemos suponer (111) para alguna red acotada $\{a_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{U}$. Entonces $\Phi\lambda = w^*\text{-}\lim_{i\in I}(a_i\lambda)$ e inferimos que $\Phi\lambda \in X$.

[41]V. la Obs. 3.3.

(ii) *La primer afirmación es ahora evidente. Sea* $\lambda \in X$ *y supongamos* $X \subseteq \mathrm{WAP}(\mathcal{U})$ *dado* $\lambda \in X$. *Por el Teorema de Mazur,* $\overline{R_{\lambda}^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}([\mathcal{U}]_1)}$ *es débilmente compacto y, por lo tanto,* w^**-compacto. Entonces*

$$R_{\lambda}^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}([\mathcal{U}]_1) \subseteq \overline{R_{\lambda}^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}([\mathcal{U}]_1)} \subseteq X$$

y $\overline{R_{\lambda}^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}([\mathcal{U}]_1)}^{w^*} \subseteq X$.

Proposición 12.4 *(cf. [28], Prop. 1.16) Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach y* X *un* $\mathcal{U}$*-submódulo de* $\mathcal{U}^*$.

(i) Si X es introvertido a izquierda (resp. a derecha) X^o es ideal cerrado a derecha (resp. a izquierda) de $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$.

(ii) $\mathcal{U}^{**}/X^o \approx X^*$.

(iii) Si X es $\mathcal{U}$-submódulo introvertido de $\mathcal{U}^*$, X^* admíte la estructura de un álgebra de Banach.

(iv) Sea X un $\mathcal{U}$-submódulo introvertido de $\mathcal{U}^*$ e I ideal cerrado de $\mathcal{U}$. Si $j : I \hookrightarrow \mathcal{U}$ e $Y = \overline{j^*(X)}$, Y es un I-submódulo introvertido de I^*.

(v-a) Sean X un $\mathcal{U}$-submódulo de $\mathcal{U}^*$, I ideal cerrado de $\mathcal{U}$, $j : I \hookrightarrow \mathcal{U}$ e $Y = \overline{j^*(X)}$. Existe $G : (Y^*, \Box) \to (X^*, \Box)$ monomorfismo.

(v-b) Y^* se identifica con un ideal bilátero de X^*.

(v-c) $G(Y^*) = \{j^{**}(M)|_X : M \in I^{**}\}$ y

$$G^{-1}[j^{**}(M)|_X] = M|_Y \text{ si } M \in I^{**}.$$

(v-d) Si $j^*(X)$ es cerrado G es una inmersión, en cuyo caso Y^* se identifica con un ideal bilátero cerrado de X^*.

(v-e) Si j^* es acotada inferiormente entonces G es suryectiva.

(v-f) Si $j^*(X)$ es cerrado y j^* es acotada inferiormente, X es $\mathcal{U}$-submódulo introvertido de $\mathcal{U}^*$ si a su vez $j^*(X)$ lo es de I^*.

Demostración 12.5 **(i)** *Es inmediato.*

(ii) *Definimos* $F_{\mathcal{U},X} : X^* \to \mathcal{U}^{**}/X^o$, *a saber: fijada* $x^* \in X^*$ *por el teorema de Banach-Hahn podemos considerar una extensión* $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ *de* x^*. *Si* $p : \mathcal{U}^{**} \to \mathcal{U}^{**}/X^o$ *es la proyección al cociente sea* $F_{\mathcal{U},X}(x^*) = p(\Phi)$. *Si* Ψ *fuere otra entensión en* $\mathcal{U}^{**}$ *de* x^* *entonces* $p(\Phi) = p(\Psi)$ *pues* Φ *y* Ψ *coinciden sobre* X, *de modo que* $F_{\mathcal{U},X}$ *está bien definida. Es fácil ver que* $F_{\mathcal{U},X}$ *es un operador lineal continuo e inyectivo. Si* $s \in \mathcal{U}^{**}/X^o$ *y* $\lambda \in X$ *sea* $x_s^*(\lambda) = \langle \lambda, \Phi \rangle$, *donde* $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ *es tal que* $s = p(\Phi)$. *Así* x_s^* *es un elemento bien definido de* X^* *y* $F_{\mathcal{U},X}(x_s^*) = s$, *i.e.* $F_{\mathcal{U},X}$ *es suryectiva. Por el teorema de la función abierta sigue (iv).*

(iii) *Si* X *es introvertido por (iii)* X^o *es ideal bilátero cerrado de* $\mathcal{U}^{**}$. *Luego* $(\mathcal{U}^{**}/X^o, \square)$ *es un álgebra de Banach y si* $x_1^*, x_2^* \in X^*$ *basta hacer*

$$x_1^* \square x_2^* = F_{\mathcal{U},X}^{-1}\left[F_{\mathcal{U},X}(x_1^*) \square F_{\mathcal{U},X}(x_2^*)\right]. \tag{112}$$

(iv) *Ciertamente* Y *es un* I*-submódulo de* I^*. *Sean* $\lambda \in X$ *y* $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *una red de* $[I]_1$ *de modo que existe* $\widetilde{\mu} = w^*\text{-}lim_{\alpha\in A}(a_\alpha j^*(\lambda))$. *Pasando eventualmente a una subred, podemos suponer que existe* $\lambda_0 \in \mathcal{U}^{**}$ *tal que* $\lambda_0 = w^*\text{-lím}_{\alpha\in A}(a_\alpha\lambda)$. *Como* X *es introvertido a izquierda* $\lambda_0 \in X$. *Como* $j^* \in (w^*, w^*)$ *deducimos que*

$$\widetilde{\mu} = w^*\text{-}lim_{\alpha\in A}(a_\alpha j^*(\lambda)) = w^*\text{-}lim_{\alpha\in A} j^*(a_\alpha\lambda) = j^*(\lambda_0),$$

de donde $\widetilde{\mu} \in j^*(X)$. *Así* $j^*(X)$ *resulta introvertido a izquierda y, análogamente, se ve que también lo es a derecha. Es inmediato ahora que* Y *es* I*-submódulo introvertido de* I^*.

(v-a) *Si* $q : I^{**} \to I^{**}/Y^o$ *es la proyección al cociente sea*

$$\begin{gathered} H : I^{**}/Y^o \to \mathcal{U}^{**}/X^o, \\ H(\widetilde{s}) = p(j^{**}(\widetilde{\sigma})) \ \text{ si } \widetilde{s} = q(\widetilde{\sigma}). \end{gathered} \tag{113}$$

Ahora, H *está bien definida: si* $q(\widetilde{\sigma}) = q(\widetilde{\tau})$ *existe* $\widetilde{\rho} \in Y^o$ *tal que* $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau} + \widetilde{\rho}$. *Si* $\lambda \in X$ *resulta*

$$\langle \lambda, j^{**}(\widetilde{\rho}) \rangle = \langle j^*(\lambda), \widetilde{\rho} \rangle = 0,$$

i.e. $j^{**}(\widetilde{\rho}) \in X^o$. *Por ello*

$$0_{\mathcal{U}^{**}/X^o} = p(j^{**}(\widetilde{\rho})) = p(j^{**}(\widetilde{\sigma})) - p(j^{**}(\widetilde{\tau})).$$

Es fácil ver que H es lineal. Además p y q son sendos homomorfismos de álgebras y si $\widetilde{s} = q(\widetilde{\sigma})$ y $\widetilde{t} = q(\widetilde{\tau})$ en I^{**}/Y^o tenemos

$$\begin{aligned} H\left(\widetilde{s}\Box\widetilde{t}\right) &= H\left(q\left(\widetilde{\sigma}\Box\widetilde{\tau}\right)\right) \\ &= p\left(j^{**}\left(\widetilde{\sigma}\Box\widetilde{\tau}\right)\right) \\ &= p\left(j^{**}\left(\widetilde{\sigma}\right)\Box j^{**}\left(\widetilde{\tau}\right)\right) \\ &= p\left(j^{**}\left(\widetilde{\sigma}\right)\right)\Box p\left(j^{**}\left(\widetilde{\tau}\right)\right) \\ &= H\left(\widetilde{s}\right)\Box H\left(\widetilde{t}\right). \end{aligned}$$

Por otra parte, si $H(\widetilde{s}) = 0_{\mathcal{U}^{**}/X^o}$ entonces $j^{**}(\widetilde{\sigma}) \in X^o$, donde $\widetilde{\sigma} \in I^{**}$ y $\widetilde{s} = q(\widetilde{\sigma})$. Por lo tanto si $\lambda \in X$ vemos que

$$\langle j^{*}(\lambda), \widetilde{\sigma}\rangle = \langle \lambda, j^{**}(\widetilde{\sigma})\rangle = 0$$

y podemos concluir que $\widetilde{\sigma} \in Y^o$. Así $\widetilde{s} = 0_{I^{**}/Y^o}$ y H es inyectiva. Finalmente, si $F_{I,Y} : I^{*} \to I^{**}/Y^o$ es el isomorfismo construído como en (iv), sea

$$G : Y^{*} \to X^{*},\ G = F_{\mathcal{U},X}^{-1} \circ H \circ F_{I,Y}.$$

Claramente $G : (Y^{*}, \Box) \to (X^{*}, \Box)$ es monomorfismo.

(v-b) *Sean $y^{*} \in Y^{*}$, $x^{*} \in X^{*}$. Si $M \in I^{**}$ es extensión de y^{*} entonces $F_{I,Y}(y^{*}) = q(M)$ y $H(F_{I,Y}(y^{*})) = p(j^{**}(M))$. Si además $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ fuere extensión de x^{*} en conformidad con (112) será*

$$\begin{aligned} G(y^{*})\Box x^{*} &= F_{\mathcal{U},X}^{-1}\left[F_{\mathcal{U},X}\left(G(y^{*})\right)\Box F_{\mathcal{U},X}(x^{*})\right] \\ &= F_{\mathcal{U},X}^{-1}\left[H\left(F_{I,Y}(y^{*})\right)\Box F_{\mathcal{U},X}(x^{*})\right] \\ &= F_{\mathcal{U},X}^{-1}\left[p\left(j^{**}(M)\right)\Box p(\Phi)\right] \\ &= F_{\mathcal{U},X}^{-1}\left[p\left(j^{**}(M)\Box\Phi\right)\right]. \end{aligned} \tag{114}$$

Como $j^{**}(I^{**})$ es ideal bilátero de $\mathcal{U}^{**}$ existe $N \in I^{**}$ tal que

$$p\left(j^{**}(M)\Box\Phi\right) = p\left(j^{**}(N)\right) = H\left(F_{I,Y}(N\mid_Y)\right). \tag{115}$$

Así $N\mid_Y \in Y^{*}$ y por (114) y (115) es

$$G(y^{*})\Box x^{*} = F_{\mathcal{U},X}^{-1}\left[H\left(F_{I,Y}(N\mid_Y)\right)\right] = G(N\mid_Y).$$

Análogamente se ve que $G(Y^{*})$ es ideal a izquierda.

(v-c) *Por construcción es fácil ver que*

$$G(y^{*}) = j^{**}(M)\mid_X \quad si \quad y^{*} \in Y^{*}, \tag{116}$$

donde $M \in I^{**}$ es cualquier extensión de y^*. Además, si $M \in I^{**}$ tenemos

$$\begin{aligned} G\left(M\mid_Y\right) &= \left(F_{\mathcal{U},X}^{-1} \circ H\right)\left(F_{I,Y}\left(M\mid_Y\right)\right) \\ &= F_{\mathcal{U},X}^{-1}\left(H\left(q\left(M\right)\right)\right) \\ &= F_{\mathcal{U},X}^{-1}\left(p\left(j^{**}\left(M\right)\right)\right) \\ &= j^{**}\left(M\right)\mid_X . \end{aligned} \tag{117}$$

Finalmente, si $M \in I^{**}$ sea $\widetilde{G}\left[j^{**}\left(M\right)\mid_X\right] = M\mid_Y$. Vemos que $\widetilde{G}$ está bien definida: si $j^{**}\left(M\right)\mid_X = 0$, $j^{**}\left(M\right) \in X^o$. Luego

$$H(q(M)) = 0_{\mathcal{U}^{**}/X^o}$$

y por (117) $G\left(M\mid_Y\right) = 0_{X,\mathbb{C}}$. Como G es inyectiva $M\mid_Y = 0_{Y,\mathbb{C}}$. Es claro ahora que $\widetilde{G} = G^{-1}$.

(v-d) *Si $k : Y \hookrightarrow I^*$ y $h : X \hookrightarrow \mathcal{U}^*$, $G \circ k^* = \left(j^* \circ h\right)^*$. Como k^* es suryectiva sigue que*

$$\operatorname{ran}\left(G\right) = \operatorname{ran}\left[\left(j^* \circ h\right)^*\right]. \tag{118}$$

Luego $\operatorname{ran}\left(G\right)$ será cerrado si y solo si $\operatorname{ran}\left(j^* \circ h\right)$ lo es, lo cual es cierto por hipótesis (V. el Corolario 13.59).

(v-e) *Por (118), como $\left(j^* \circ h\right)^* = h^* \circ j^{**}$ y h^* es suryectiva, G será suryectiva si j^{**} lo es. En efecto, siendo j^* acotada inferiormente podemos escribir $j^* = l \circ j^* \mid^{\overline{j^*(\mathcal{U}^*)}}$, donde $l : \overline{j^*\left(\mathcal{U}^*\right)} \hookrightarrow I^*$. Como $j^* \mid^{\overline{j^*(\mathcal{U}^*)}}$ es isomorfismo y l^* es suryectiva, $j^{**} = (j^* \mid^{\overline{j^*(\mathcal{U}^*)}})^* \circ l^*$ resulta suryectiva.*

(v-f) *Asumamos que j^* es acotada inferiormente y que $j^*\left(X\right)$ es I-submódulo cerrado de I^*. Ahora $j^*\left(X\right)$ y dados $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ y $\lambda \in X$ veremos que $\Phi\lambda \in X$. Como $\Phi\mid_X \in X^*$ por (v-e) existe $y^* \in Y^*$, único por (v-a), tal que por (116)*

$$G\left(y^*\right) = \Phi\mid_X = j^{**}\left(M\right)\mid_X,$$

donde $M \in I^{**}$ es cualquier extensión de y^*. Como $j^*\left(X\right)$ es I-submódulo introvertido de I^*, $Mj^*\left(\lambda\right) \in j^*\left(X\right)$. Pero $Mj^*\left(\lambda\right) = j^*\left(M\lambda\right)$ y siendo j^* acotada inferiormente ha de ser inyectiva. Luego $M\lambda \in X$ y X es introvertido a izquierda. Análogamente también lo será a derecha y sigue la afirmación.

Proposición 12.6 *Sean $\mathcal{U}$ una C^*-álgebra, X un $\mathcal{U}$-submódulo de Banach de $\mathcal{U}^*$. Entonces X es introvertido, X^o es ideal w^*-cerrado de $\left(\mathcal{U}^{**}, \Box\right)$ y $\left(X^*, \Box\right)$ es C^*-álgebra.*

Demostración 12.7 *Por la Prop. 9.3* $\mathcal{U}$ *es Arens regular. Por el Teorema 3.1* $\mathcal{U}^* = \mathrm{WAP}(\mathcal{U})$ *y por el Teorema 12.2(ii)* X *es introvertido. Sean* $\Phi \in X^*$, $\lambda \in X$ *y* $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$, *digamos* $\Psi = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, \iota_{\mathcal{U}}(b_j)$. *Como* $\Psi\lambda \in X$ *tenemos*

$$\langle \lambda, \Phi \square \Psi \rangle = \langle \Psi\lambda, \Phi \rangle = 0$$

y como X *es* $\mathcal{U}$*-módulo a derecha*

$$\langle \lambda, \Psi \square \Phi \rangle = \lim_{j\in J} \langle b_j, \Phi\lambda \rangle = \lim_{j\in J} \langle \lambda b_j, \Phi \rangle = 0.$$

Así X^o *es ideal de* $(\mathcal{U}^{**}, \square)$, *evidentemente* w^**-cerrado. Luego* X^o *es cerrado y basta invocar la Prop. 12.4(ii).*

12.2. Regularidad y formas bilineales reflexivas

Definición 12.8 [42][43]*Sean* X, Y *espacios de Banach,* $m \in B(X, Y; \mathbb{C})$ *una forma bilineal acotada sobre* $X \times Y$. *Hay* $u_m \in \mathcal{B}(X; Y^*)$, $v_m \in \mathcal{B}(Y; X^*)$ *únicos tales que*

$$m(x, y) = \langle x, u_m(y) \rangle = \langle y, v_m(x) \rangle \ \text{ si } x \in X \text{ e } y \in Y.$$

Por el Teorema de Gantmacher, como $v_m = u_m^* \circ \iota_Y$, v_m *será débilmente compacto si* u_m *lo fuere. Luego* u_m *es débilmente compacto si y solo si* v_m *lo es, en cuyo caso diremos que* m *es débilmente compacta. Asimismo, diremos que* m *es reflexiva si hay un espacio reflexivo* R *y aplicaciones* $\phi \in \mathcal{B}(X; R)$ *y* $\psi \in \mathcal{B}(Y; R^*)$ *tales que* $m(x, y) = \langle \phi(x), \psi(y) \rangle$ *para todo* $x \in X$ *e* $y \in Y$.

Observación 12.9 *En analogía a la Observación 2.9 y con la notación anterior, las extensiones de Arens de* m *son*

$$m^{***}(x^{**}, y^{**}) = \langle y^{**}, u_m^{*\,*}(x^{**}) \rangle \ \text{ y } m^{\tau***\tau}(x^{**}, y^{**}) = \langle x^{**}, v_m^{*\,*}(y^{**}) \rangle,$$

donde $x^{**} \in X^{**}$ *e* $y^{**} \in Y^{**}$.

Teorema 12.10 *(cf. [129], Th. 2.2) Consideremos* X, Y *espacios de Banach,* $m \in B(X, Y; \mathbb{C})$ *una forma bilineal acotada sobre* $X \times Y$. *Son equivalentes:*

(i) m es regular.

[42] *Palabras clave:* Operadores débilmente compactos. Teorema de Gantmacher. Grupos unimodulares.

[43] V. [54], [9]. Sobre regularidad de álgebras tensoriales v. [130], [11].

(ii) m es débilmente compacta.

(iii) m es reflexiva.

Demostración 12.11 *$(i \Rightarrow ii)$ Bastará ver que $u_m^* : Y^{**} \to X^*$ es (w^*, w)-continua. Sea $\{y_i^{**}\}_{i\in I}$ una red w^*-convergente a cero en Y^{**}. Si $i \in I$ y $x^{**} \in X^{**}$ tenemos*

$$\langle u_m^* (y_i^{**}), x^{**}\rangle = \langle y_i^{**}, u_m^{**}(x^{**})\rangle = \langle x^{**}, v_m^{**} (y_i^{**})\rangle = \langle v_m^* (x^{**}), y_i^{**}\rangle,$$

de donde $\lim_{i\in I} \langle u_m^* (y_i^{**}), x^{**}\rangle = 0$.

$(ii \Rightarrow iii)$ Como u_m^* se asume débilmente compacta por el Teorema 13.27 hay un espacio reflexivo Z y operadores $\phi \in \mathcal{B}(X; Z)$, $\psi \in \mathcal{B}(Z; Y^*)$ de modo que $u_m = \psi \circ \phi$ (cf. [31]). Entonces si $x \in X$ e $y \in Y$ es

$$m(x, y) = \langle y, u_m(x)\rangle = \langle y, \psi (\phi (x))\rangle = \langle \phi (x), (\psi^* \circ \iota_Y) (y)\rangle .$$

$(iii \Rightarrow i)$ Por hipótesis hay un espacio reflexivo R y aplicaciones $\phi \in \mathcal{B}(X; R)$ y $\psi \in \mathcal{B}(Y; R^*)$ tales que $m(x, y) = \langle \phi(x), \psi(y)\rangle$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Si $x^{**} \in X^{**}$ e $y^{**} \in Y^{**}$ vemos que

$$m^{***}(x^{**}, y^{**}) = \langle \phi^{**} (x^{**}), \psi^{**} (y^{**})\rangle . \qquad (119)$$

Como R es reflexivo $\mathcal{R}(\phi^{**}) \subseteq \iota_R(R)$ y por el Teorema 13.33 ϕ es débilmente compacta. Más aún, $\phi^{**} \in (w^*, w)$ y por (119) m^{***} es w^*-continua a izquierda. Análogamente, como R^* es reflexivo ψ resulta débilmente compacta. Asimismo $\psi^{**} \in (w^*, w)$ y m^{***} también es w^*-continua a derecha.

Corolario 12.12 **(i)** *En las condiciones anteriores, m es regular si y solo si m^{***} es regular.*

(ii) *Sean X_0 e Y_0 subespacios de Banach de X e Y respectivamente. Entonces $m \in B(X; Y)$ será regular si la restricción $m\mid_{X_0\times Y_0}$ también lo es.*

(iii) *Si además $p : X \to X/X_0$, $q : Y \to Y/Y_0$ son las proyecciones al cociente, $m_0 \in \mathcal{B}(X/X_0; Y/Y_0)$ y $m = m_0 \circ (p \times q)$ en $\mathcal{B}(X; Y)$. Entonces m es regular si y solo si m_0 lo es.*

Demostración 12.13 **(i)** *De la Obs. 12.9 m^{***} es regular si y solo si u_m^{**} es débilmente compacta. Basta aplicar el teorema de Gantmacher.*

(ii) *Es inmediato.*

(iii) *Sean* $u_m \in \mathcal{B}(X; Y^*)$, $u_{m_0} \in \mathcal{B}(X/X_0; (Y/Y_0)^*)$ *los operadores inducidos por* m *y* m_0 *respectivamente. Si* $x \in X$ *e* $y \in Y$ *tenemos*

$$\begin{aligned} \langle y, q^*(u_{m_0}(p(x)))\rangle &= \langle q(y), u_{m_0}(p(x))\rangle \\ &= m_0(p(x), q(y)) \\ &= m(x,y) \\ &= \langle y, u_m(x)\rangle, \end{aligned} \tag{120}$$

e inferimos que $q^* \circ u_{m_0} \circ p = u_m$. *En consecuencia es claro que* u_m *es débilmente compacto si* u_{m_0} *lo es y la condición es suficiente. Recíprocamente, sea* u_m *débilmente compacta y veamos que* $u_{m_0}^* \in (w^*, w)$, *de donde seguirá la afirmación nuevamente del teorema de Gantmacher. Por (120) vemos que* $\mathcal{R}(u_m^*) \subseteq Y_0^{\perp}$. *Además* $\mathcal{R}(q^*) = Y_0^{\perp}$ *y* $q^* \mid^{\mathcal{R}(q^*)}$ *es isométrica, de modo que por el teorema de la función abierta podemos escribir* $u_{m_0} \circ p = (q^*)^{-1} \circ u_m$. *Sea* $\{\eta_i\}_{i\in I}$ *una red en* $(Y/Y_0)^{**}$ *tal que* $w^*\text{-lím}_{i\in I}\, \eta_i = 0$. *Dado* $M \in (X/X_0)^{**}$ *sea* $\{x_j\}_{j\in J}$ *una red acotada tal que* $M = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, \iota_{X/X_0}(p(x_j))$. *Pasando eventualmente a una subred, podemos suponer que existe* $y_0^* \in Y^*$ *tal que* $y_0^* = w\text{-lím}_{j\in J}\, u_m(x_j)$. *Si* $i \in I$ *tenemos*

$$\begin{aligned} \left\langle u_{m_0}^*(\eta_i), M\right\rangle &= \lim_{j\in J} \left\langle p(x_j), u_{m_0}^*(\eta_i)\right\rangle \\ &= \lim_{j\in J} \left\langle (q^*)^{-1}(u_m(x_j)), \eta_i\right\rangle \\ &= \lim_{j\in J} \left\langle u_m(x_j), \left((q^*)^{-1}\right)^*(\eta_i)\right\rangle \\ &= \left\langle y_0^*, \left((q^*)^{-1}\right)^*(\eta_i)\right\rangle \\ &= \left\langle \left((q^*)^{-1}\right)(y_0^*), \eta_i\right\rangle, \end{aligned} \tag{121}$$

y de (121) es $\text{lím}_{i\in I} \left\langle u_{m_0}^*(\eta_i), M\right\rangle = 0$ *y sigue la afirmación.*

Teorema 12.14 *(cf. [129],Th. 3.1) Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach con unidad* e *y* $m \in \mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*; \mathbb{C})$ *la aplicación* $m(x,f) =_x f$, *con* $_xf(y) = f(xy)$ *si* $x, y \in \mathcal{U}$ *y* $f \in \mathcal{U}^*$. *Entonces* m *es regular si y solo si* $\mathcal{U}$ *es reflexiva.*

Demostración 12.15 *Si* $x \in \mathcal{U}$ *y* $f \in \mathcal{U}^*$ *tenemos*

$$m_{\iota_{\mathcal{U}}(e)}(x,f) = f(x) = \langle x, Id_{\mathcal{U}^*}(f)\rangle. \tag{122}$$

Si m *fuere regular por (122) el operador* $Id_{\mathcal{U}^*}$ *será débilmente compacto. Como* $(Id_{\mathcal{U}})^* = Id_{\mathcal{U}^*}$ *por el teorema de Gantmacher* $I_{\mathcal{U}}$ *es débilmente compacta.*

Así $[\mathcal{U}]_1$ *es* w*-relativamente compacta,* $\overline{[\mathcal{U}]_1}^{w} = [\mathcal{U}]_1$ *por el Teo. 13.61(i) y como* $\iota_{\mathcal{U}} \in (w, w^*)$ *entonces* $\iota_{\mathcal{U}}([\mathcal{U}]_1)$ *es* w^**-compacto. Luego* $\iota_{\mathcal{U}}([\mathcal{U}]_1) = [\mathcal{U}^{**}]_1$ *por el teorema de Goldstine y* $\mathcal{U}$ *es reflexivo. Recíprocamente, si* $\mathcal{U}$ *es reflexivo dada* $\phi \in \mathcal{U}^{**}$ *existe* $x_\phi \in \mathcal{U}$ *tal que* $\iota_{\mathcal{U}}(x_\phi) = \phi$ *y si* $(x, f) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}^*$ *se tiene*

$$m_\phi(x, f) = \langle {}_x f, \phi \rangle = \langle x_\phi, {}_x f \rangle = \langle x x_\phi, f \rangle = \langle f, \iota_{\mathcal{U}}(x x_\phi) \rangle .$$

Además $[\mathcal{U}]_{x_\phi}$ *será débilmente compacto y como* $\iota_{\mathcal{U}} \in (w, w)$ *la aplicación* $x \to \iota_{\mathcal{U}}(x x_\phi)$ *es débilmente compacta y sigue la tesis.*

Corolario 12.16 **(i)** *Si* X *es espacio de Banach, la forma bilineal*

$$m \in \mathcal{B}(X, X^*; \mathbb{C}), \; m(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle$$

es regular si y solo si X *es reflexivo.*

(ii) *Sea* $\mathcal{U}$ *álgebra de Banach con unidad* e*. La forma bilineal*

$$m \in \mathcal{B}\left(\mathcal{U}, l^1(\mathcal{U}); l^1(\mathcal{U})\right), \; m\left(a, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \{ab_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es regular si y solo si $\mathcal{U}$ *es reflexiva.*

(iii) *Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach munida de aproximación acotada de la unidad. Luego la forma bilineal* $m \in \mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*; \mathcal{U}^*)$, $m(a, a^*) =_a a^*$ *es regular si y solo si* $\mathcal{U}$ *es reflexiva.*

(iv) *Sean* G *grupo localmente compacto unimodular* σ*-compacto munido de una medida de Haar invariante a derecha*[44]*,*

$$m \in \mathcal{B}\left(L^1(G), L^\infty(G); L^\infty(G)\right), \; m(x, f) = x * f.$$

Entonces m *es regular si y solo si* G *es finito.*

Demostración 12.17 **(i)** *Es inmediato.*

[44]Indicamos $x * f$ a la convolución de la medida $x(t)dt$, en la que dt es la medida de Haar de G y $x \in L^1(G)$, con la función $f \in L^\infty(G)$. Más generalmente, si $\mu \in \mathrm{M}(G)$ y $f \in L^p(G)$ es boreliana, con $1 \le p \le \infty$, la integral $(\mu * f)(t) = \int_G f\left(s^{-1}t\right) d\mu(s)$ existe y es finita salvo algún subconjunto N de medida de Haar nula de G cuando p es finito o localmente nulo respecto a la medida de Haar si $p = \infty$ (i.e. la medida de Haar de la intersección de N con cada subconjunto compacto de G es nula). Redefiniendo $\mu * f$ como cero sobre N se tiene $\mu * f \in L^p(G)$ y $\|\mu * f\|_p \le \|\mu\| \, \|f\|_p$ (V. [73], Ch. V, Th. 20.12).

(ii) *Si $\mathcal{U}$ no fuera reflexiva habrá sucesiones inyectivas acotadas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{U}$ y $\{b_m^*\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{U}^*$ tales que $\{\langle a_n, b_m\rangle\}$ tiene límites iterados distintos ([64], Corollaire 2). Si $p\in\mathbb{N}$ escribiremos $e_p = \{\delta_{p,q}e\}_{p\in\mathbb{N}}$ en $l^1(\mathcal{U})$. El elemento $b = \{b_m^*\}_{m\in\mathbb{N}}$ pertenece a $l^1(\mathcal{U})^*$ y si $n, m\in\mathbb{N}$ es*

$$m_b(a_n, e_m) = \langle a_n e_m, b\rangle = \langle a_n, b_m\rangle ,$$

i.e. $\{m_b(a_n, e_m)\}$ tiene límites iterados distintos y m es no regular. Recíprocamente, basta notar que si $\lambda\in l^1(\mathcal{U})^*$ el operador u_{m_λ} es siempre débilmente compacto pues su dominio es reflexivo.

(iii) *La suficiencia es inmediata. Por otra parte, vimos en la Prop. 4.1 que si $\{e_j\}_{j\in J}$ es aproximación acotada de la unidad de $\mathcal{U}$ a derecha, considerando eventualmente alguna subred, $\Psi_0 = w^*\text{-lím}_{j\in J}\,\iota_{\mathcal{U}}(b_j)$ define une unidad a derecha de $(\mathcal{U}^{**}, \square)$. Entonces si $(a, a^*)\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}^*$ resulta*

$$m_{\Psi_0}(a, a^*) = \langle {}_a a^*, \Psi_0\rangle = \lim_{j\in J}\langle a e_j, a^*\rangle = \langle a, a^*\rangle ,$$

de donde sigue que $\mathcal{U}$ es reflexivo ya que $v_{\Psi_0} = Id_{\mathcal{U}^*}$ es débilmente compacto.

(iv) *Sean $x, y\in L^1(G)$, $f\in L^\infty(G)$. Si indicamos $\overset{\vee}{x}(s) \triangleq x(s^{-1})$ para $s\in G$, $\overset{\vee}{x}\in L^1(G)$ pues G es unimodular. Como*

$$\begin{aligned}
\left\langle y, {}_{\overset{\vee}{x}} f\right\rangle &= \left\langle \overset{\vee}{x} * y, f\right\rangle \\
&= \int_G\left(\int_G x\left(s^{-1}\right) y\left(s^{-1}t\right) ds\right) f(t)dt \\
&= \int_G\left(\int_G x(s)\, y(st)\, ds\right) f(t)dt \\
&= \int_G\left(\int_G x\left(ut^{-1}\right) y(u)\, du\right) f(t)dt \\
&= \int_G\left(\int_G x\left(ut^{-1}\right) f(t)dt\right) y(u)\, du \\
&= \int_G\left(\int_G x(ut)\, f(t^{-1})dt\right) y(u)\, du \\
&= \int_G\left(\int_G x(v)\, f(v^{-1}u)dv\right) y(u)\, du \\
&= \langle y, x * f\rangle
\end{aligned}$$

resulta $x * f =_{\overset{\vee}{x}} f$. *Razonando como en el Corolario (iii) vemos que* m *es regular si y solo si* $L^1(G)$ *es reflexiva, lo que equivale a la finitud de* G. [45]

Ejemplo 12.18 *Sea* $m : c(\mathbb{N}) \times c_0(\mathbb{N}) \to c_0(\mathbb{N})$, $m(a,x) = a \cdot x$, *donde* $\cdot$ *denota el producto coordenada a coordenada. Tengamos presente que*

$$c_0(\mathbb{N})^* \approx l^1(\mathbb{N}),\ l^1(\mathbb{N})^* \approx l^\infty(\mathbb{N}),\ c(\mathbb{N})^* \approx l^1(\mathbb{N}) \oplus \mathbb{C},\ c(\mathbb{N})^{**} \approx l^\infty(\mathbb{N}) \oplus \mathbb{C}.$$

Si $\lambda \in l^1(\mathbb{N})$, $a \in c(\mathbb{N})$ *y* $x \in c_0(\mathbb{N})$ *tenemos*

$$m_\lambda(a,x) = \langle a \cdot x, \lambda \rangle = \langle x, \lambda a \rangle.$$

Así $v_{m_\lambda} : c(\mathbb{N}) \to l^1(\mathbb{N})$, $v_{m_\lambda}(a) = a\lambda$, *y el operador*

$$v_{m_\lambda}^* : l^\infty(\mathbb{N}) \to l^1(\mathbb{N}) \oplus \mathbb{C},\ v_{m_\lambda}^*(\Theta) = \lambda\Theta,$$

es (w^*, w)*-continuo. Precisamente, si* $w^*\text{-lím}_{i\in I} \Phi_i = 0$ *en* $l^\infty(\mathbb{N})$, $\Psi \in l^\infty(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{C}$ *e* $i \in I$ *tenemos*

$$\left\langle v_{m_\lambda}^*(\Phi_i), \Psi \oplus n \right\rangle = \langle \lambda\Phi_i, \Psi \oplus n \rangle = \langle \lambda, (\Psi + n) \square \Phi_i \rangle.$$

Como $c_0(\mathbb{N})$ *es Arens regular* $\text{lím}_{i\in I} \left\langle v_{m_\lambda}^*(\Phi_i), \Psi \oplus n \right\rangle = 0$ *y* m *resulta regular.*

---

[45] Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finita positiva $L^1(X,\Sigma,\mu)$ es reflexivo si y solo si Σ es finita, lo cual ciertamente equivale a que $L^1(X,\Sigma,\mu)$ es finito dimensional. La condición es claramente suficiente. Por otra parte, si Σ fuere infinito sea Σ_1 la subclase de partes de Σ de μ medida finita. Sea $\mathcal{F}$ la subfamilia de partes finitas y disjuntas de Σ_1 con el orden parcial de inclusión. Dado $F \in \mathcal{F}$ escribimos

$$M_F(f) = \frac{1}{\#F} \sum_{A \in F} \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu,\ f \in L^\infty(X,\Sigma,\mu).$$

Claramente $M_F \in \left[L^\infty(X,\Sigma,\mu)^*\right]_1$. Por el teorema de Alaoglu, hay una subred $\{M_F\}_{F\in\mathcal{G}}$ de $\{M_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ que w^*-converge a cierto elemento $M \in \left[L^\infty(X,\Sigma,\mu)^*\right]_1$. Supongamos existe $x \in L^1(X,\Sigma,\mu)$ tal que $M = \iota_{L^1(X,\Sigma,\mu)}(x)$. Dado $E \in \Sigma$ de μ-medida finita tenemos

$$\int_E x d\mu = M(\chi_E) = \lim_{F\in\mathcal{G}} M_F(\chi_E) = \lim_{F\in\mathcal{G}} \frac{1}{\#F} = 0.$$

Por la σ-finitud de la medida inferimos que $x = 0$. Pero $M(\mathbf{1}) = 1$, de donde sigue la afirmación.

12.3. Homomorfismos lineales reticulares

Proposición 12.19 [46]*Sea M espacio reticular real y $f : M \to \mathbb{R}$ una forma lineal no nula. Son equivalentes:*

(i) f es un homomorfismo de retículos.

(ii) $f(x^+) \wedge f(x^-) = 0$ para todo $x \in M$.

(iii) $f \geq 0$ y $\ker(f)$ es *hiperplano sólido* de E.[47]

(iv) $\mathbb{R}_{\geq 0} f$ es *rayo extremo* de $L(M, \mathbb{R})^+$.[48]

Demostración 12.20 *($i \Rightarrow ii$) Es inmediato por (164).*

($ii \Rightarrow iii$) Si $x \in M^+$ tenemos

$$f(x) = f\left(x^+\right) \geq f\left(x^+\right) \wedge f\left(x^-\right) = 0.$$

Supongamos ahora que $x \in \ker(f)$ y sea $y \in M$ tal que $|y| \leq |x|$. Como $x = x^+ - x^-$ obtenemos

$$0 = f\left(x^+\right) \wedge f\left(x^-\right) = f\left(x^+\right) = f\left(x^-\right).$$

Luego $f(|x|) = 0$ y podemos concluir que $|y| \in \ker(f)$.

($iii \Rightarrow iv$) Sean $c > 0$ y $g \in L(M, \mathbb{R})^+$ no nulo tales que $cf - g \geq 0$. Entonces $0 \leq g \leq cf$ y $\ker(g) \subseteq \ker(f)$. En consecuencia $\{f, g\}$ es linealmente dependiente y como ambos funcionales son positivos sigue la afirmación.

($iv \Rightarrow ii$) Si $x \in M$ es tal que $f(x^+) > 0$ sea $P \triangleq \cup_{\varrho > 0} \varrho [0, x^+]$. Definimos, para $y \in M^+$, $g(y) = \sup\{f(z) : z \in [0, y] \cap P\}$. Como $f \geq 0$ claramente $0 \leq g(y) \leq f(y)$. Es fácil ver que g es una función positivamente homogénea. Sean $y_1, y_2 \in M^+$ y veamos que

$$g(y_1 + y_2) \leq g(y_1) + g(y_2). \tag{123}$$

[46]*Palabras clave:* Espacios de Banach abstractos. Homomorfismos reticulares. Unidades en espacios de Banach abstractos. Rayos extremos de conjuntos convexos. Conjuntos sólidos. Espacio de estructura de Kakutani.

[47]Un subconjunto S de E se dice *sólido* si dados $x \in S$ e $y \in E$ tales que $|y| \leq |x|$, $y \in S$.

[48]Dado un cono C de E con vértice en cero, una semirecta R contenida en C se dice *rayo extremo de C* si dados $x \in R$ e $y \in C$ tales que $x - y \in C$ necesariamente $y \in R$.

En efecto, si $z \in [0, y_1 + y_2] \cap P$ *existen* $t \in [0,1]$, $x_1 \in [0, x^+]$ *y* $\varrho \geq 0$ *tales que*

$$z = t\,(y_1 + y_2) = \varrho x_1 \leq \varrho x^+.$$

Entonces existe $s \in [0,1]$ *tal que* $ty_1 = s\varrho x^+$ *en* $[0, y_1] \cap P$*, de donde* $f\,(ty_1) \leq g\,(y_1)$. *Análogamente* $f\,(ty_2) \leq g\,(y_2)$ *y como* f *es lineal* $f\,(z) \leq g\,(y_1) + g\,(y_2)$ *y podemos inferir (123). Más aún, si* $\varepsilon > 0$ *sean* $z_j \in [0, y_j] \cap P$ *tales que* $f\,(z_j) > g\,(y_j) - \varepsilon/2$, $j = 1, 2$. *Es fácil ver que* $P + P \subseteq P$*, de donde* $z_1 + z_2 \in [0, y_1 + y_2] \cap P$ *pues*

$$[0, y_1] \cap P + [0, y_2] \cap P \subseteq [0, y_1 + y_2] \cap P.$$

Así

$$g\,(y_1) + g\,(y_2) - \varepsilon < f\,(z_1) + f\,(z_2) = f\,(z_1 + z_2) \leq g\,(y_1 + y_2)\,. \quad (124)$$

Como ε *es arbitrario de (123) y (124)* g *es aditiva sobre* M^+. *Dados ahora* $w_1, w_2 \in M^+$ *escribiremos* $g\,(w_1 - w_2) = g\,(w_1) - g\,(w_2)$. *Si fuere* $w_1 - w_2 = \widetilde{w}_1 - \widetilde{w}_2$*, como*

$$g\,(w_1) + g\,(\widetilde{w}_2) = g\,(w_1 + \widetilde{w}_2) = g\,(\widetilde{w}_1 + w_2) = g\,(\widetilde{w}_1) + g\,(w_2)$$

entonces $g\,(w_1) - g\,(w_2) = g\,(\widetilde{w}_1) - g\,(\widetilde{w}_2)$. *Como* $M = M^+ - M^+$ *queda bien definida* $g : M \to \mathbb{R}$ *si* $g\,(w) = g\,(w_1) - g\,(w_2)$ *cuando* $w = w_1 - w_2$, $w_1, w_2 \in M^+$. *Es fácil ver que* g *deviene lineal y* $0 \leq g \leq f$. *Puesto que* f *define un rayo extremo de* M^+ *existirá* $c > 0$ *tal que* $g = cf$. *Pero*

$$g\left(x^+\right) = \sup_{z \in [0, x^+]} f\,(z) = f\left(x^+\right),$$

de modo que $f = g$. *Ahora, si* $z \in [0, x^-] \cap P$ *existen* $u, v \in [0,1]$, $\rho \geq 0$ *y* $\widetilde{x} \in [0, x^+]$ *tales que*

$$z = ux^- = \rho\widetilde{x} = v\rho x^+. \quad (125)$$

Si $u \leq v\rho$, $v\rho x^+ \leq v\rho x^-$ *y*

$$z = \left(v\rho x^-\right) \wedge \left(v\rho x^+\right) = (v\rho)\left(x^- \wedge x^+\right) = 0.$$

Si $u > v\rho$ *por (125) es*

$$ux^- = (u - \rho v)\,x^- + \rho v x^- = \rho v x^+,$$

i.e. $(u - \rho v)\,x^- = \rho v x$. *Luego* $x \in M^+$ *y* $x^- = 0 = z$. *En definitiva,* $[0, x^-] \cap P = \{0\}$ *y* $g\,(x^-) = f\,(x^-) = 0$.

$(ii \Rightarrow i)$ Si $x \in M$, por hipótesis

$$f\left(x^{+}\right) \vee f\left(x^{-}\right) = f\left(x^{+}\right) + f\left(x^{-}\right)$$

y será $f(x^{+}) = 0$ o $f(x^{-}) = 0$. Supongamos existen $u, v \in M$ tales que

$$f(u \vee v) > f(u) \geq f(v).$$

Por (163), $u \vee v - u = (v-u)^{+}$ y como $f\left((v-u)^{+}\right) > 0$ entonces $f\left((v-u)^{-}\right) = 0$. Así

$$0 \geq f(v-u) = f\left((v-u)^{+}\right) > 0,$$

lo cual es absurdo. En consecuencia, como necesariamente $f \geq 0$,

$$f(u \vee v) \leq f(u) \vee f(v) \leq f(u \vee v).$$

Proposición 12.21 *Sea M un espacio (AM) de Banach con unidad u y sea Ω el espacio de estructura de Kakutani de M. Entonces $\Omega = \operatorname{Ext}\left(\left[M_{+}^{*}\right]_{1}\right)$ y consiste de los homomorfismos reticulares f sobre M tales que $f(u) = 1$.*

Demostración 12.22 *Evidentemente $\left[M_{+}^{*}\right]_{1} = M_{+}^{*} \cap N$, con*

$$N = \{f \in M^{*} : f(u) = 1\}.$$

Notar que $\left[M_{+}^{*}\right]_{1}$ es w^{*}-compacto no vacío, de manera que $\operatorname{Ext}\left(\left[M_{+}^{*}\right]_{1}\right) \neq \varnothing$ como consecuencia del teorema de Krein-Milman (V. [79], Th. 1.4.3). Por el Teorema 13.50 bastará ver que si $f \in M^{*}$, $f \in \operatorname{Ext}\left(\left[M_{+}^{*}\right]_{1}\right)$ si y solo si f es homomorfismo reticular tal que $f(u) = 1$. En particular, por la Prop. 12.19 $\operatorname{Ext}\left(\left[M_{+}^{*}\right]_{1}\right)$ es w^{*}-compacto.

$(\Rightarrow)$ Sean $f \in \operatorname{Ext}\left(\left[M_{+}^{*}\right]_{1}\right)$, $g \in M_{+}^{*}$ y $c > 0$ de modo que $h \in M_{+}^{*}$, con $h = cf - g$. Probando que $g \in \mathbb{R}_{\geq 0} f$ la afirmación será consecuencia de la Prop. 12.21. En efecto, podemos suponer que $g(u)$ y $h(u)$ son positivos. Luego

$$f = \frac{g+h}{c} = \frac{g(u)}{c}\frac{g}{g(u)} + \frac{h(u)}{c}\frac{h}{h(u)}. \tag{126}$$

Como $f(u) = 1$, $(g(u) + h(u))/c = 1$ y (126) es combinación convexa de $g/g(u)$ y $h/h(u)$, ambos elementos de $\left[M_{+}^{*}\right]_{1}$. Siendo f extremal inferimos que $g = g(u) f$.

$(\Leftarrow)$ Sean f un homomorfismo reticular tal que

$$f(u) = 1, \; t \in (0,1) \; \text{ y } g, h \in \left[M_{+}^{*}\right]_{1}$$

tales que $f = tg + (1-t)h$. Por la Prop. 12.19 f genera un rayo extremo de M_{+}^{*} y como $f - tg \in M_{+}^{*}$ existirá $c > 0$ tal que $cf = tg$. Pero $f(u) = g(u) = 1$, de modo que $c = t$ y $f = g = h$.

12.4. Sobre espacios (AL) y (AM)

[49][50]Entendemos por *espacio de Banach reticular* E a todo aquel en el que $\|x\| \leq \|y\|$ si $|x| \leq |y|$, cualesquiera sean $x, y \in E$. Un espacio de Banach reticular se dice *de tipo* (AM) (resp. *de tipo* (AL)) si dados $x, y \in E^+$ se verifica que $\|x \vee y\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$ (resp. $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$). En la Sección 13.11 el teorema de Kakutani precisa la estructura general de espacios de tipo (AM). El modelo de espacios de tipo (AL) lo dan los espacios clásicos de Lebesgue de funciones absolutamente integrables.

Proposición 12.23 (i) *Si E es espacio de tipo (AM) con unidad, E^* es espacio de tipo (AL).*[51]

(ii) *Si E es espacio de tipo (AL), E^* es espacio de tipo (AM) con unidad.*

Demostración 12.24 (i) *Sean E espacio de tipo (AM) con unidad u y $f \in E^*_+$. Entonces $\|f\| = f(u)$. Si además $g \in E^*_+$, como $f + g \geq 0$ también*

$$\|f+g\| = (f+g)(u) = f(u) + g(u) = \|f\| + \|g\|.$$

(ii) *Sea ahora E espacio de tipo (AL). Como la norma es aditiva y positivamente homogénea sobre E^+ existe $f_0 \in E^*$ tal que $f_0(x) = \|x\|$ si $x \in E^+$. Evidentemente $f_0 \in E^*_+$, $\|f_0\| = 1$ y si $f \in E^*$ y $\|f\| \leq 1$ resulta $f \leq f_0$ porque*

$$f_0(x) - f(x) = \|x\| - f(x) \geq 0 \text{ si } x \in \left[E^+\right]_1.$$

En consecuencia f_0 es unidad de E^*. Dados $g, h \in E^*_+$, como $g \leq \|g\| f_0$ y $h \leq \|h\| f_0$ entonces

$$g \vee h \leq \text{máx}\{\|g\|, \|h\|\} f_0.$$

Luego es claro que

$$\text{máx}\{\|g\|, \|h\|\} \leq \|g \vee h\| \leq \text{máx}\{\|g\|, \|h\|\}$$

y sigue la afirmación.

[49]*Palabras clave: Espacios reticulares.* Espacios de tipo (AL) y (AM). Unidades en espacios reticulares. Espacios extremadamente disconexos. Conjuntos reticularmente completos.

[50]Por la estructura de (AL) espacios consultar [23].

[51]V. Definición 13.46.

Teorema 12.25 *Sea E un espacio de Banach reticular.*

(i) Las operaciones reticulares son continuas.

(ii) E^* es reticularmente completo (i.e. todo subconjunto no vacío de E^* contenido en un intervalo cerrado con extremos en E^* tiene supremo e ínfimo).

(iii) Si E es espacio de tipo (AL) existe X espacio compacto extremadamente disconexo (i.e. la clausura de cada subconjunto abierto de X es abierta) tal que $E^* \approx C(X)$, donde $\approx$ representa un isomorfismo isométrico reticular.

Demostración 12.26 **(i)** *Si $x, y, z \in E$ veremos que*

$$|x - y| = |x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z|. \tag{127}$$

Luego será

$$\|x \vee z - y \vee z\| \leq \|x - y\|$$

pues $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ y $\vee$ (y por ende también $\wedge$) resultarán continuas. Asumiendo cierto (127) cuando $z = 0$ será

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(x + z) \vee 0 - (y + z) \vee 0| + |(x + z) \wedge 0 - (y + z) \wedge 0| \\ &= |x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z|. \end{aligned}$$

Notemos que

$$x - y = (x \vee 0 - y \vee 0) + (x \wedge 0 - y \wedge 0). \tag{128}$$

Además $(x - y)^+ = (x - y) \vee 0$ y

$$(x - y) \vee 0 + y \vee 0 = x \vee 0,$$

de modo que $(x - y)^+ = x \vee 0 - y \vee 0$ y por (128) ha de ser

$$(x - y)^+ = x \wedge 0 - y \wedge 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |x - y| &= (x - y)^+ + (x - y)^- \\ &= |x \vee 0 - y \vee 0| + |x \wedge 0 - y \wedge 0| \end{aligned}$$

y (127) es efectivamente válida si $z = 0$.

(ii) *Sean* $A \subseteq E^*$, $A \neq \varnothing$, *y* $g_1, g_2 \in E^*$ *de modo que* $A \subseteq [g_1, g_2]$. *Si* $h(x) \triangleq \sup_{f \in g_2 - A} f(x)$, $x \in E^+$, *vemos que* $0 \leq h(x) \leq (g_2 - g_1)(x)$ *y* h *está bien definida. Además es inmediato que* h *es una función positivamente homogénea subaditiva. Más aún, si* $x_1, x_2 \in E^+$ *y* $\varepsilon > 0$ *sean* $f_1, f_2 \in g_2 - A$ *tales que* $f_j(x_j) > h(x_j) - \varepsilon/2$ *si* $j = 1, 2$. *Como* $g_2 - A \subseteq [0, g_2 - g_1]$ *no hay pérdida de generalidad si suponemos que* $f_1 \leq f_2$, *y así*

$$h(x_1) + h(x_2) - \varepsilon < f_1(x_1) + f_2(x_2) \leq f_2(x_1 + x_2) \leq h(x_1 + x_2).$$

Como $\varepsilon > 0$ *es arbitrario* h *es aditiva sobre* E^+. *Razonando como en la Prop. 12.19* h *se extiende a una aplicación lineal sobre* E, *la cual será ciertamente positiva. Por otra parte,* $h \in E^*$: *sea* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión convergente a cero en* E. *Como las operaciones reticulares son continuas en* E *si* $n \in \mathbb{N}$ *resulta*

$$|h(x_n)| \leq h|x_n| \leq (g_2 - g_1)(|x_n|),$$

i.e. $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = 0$. *Si* $x \in E^+$ *y* $k \in A$, *como* $(g_2 - k)(x) \leq h(x)$ *es* $(g_2 - h)(x) \leq k(x)$ *y* $g_2 - h$ *deviene cota inferior de* A. *Además, si* l *fuere otra cota inferior de* A,

$$g_2(x) - k(x) \leq g_2(x) - l(x) \;\; \textit{si } k \in A.$$

Luego $h(x) \leq g_2(x) - l(x)$, $h \leq g_2 - l$ *y concluímos que* $g_2 - h = \inf(A)$. *Análogamente se prueba la existencia de* $\sup(A)$ *en* E^*.

(iii) *La existencia de un espacio compacto* X *tal que* $E^* \approx C(X)$ *sigue al combinar la Prop. 12.23(ii) y el teorema de Kakutani. Sea* U *un subconjunto abierto no vacío de* X *y veamos que* U^- *es abierto. Por el lema de Urysohn la familia* $\mathcal{S}$ *de funciones* $f \in [0,1]$ *soportadas en* U *es no vacía. Como* $C(X)$ *es reticularmente completo existe* $f_0 = \sup(\mathcal{S})$. *También por el lema de Urysohn sigue que* $f_0 |_U \equiv 1$ *y* $f_0 |_{X-U^-} \equiv 0$. *Concluímos que* $f_0 = \chi_{U^-}$ *y, como* f_0 *es continua,* U^- *será abierto.*

12.5. Factores en el dual de álgebras de Banach

Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach. Indicamos $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ a los $\mathcal{U}$-submódulos de $\mathcal{U}^*$ generados por elementos de la forma fa y af respectivamente, donde $a \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathcal{U}^*$. En particular, si $\mathcal{U}$ tuviere aproximación acotada de la identidad a derecha (resp. a izquierda) por el Corolario 13.23 $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$) sería cerrado. Más aún, por el teorema de Cohen todo elemento de $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ (resp. de $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$) es de la forma fa (resp. af), para ciertos $a \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathcal{U}^*$. Se dice que $\mathcal{U}^*$ *es factor de* U^* *a izquierda* (resp. *a derecha*) si $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}^*$ (resp. $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*$), siendo simplemente un *factor* si lo es a ambos lados.

Teorema 12.27 *(cf. [91]) Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach con aproximación acotada de la identidad $\{e_i\}_{i\in I}$. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}^*$ (resp. $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*$).

(ii) Dado $f \in \mathcal{U}^*$, $f = w\text{-lím}_{i\in I}(fe_i)$ (resp. $f = w\text{-lím}_{i\in I}(e_i f)$).

(iii) $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ (resp. $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$) es unitaria.

Demostración 12.28 $(i \Rightarrow ii)$ *Sean $f \in \mathcal{U}^*$, $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$. Podemos escribir la existencia de $a \in \mathcal{U}$ y $g \in \mathcal{U}^*$ tales que $f = ga$. Como*

$$\langle fe_i, \Phi\rangle = \langle (ga)\, e_i, \Phi\rangle = \langle g\,(ae_i)\,, \Phi\rangle = \langle ae_i, \Phi g\rangle$$

resulta

$$\lim_{i\in I} \langle fe_i, \Phi\rangle = \langle a, \Phi g\rangle = \langle ga, \Phi\rangle = \langle f, \Phi\rangle\,.$$

$(ii \Rightarrow iii)$ *Por la Prop. 4.1 $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ tiene unidad a derecha. Considerando eventualmente una subred podemos suponer que existe*

$$\Phi_0 = w^* - \lim_{i\in I} \iota_{\mathcal{U}}(e_i)\,.$$

Si $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ y $f \in \mathcal{U}^*$ tenemos

$$\langle f, \Phi_0 \Box \Phi\rangle = \langle \Phi f, \Phi_0\rangle = \lim_{i\in I}\langle e_i, \Phi f\rangle = \lim_{i\in I}\langle fe_i, \Phi\rangle = \langle f, \Phi\rangle$$

e inferimos la afirmación.

$(iii \Rightarrow i)$ *De la demostración de la Prop. 4.1, pasando eventualmente a una subred de $\{e_i\}_{i\in I}$, existe $E = w^*\text{-lím}_{i\in I}\, \iota_{\mathcal{U}}(e_i)$ y F es unidad a derecha de $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$. Si $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ es unitaria necesariamente E ha de ser la unidad del álgebra. Si $f \in \mathcal{U}$ y $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$, como $R^{\Box}_{\Phi} \in (w^*, w^*)$ escribimos*

$$\langle f, \Phi\rangle = \langle f, E\Box\Phi\rangle = \lim_{i\in I}\langle f, e_i\Phi\rangle = \lim_{i\in I}\langle fe_i, \Phi\rangle\,,$$

i.e. $f \in \overline{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}^{w}$. Luego $f \in \overline{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}$ y sigue que $f \in \mathcal{U}^*\mathcal{U}$.

Corolario 12.29 *Sea $\mathcal{U}$ álgebra de Banach provista de aproximación acotada de la unidad.*

(i) Si $\mathcal{I}$ es ideal bilátero cerrado de $\mathcal{U}$ y $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ (resp. $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$) es unitaria también lo es $((\mathcal{U}/\mathcal{I})^{**}, \Box)$ (resp. $((\mathcal{U}/\mathcal{I})^{**}, \Diamond)$).

(ii) Si $\mathcal{U}$ es regular entonces $\mathcal{U}^{**}$ es unitaria.

Demostración 12.30 **(i)** *Sea E unidad de $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$, $p : \mathcal{U} \to \mathcal{U}/\mathcal{I}$ la proyección al cociente. Notamos que $p^{**} : (\mathcal{U}^{**}, \Box) \to ((\mathcal{U}/\mathcal{I})^{**}, \Box)$ es epimorfismo (V. la demostración de Prop. 12.38(viii)). Es inmediato así que $p^{**}(E)$ deviene unidad de $((\mathcal{U}/\mathcal{I})^{**}, \Box)$.*

(ii) *Por la Prop. 4.1 existen $E, F \in \mathcal{U}^{**}$ tales que*

$$\Phi = \Phi \Box E = F \Diamond \Phi \text{ si } \Phi \in \mathcal{U}^{**}$$

y, por la regularidad, sigue la afirmación.

Teorema 12.31 *(cf. [91], Th. 2.6) Sea $\mathcal{U}$ álgebra de Banach débilmente secuencialmente completa provista de una aproximación acotada secuencial $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la unidad. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}^*$.

(ii) $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*$.

(iii) $\mathcal{U}$ es unitaria.

Demostración 12.32 *$(i \Rightarrow ii)$ Si $f \in \mathcal{U}^*$ sean $g \in \mathcal{U}^*$, $a \in \mathcal{U}$ tales que $f = ga$. Como para $n \in \mathbb{N}$ es $\langle e_n, f\rangle = \langle ae_n, g\rangle$ sigue que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión w-Cauchy y por hipótesis existe $e \in \mathcal{U}$ tal que $e = w\text{-}\lim_{n\to\infty} e_n$. Además*

$$\langle be_n, h\rangle = \langle e_n, hb\rangle \to \langle b, h\rangle = \langle e, hb\rangle = \langle be, h\rangle$$

cualesquiera sean $b \in \mathcal{U}$ y $h \in \mathcal{U}^*$, i.e. $b = be$ y e es unidad a derecha de $\mathcal{U}$. Luego $h = eh$ para todo $h \in \mathcal{U}^*$ y sigue (ii).

$(ii \Rightarrow i)$ Ídem.

$(i \Rightarrow iii)$ Es ahora inmediato.

$(iii \Rightarrow i)$ Trivial.

Lema 12.33 *Sea $\mathcal{U}$ álgebra de Banach regular provista de aproximación acotada de la unidad. Entonces $\mathcal{U}^*$ es un factor.*

Demostración 12.34 *Supongamos* $\mathcal{U}^*\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{U}^*$ *y sea* $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ *no nulo tal que* $\Phi(\mathcal{U}^*\mathcal{U}) = \{0\}$. *Sea* $\lambda \in \mathcal{U}^*$ *tal que* $\langle \lambda, \Phi \rangle = 1$. *Si* $a \in \mathcal{U}$ *tenemos*

$$0 = \langle \lambda a, \Phi \rangle = \langle a, \Phi\lambda \rangle ,$$

i.e. $\Phi\lambda = 0$. *Como* $\mathcal{U}$ *tiene aproximación acotada de la unidad por el Corolario 4.3 existe* $E \in \mathcal{U}^{**}$ *identidad mixta. Como* $\mathcal{U}$ *es regular obtenemos*

$$1 = \langle \lambda, \Phi \rangle = \langle \lambda, E \Diamond \Phi \rangle = \langle \lambda, E \Box \Phi \rangle = \langle \Phi\lambda, E \rangle = 0,$$

lo que es absurdo y sigue luego la tesis.

Corolario 12.35 *Un álgebra de Banach secuencialmente completa provista de una aproximación secuencial acotada de la unidad es regular solo si es unitaria.*

Demostración 12.36 *Sigue combinando el Teorema 12.31 y el Lema 12.33.*

12.6. Centros topológicos

Definición 12.37 [52][53]*Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach. Indicamos*

$$\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) = \left\{ \Phi \in \mathcal{U}^{**} : L_\Phi^\Box = L_\Phi^\Diamond \right\}, \ \mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**}) = \left\{ \Phi \in \mathcal{U}^{**} : R_\Phi^\Box = R_\Phi^\Diamond \right\},$$

donde para $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ *indicamos* $L_\Phi^\Box, L_\Phi^\Diamond, R_\Phi^\Box, R_\Phi^\Diamond$ *a los operadores de multiplicación a izquierda o derecha por* Φ *sobre* $\mathcal{U}^{**}$ *respecto al primer o segundo producto de Arens. Decimos que* $\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ *y* $\mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**})$ *son los centros topológicos a izquierda y derecha de* $\mathcal{U}^{**}$.

Proposición 12.38 **(i)** *Se tiene*

$$\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) = \left\{ \Phi \in \mathcal{U}^{**} : L_\Phi^\Box \text{ es } (w^*\text{-}w^*) \text{ continuo} \right\},$$
$$\mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**}) = \left\{ \Phi \in \mathcal{U}^{**} : R_\Phi^\Diamond \text{ es } (w^*\text{-}w^*) \text{ continuo} \right\}.$$

(ii) *Ambos centros topológicos son subálgebras de Banach de* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *y* $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ *y contienen al centro del álgebra respectivamente.*

(iii) $\mathcal{U}$ *es Arens-regular si y solo si* $\mathcal{U}^{**}$ *coincide con alguno de sus centros topológicos.*

[52]*Palabras clave: Productos semidirectos. Centros topológicos. Álgebras de Banach fuertemente Arens irregulares. Identidades mixtas. Ideales nilpotentes.*

[53]V. [99], [98], [10], [8], [43].

(iv) *Si* $\mathcal{U}$ *es abeliana entonces* $\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) = \mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**})$, *siendo éste conjunto el centro* $\mathcal{Z}(\mathcal{U}^{**})$ *de* $(\mathcal{U}^{**}, \square)$ *y* $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$.

(v) $\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) = \mathcal{Z}_t^2((\mathcal{U}^{op})^{**})$ *y* $\mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**}) = \mathcal{Z}_t^1((\mathcal{U}^{op})^{**})$.

(vi) *Si* $\mathcal{U}$ *es una* $*$*-álgebra de Banach y* $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ *entonces* $\Phi \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ *si y solo si* $\Phi^* \in \mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**})$.

(vii) *Sea* $\mathcal{V}$ *una subálgebra de Banach de* $\mathcal{U}$ *y sea* $j : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U}$ *la inclusión. Entonces para* $i = 1, 2$ *se tiene*

$$j^{**}(\mathcal{V}^{**}) \cap \mathcal{Z}_t^i(\mathcal{U}^{**}) \subseteq j^{**}\left[\mathcal{Z}_t^i(\mathcal{V}^{**})\right].$$

(viii) *Si* $\mathfrak{I}$ *es ideal cerrado de* $\mathcal{U}$ *y* $q : \mathcal{U} \to \mathcal{U}/\mathfrak{I}$ *es la proyección al cociente para* $i = 1, 2$ *resulta*

$$q^{**}\left(\mathcal{Z}_t^i(\mathcal{U}^{**})\right) \subseteq \mathcal{Z}_t^i((\mathcal{U}/\mathfrak{I})^{**}).$$

Demostración 12.39 **(i)** *Sean* $\Phi \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ *y* $\Psi = w^*\text{-lím}_{a\in A}\Psi_a$ *en* $\mathcal{U}^{**}$. *Si* $\lambda \in \mathcal{U}^*$ *tenemos*

$$\begin{aligned}
\left\langle \lambda, L_\Phi^\square(\Psi) \right\rangle &= \left\langle \lambda, L_\Phi^\Diamond(\Psi) \right\rangle \\
&= \langle \lambda, \Phi\Diamond\Psi \rangle \\
&= \langle \lambda\Phi, \Psi \rangle \\
&= \lim_{a\in A} \langle \lambda\Phi, \Psi_a \rangle \\
&= \lim_{a\in A} \langle \lambda, \Phi\Diamond\Psi_a \rangle \\
&= \lim_{a\in A} \left\langle \lambda, L_\Phi^\Diamond(\Psi_a) \right\rangle \\
&= \lim_{a\in A} \left\langle \lambda, L_\Phi^\square(\Psi_a) \right\rangle
\end{aligned}$$

i.e. $L_\Phi^\square(\Psi) = w^*\text{-lím}_{a\in A} L_\Phi^\square(\Psi_a)$ *y* $L_\Phi^\square \in (w^*, w^*)$. *Sea* $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$ *tal que*

$\Psi = w^*\text{-lím}_{j\in J}\,\iota_{\mathcal{U}}(b_j)$. *Si* $L_\Phi^\square$ *es (w*-w*) continuo y* $\lambda \in \mathcal{U}^*$ *escribimos*

$$\begin{aligned}
\left\langle \lambda, L_\Phi^\square(\Psi)\right\rangle &= \lim_{j\in J}\left\langle \lambda, L_\Phi^\square\left(\iota_{\mathcal{U}}(b_j)\right)\right\rangle \\
&= \lim_{j\in J}\left\langle \lambda, \Phi\square\iota_{\mathcal{U}}(b_j)\right\rangle \\
&= \lim_{j\in J}\left\langle \iota_{\mathcal{U}}(b_j)\,\lambda, \Phi\right\rangle \\
&= \lim_{j\in J}\left\langle b_j\lambda, \Phi\right\rangle \\
&= \lim_{j\in J}\left\langle b_j, \lambda\Phi\right\rangle \\
&= \left\langle \lambda\Phi, \Psi\right\rangle \\
&= \left\langle \lambda, \Phi\Diamond\Psi\right\rangle \\
&= \left\langle \lambda, L_\Phi^\Diamond(\Psi)\right\rangle,
\end{aligned}$$

i.e. $\Phi \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$. *La otra afirmación se prueba en forma análoga.*

(ii) *Evidentemente los centros topológicos son subespacios de Banach de* $\mathcal{U}^{**}$. *Como* $(\mathcal{U}^{**},\square)$ *y* $(\mathcal{U}^{**},\Diamond)$ *son álgebras asociativas de (i) sigue enseguida que los centros topológicos devienen subálgebras de Banach. Que estos centros topológicos contienen a los centros de* $(\mathcal{U}^{**},\square)$ *y* $(\mathcal{U}^{**},\Diamond)$ *es inmediato.*

(iii) *Es inmediato.*

(iv) *Supongamos* $\mathcal{U}$ *abeliana,* $\Phi \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ *y* $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$, *digamos*

$$\Phi = w^*\text{-}\lim_{\alpha\in A}\iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha)\,,\, \Psi = w^*\text{-}\lim_{\beta\in B}\iota_{\mathcal{U}}(b_\beta)\,. \tag{129}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\Psi\Diamond\Phi &= w^*\text{-}\lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B}\iota_{\mathcal{U}}(b_\beta a_\alpha) \\
&= w^*\text{-}\lim_{\alpha\in A}\lim_{\beta\in B}\iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha b_\beta) \\
&= \Phi\square\Psi \\
&= \Phi\Diamond\Psi \\
&= w^*\text{-}\lim_{\beta\in B}\lim_{\alpha\in A}\iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha b_\beta) \\
&= w^*\text{-}\lim_{\beta\in B}\lim_{\alpha\in A}\iota_{\mathcal{U}}(b_\beta a_\alpha) \\
&= \Psi\square\Phi,
\end{aligned}$$

de modo que $\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) \subseteq \mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**})$. *Análogamente sigue la otra inclusión y el resto de la afirmación es inmediata.*

(v) *Sean* $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}^{**}$ *como en (129). Por (2) tenemos*

$$\Phi \Box \Psi = w^*\text{-}\lim_{\alpha \in A} \lim_{\beta \in B} \iota_{\mathcal{U}} (a_\alpha b_\beta) = w^*\text{-}\lim_{\alpha \in A} \lim_{\beta \in B} \iota_{\mathcal{U}} (b_\beta \cdot_{op} a_\alpha) = \Psi \Diamond_{op} \Phi$$

y análogamente $\Phi \Diamond \Psi = \Psi \Box_{op} \Phi$. *Si además* $\Phi \in \mathcal{Z}_t^1 (\mathcal{U}^{**})$ *tenemos entonces*

$$\Psi \Box_{op} \Phi = \Phi \Diamond \Psi = \Phi \Box \Psi = \Psi \Diamond_{op} \Phi,$$

o sea $\Phi \in \mathcal{Z}_t^2 ((\mathcal{U}^{op})^{**})$ *y podemos inferir la afirmación.*

(vi) *Si* $\Phi = w^*\text{-}\lim_{\alpha \in A} \iota_{\mathcal{U}} (a_\alpha)$ *y* $\lambda \in \mathcal{U}^*$ *tenemos*

$$\langle \lambda, \Phi^* \rangle = \overline{\langle \lambda^*, \Phi \rangle} = \lim_{\alpha \in A} \overline{\langle a_\alpha, \lambda^* \rangle} = \lim_{\alpha \in A} \langle a_\alpha^*, \lambda \rangle ,$$

i.e. $\Phi^* = w^*\text{-}\lim_{\alpha \in A} \iota_{\mathcal{U}} (a_\alpha^*)$. *Es fácil ver entonces que si* $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$ *se tiene* $(\Psi \Box \Phi)^* = \Phi^* \Diamond \Psi^*$. *Por lo tanto si* $\Phi \in \mathcal{Z}_t^1 (\mathcal{U}^{**})$ *escribimos*

$$\Psi \Diamond \Phi^* = \Psi^{**} \Diamond \Phi^* = (\Phi \Box \Psi^*)^* = (\Phi \Diamond \Psi^*)^* = \Psi \Box \Phi^*,$$

o sea $\Phi^* \in \mathcal{Z}_t^2 ((\mathcal{U}^{**})$. *El resto es inmediato.*

(vii) *Por el teorema de Banach-Hahn la aplicación* j^* *es suryectiva, por lo que* j^{**} *deviene inyectiva. Por otra parte,*

$$j^{**} : (\mathcal{V}^{**}, \Box_{\mathcal{V}^{**}}) \to (\mathcal{U}^{**}, \Box) \ \ y \ j^{**} : (\mathcal{V}^{**}, \Diamond_{\mathcal{V}^{**}}) \to (\mathcal{U}^{**}, \Diamond) \qquad (130)$$

son homomorfismos que álgebras[54]. *Dado* $\Phi \in j^{**} (\mathcal{V}^{**}) \cap \mathcal{Z}_t^1 (\mathcal{U}^{**})$ *sea* $M \in \mathcal{V}^{**}$ *tal que* $\Phi = j^{**}(M)$. *Bastará ver que* $M \in \mathcal{Z}_t^1 (\mathcal{V}^{**})$, *para lo que consideramos* $N \in \mathcal{V}^{**}$ *y escribimos*

$$j^{**} (M \Box_{\mathcal{V}^{**}} N) = j^{**}(M) \Box j^{**}(N) = j^{**}(M) \Diamond j^{**}(N) = j^{**}(M \Diamond_{\mathcal{V}^{**}} N),$$

y podemos concluir que $M \Box_{\mathcal{V}^{**}} N = M \Diamond_{\mathcal{V}^{**}} N$.

(viii) *Sean* $\Phi \in \mathcal{Z}_t^1 (\mathcal{U}^{**})$, $M \in (\mathcal{U}/\mathfrak{I})^{**}$. *Notemos que* $q^{**} \in \mathcal{B} (\mathcal{U}^{**}, (\mathcal{U}/\mathfrak{I})^{**})$ *es epimorfismo*[55]. *Sea* $M = q^{**} (\Psi)$ *para cierto* $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$. *Notemos que*

---

[54] P. ej. para el primer caso en (130) notar que como sigue notando que

$$M j^* (\lambda) = j^* (j^{**} (M) \lambda)$$

toda vez que $M \in \mathcal{V}^{**}$ y $\lambda \in \mathcal{U}^*$. El segundo caso es análogo.

[55] Es fácil ver que $q^* : (\mathcal{U}/I)^* \to I^o$ es isomorfismo isométrico de espacios de Banach. Dados $N \in (\mathcal{U}/I)^{**}$ sea

$$\Phi_0 : I^o \to \mathbb{C}, \ \ \langle \lambda, \Phi_0 \rangle \triangleq \left\langle (q^*)^{-1} (\lambda) , N \right\rangle .$$

Entonces $|\langle \lambda, \Phi_0 \rangle| \leq \left\| (q^*)^{-1} \right\| \|N\| \|\lambda\|$ para cada $\lambda \in I^o$ y por el teorema de Hahn-Banach existe $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ tal que $\Phi \mid_{I^o} = \Phi_0$. Ciertamente $q^{**} (\Phi) = N$.

$\mathfrak{I}^{oo}$ es ideal cerrado de $(\mathcal{U}^{**},\Box)$ y de $(\mathcal{U}^{**},\Diamond)$.[56] *Así $\mathcal{U}^{**}/\mathfrak{I}^{oo}$ admite sendas estructuras de álgebra inducidas por los productos de Arens sobre $\mathcal{U}^{**}$. Sean $\eta:\mathcal{U}^{**}\to\mathcal{U}^{**}/\mathfrak{I}^{oo}$ la proyección al cociente y*

$$\Lambda:\mathcal{U}^{**}/\mathfrak{I}^{oo}\to(\mathcal{U}/\mathfrak{I})^{**}$$

el isomorfismo tal que $q^{**}=\Lambda\circ\eta$. Es fácil ver que tanto Λ como η son homomorfismos de álgebras. Finalmente,

$$\begin{aligned}
q^{**}(\Phi)\Box M &= q^{**}(\Phi)\Box q^{**}(\Psi)\\
&= \Lambda(\eta(\Phi))\Box\Lambda(\eta(\Psi))\\
&= \Lambda(\eta(\Phi)\Box\eta(\Psi))\\
&= q^{**}(\Phi\Box\Psi)\\
&= q^{**}(\Phi\Diamond\Psi)\\
&= \Lambda(\eta(\Phi)\Diamond\eta(\Psi))\\
&= \Lambda(\eta(\Phi))\Diamond\Lambda(\eta(\Psi))\\
&= q^{**}(\Phi)\Diamond q^{**}(\Psi)\\
&= q^{**}(\Phi)\Diamond M.
\end{aligned}$$

o sea $q^{**}(\Phi)\in\mathcal{Z}_t^1\left((\mathcal{U}/\mathfrak{I})^{**}\right)$. El resto sigue en forma análoga.

Definición 12.40 *Un álgebra de Banach $\mathcal{U}$ es fuertemente Arens irregular*[57] *a izquierda (f.A.i.i.) o fuertemente Arens irregular a derecha (f.A.i.d.) según sea $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})=\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ o $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})=\mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**})$ respectivamente. Diremos que $\mathcal{U}$ es fuertemente Arens irregular (f.A.i.) si lo es tanto a derecha como a izquierda.*

---

[56]En efecto, sea $\{\Phi_s\}_{s\in\sigma}\subseteq I^{oo}$ y sea $\Phi=w^*\text{-lím}_{s\in\sigma}\Phi_s$ en $\mathcal{U}^{**}$. Si $a^*\in\mathcal{U}^*$ tenemos

$$\langle a^*,\Phi\rangle=\lim_{s\in\sigma}\langle a^*,\Phi_s\rangle=0,$$

i.e. $\Phi\in I^{oo}$ e I^{oo} resulta w^*-cerrado. Más aún, $I^{oo}=\overline{\iota_{\mathcal{U}}(I)}^{w^*}$: como $\iota_{\mathcal{U}}(I)\subseteq I^{oo}$ entonces $\overline{\iota_{\mathcal{U}}(I)}^{w^*}\subseteq I^{oo}$. Por otra parte, sea $\Phi_0\notin\overline{\iota_{\mathcal{U}}(I)}^{w^*}$. Por la Prop. 13.13 existen un funcional lineal w^*-continuo $\mathfrak{u}:\mathcal{U}^{**}\to\mathbb{C}$ y $c\in\mathbb{R}$ tal que

$$\iota_{\mathcal{U}}(I)\subseteq\{\Phi\in\mathcal{U}^{**}:\operatorname{Re}\langle\Phi,\mathfrak{u}\rangle\geq c\}\tag{131}$$

y $\operatorname{Re}\langle\Phi_0,\mathfrak{u}\rangle<c$. Razonando como en el teorema de Goldstine existe $\lambda_0\in\mathcal{U}^*$ tal que $\mathfrak{u}=\iota_{\mathcal{U}^*}(\lambda_0)$. Por (131) vemos que $\operatorname{Re}\langle a,\lambda_0\rangle\geq c$ para todo $a\in I$, de modo que ha de ser $\lambda_0\in I^o$. Además

$$\operatorname{Re}\langle\Phi_0,\mathfrak{u}\rangle=\langle\lambda_0,\Phi_0\rangle<c\leq0,$$

i.e. $\Phi_0\notin I^{oo}$. Que I^{oo} es ideal cerrado de $(\mathcal{U}^{**},\Box)$ y de $(\mathcal{U}^{**},\Diamond)$ sigue de la Prop. 2.7(iii).

[57]P. ej., por fuerte Arens irregularidad de álgebras de Beurling v. [94].

Proposición 12.41 **(i)** *Sea* $\mathcal{U}$ *álgebra de Banach dual con un predual* $\mathcal{U}_*$. *Entonces* $\mathcal{U}$ *es f.A.i. si y solo si dado* $\Phi \in (\iota_{\mathcal{U}_*}(\mathcal{U}_*))^o - \{0_{\mathcal{U}^{**}}\}$ *existen* $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{U}^{**}$ *tales que* $\Phi\Box\Psi_1 \neq \Phi\Diamond\Psi_1$ *y* $\Psi_2\Box\Phi \neq \Psi_2\Diamond\Phi$.

(ii) *Un álgebra de Banach abeliana* $\mathcal{U}$ *es f.A.i. si y solo si* $\mathcal{Z}(\mathcal{U}^{**}) = \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$.

Demostración 12.42 **(i)** *Como en el Teorema 5.1 sabemos que*

$$\mathcal{U}^{**} = \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \oplus (\iota_{\mathcal{U}_*}(\mathcal{U}_*))^o$$

Claramente la condición es necesaria. Recíprocamente, si $\Phi \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ *hay únicos* $a \in \mathcal{U}$ *y* $\Phi_0 \in (\iota_{\mathcal{U}_*}(\mathcal{U}_*))^o$ *tales que* $\Phi = \iota_{\mathcal{U}}(a) + \Phi_0$. *Si* $\Phi_0 \neq 0_{\mathcal{U}^{**}}$ *por hipótesis existe* $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$ *tal que* $\Phi_0\Box\Psi \neq \Phi_0\Diamond\Psi$. *Luego, por la Prop. 2.7(v), se contradice el carácter de centro topológico a izquierda de* Φ. *Así* $\Phi_0 = 0_{\mathcal{U}^{**}}$ *y* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) = \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$. *Análogamente sigue que* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) = \mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**})$ *y* $\mathcal{U}$ *es f.A.i..*

(ii) *Sigue de la Prop. 12.38(iv).*

Proposición 12.43 *Sean* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach abeliana e* $\mathcal{I}$ *un ideal nilpotente de índice* $n \geq 2$ *de* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *tal que* $\mathcal{U}^{**} = \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \ltimes \mathcal{I}$. *Entonces* $\mathcal{I}^{n-1} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{U}^{**})$ *y* $\mathcal{U}$ *no es fuertemente Arens irregular.*

Demostración 12.44 *Sean* $\Phi \in \mathcal{I}^{n-1}$, $a \in \mathcal{U}$ *y* $\Psi \in \mathcal{I}$. *Como* $\mathcal{I}$ *es ideal con índice de nilpotencia* n *y* $\mathcal{U}$ *es abeliana, por la Prop. 2.7(v) tenemos*

$$\Phi\Box(\iota_{\mathcal{U}}(a) + \Psi) = \Phi\Box\iota_{\mathcal{U}}(a) = \Phi a = a\Phi = (\iota_{\mathcal{U}}(a) + \Psi)\Box\Phi. \tag{132}$$

De (132) y la Prop. 12.38(iv) sigue que $\Phi \in \mathcal{Z}(\mathcal{U}^{**})$. *Además* $\mathcal{I}^{n-1} \nsubseteq \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ *pues* $\mathcal{I}^{n-1} \neq \{0_{\mathcal{U}^{**}}\}$, $\mathcal{I}^{n-1} \subseteq \mathcal{I}$ *y* $\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathcal{U}^{**}}\}$, *de donde sigue la tesis.*

Proposición 12.45 *Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach. Entonces:*

(i) $\mathcal{U}^* \cdot \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) \subseteq \overline{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}$.

(ii) Si $\mathcal{U}$ tiene alguna unidad mixta E entonces $\mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**}) \subseteq E\Box\mathcal{U}^{**}$.

(iii) Si $\mathcal{U}$ tiene alguna unidad mixta E y $\overline{\mathcal{U}^*\mathcal{U}} \neq \mathcal{U}^*$ entonces $E \notin \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ y $\mathcal{U}$ no es Arens regular.

Demostración 12.46 **(i)** *Si* $\Phi = w^*\text{-lím}_{\alpha\in A}\,\iota_{\mathcal{U}}(a_\alpha)$ *pertenece a* $\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ *y* $\lambda \in \mathcal{U}^*$*, dado* $\Psi \in \mathcal{U}^{**}$ *escribimos*

$$\begin{aligned}\langle \lambda\Phi, \Psi\rangle &= \langle \lambda, \Phi\Diamond\Psi\rangle \\ &= \langle \lambda, \Phi\Box\Psi\rangle \\ &= \langle \Psi\lambda, \Phi\rangle \\ &= \lim_{\alpha\in A}\langle a_\alpha, \Psi\lambda\rangle \\ &= \lim_{\alpha\in A}\langle \lambda a_\alpha, \Psi\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\lambda\Phi = w\text{-lím}_{\alpha\in A}(\lambda a_\alpha)$. *Así* $\lambda\Phi \in \overline{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}^w$ *basta aplicar el Teo. 13.61(i).*

(ii) *Es inmediato.*

(iii) *Sea* $\lambda_0 \in \mathcal{U}^* - \overline{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}$. *Por el teorema de Banach-Hahn existe* $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ *tal que* $\langle \lambda_0, \Phi\rangle \neq 0$ *y* $\overline{\mathcal{U}^*\mathcal{U}} \subseteq \ker(\Phi)$. *Suponiendo* $E \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ *por (i) será* $\lambda_0 E \in \overline{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}$ *y*

$$0 = \langle \lambda_0 E, \Phi\rangle = \langle \lambda_0, E\Diamond\Phi\rangle = \langle \lambda_0, \Phi\rangle,$$

lo cual no es cierto. Luego sigue la tesis.

Proposición 12.47 *(cf. [91]) Sea* $\mathcal{U}$ *álgebra de Banach con aproximación acotada de la unidad.*

(i) Si $\mathcal{U}^*$ es factor solo a un lado $\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) \neq \mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**})$.

(ii) $\mathcal{U}^*$ es factor a izquierda (resp. a derecha) si y solo si $M_1 \subseteq \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ (resp. $M_2 \subseteq \mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**})$), donde

$$M_1 = \{m \in \mathcal{U}^{**} : \mathcal{U}m \subseteq \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\}\ \ (M_2 = \{m \in \mathcal{U}^{**} : m\mathcal{U} \subseteq \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\}).$$

Demostración 12.48 **(i)** *Sea* $\mathcal{U}^*$ *factor a izquierda pero no a derecha. Por el Teorema 12.27* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *es unitaria pero* $(\mathcal{U}^{**}, \Diamond)$ *no lo es. Por el Corolario 4.3 existe* $E \in \mathcal{U}^{**}$ *identidad mixta. Como*

$$\Phi\Box E = E\Diamond\Phi = \Phi \quad si \quad \Phi \in \mathcal{U}^{**}$$

existirá Φ *tal que* $\Phi\Diamond E \neq \Phi$*, i.e.* $E \notin \mathcal{Z}_t^2(\mathcal{U}^{**})$. *Si* U *es el elemento idéntico de* $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *resulta* $E = U\Box E = U$. *Es claro entonces que* $E \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$.

(ii) *Sean* $m \in M_1$, $n \in \mathcal{U}^{**}$. *Asumiendo que* $\mathcal{U}$ *es factor a izquierda si* $a \in \mathcal{U}$ *y* $f \in \mathcal{U}^*$ *existe* $b \in \mathcal{U}$ *tal que* $am = \iota_{\mathcal{U}}(b)$ *y tenemos*

$$\begin{aligned}\langle fa, m\Box n\rangle &= \langle n\,(fa)\,, m\rangle\\ &= \langle (nf)\,a, m\rangle\\ &= \langle nf, am\rangle\\ &= \langle b, nf\rangle\\ &= \langle fb, n\rangle\\ &= \langle f\iota_{\mathcal{U}}\,(b)\,, n\rangle\\ &= \langle f\,(am)\,, n\rangle\\ &= \langle (fa)\,m, n\rangle\\ &= \langle fa, m\Diamond n\rangle\,,\end{aligned}$$

y así $m \in \mathcal{Z}_t^1\,(\mathcal{U}^{**})$. *Recíprocamente, como* $\mathcal{U}$ *tiene aproximación acotada de la unidad existe sea* $E \in \mathcal{U}^{**}$ *identidad mixta. Si* $c \in \mathcal{U}$ *resulta*

$$cE = \iota_{\mathcal{U}}\,(E)\,\Box E = \iota_{\mathcal{U}}\,(c)\,,$$

o sea $E \in M_1$. *Por hipótesis sigue que* $E \in \mathcal{Z}_t^1\,(\mathcal{U}^{**})$ *y si* $\Phi \in \mathcal{U}^{**}$ *es*

$$E\Box\Phi = E\Diamond\Phi = \Phi\Box E = \Phi,$$

i.e. $(\mathcal{U}^{**}, \Box)$ *es unitaria y basta aplicar el Teorema 12.27.*

12.7. Regularidad y completitud secuencial débil

Proposición 12.49 *(cf. [91]) Sea* $\mathcal{U}$ *álgebra de Banach con aproximación acotada de la unidad y sea* $\mathcal{E}$ *el conjunto de unidades mixtas de* $\mathcal{U}$.[58]

(i) Si $E \in \mathcal{E}$ la relación $P_E\,(m) = E\Box m$ define un proyector sobre $\mathcal{U}^{**}$.

(ii) $(1 - E)\,\Box\mathcal{U}^{**}$ es ideal bilátero cerrado de $\mathcal{U}^{**}$.

(iii) $(1 - E)\,\Box\mathcal{U}^{**} = (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^{\perp}$.

(iv) $(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^* \approx \mathcal{U}^{**}/\,(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^{\perp} \approx E\Box\mathcal{U}^{**}$.

(v) $(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ es álgebra de Banach.

[58] *Palabras clave:* Unidades mixtas. Centros topológicos. Sucesiones débiles de Cauchy. Funcionales tipo 1 de Baire. Débil-secuencial completitud.

Demostración 12.50 **(i)** *Evidentemente* $P_E \in \mathcal{B}(\mathcal{U}^{**})$. *Si* $m \in \mathcal{U}^{**}$ *resulta*

$$P_E^2(m) = (E\square E)\square m = E\square m = P_E(m),$$

por lo que P_E *es proyector y podemos representar*

$$\mathcal{U}^{**} = E\square\mathcal{U}^{**} \oplus (1-E)\square\mathcal{U}^{**}. \tag{133}$$

(ii) *Evidentemente* $(1-E)\square\mathcal{U}^{**}$ *es ideal a derecha, y es cerrado pues se trata del núcleo de* P_E. *Además dados* $n, m \in \mathcal{U}^{**}$ *resulta*

$$\begin{aligned} n\square(m - E\square m) &= n\square m - n\square(E\square m) \\ &= n\square m - (n\square E)\square m \\ &= n\square m - n\square m \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) *Sean* $m \in \mathcal{U}^{**}$, $f \in \mathcal{U}^{*}$, $a \in \mathcal{U}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} \langle fa, E\square m\rangle &= \langle m(fa), E\rangle \\ &= \langle (mf)a, E\rangle \\ &= \langle mf, aE\rangle \\ &= \langle a, mf\rangle \\ &= \langle fa, m\rangle, \end{aligned}$$

i.e. $\langle fa, m - E\square m\rangle = 0$. *Por otra parte, dado* $n \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^{\perp}$ *consideremos una red acotada* $\{x_i\}_{i\in I}$ *en* $\mathcal{U}$ *cuyo* w^**-límite sea* E. *Entonces*

$$\langle f, E\square n\rangle = \langle nf, E\rangle = \lim_{i\in I}\langle x_i, nf\rangle = \lim_{i\in I}\langle fx_i, n\rangle = 0.$$

Por (133) es $n \in (1-E)\square\mathcal{U}^{**}$.

(iv) *Sean* ${}_*j : \mathcal{U}^*\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}^*$ *y* $p : \mathcal{U}^{**} \to \mathcal{U}^{**}/(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^{\perp}$ *la inclusión natural y la proyección al cociente respectivamente. Por el teorema de Banach-Hahn* $({}_*j)^* : \mathcal{U}^{**} \to (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ *es suryectiva. Como* $(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^{\perp}$ *es ideal cerrado* $\mathcal{U}^{**}/(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^{\perp}$ *es un espacio de Banach. Hay, además, un isomorfismo de espacios de Banach* $\widetilde{{}_*j} : \mathcal{U}^{**}/(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^{\perp} \to (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ *tal que* $\widetilde{{}_*j}\circ p = ({}_*j)^*$. *Si* $m \in \mathcal{U}^{**}$ *escribimos*

$$\theta_E : E\square\mathcal{U}^{**} \to (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*,\ \theta_E(E\square m) = m\,|_{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}.$$

Por (iii) θ_E *está bien definida. Además es monomorfismo, y si es dado* $\lambda \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ *existe* $n \in \mathcal{U}^{**}$ *tal que* $({}_*j)^*(n) = \lambda$. *Es fácil ver que* $\theta_E(E\square n) = \lambda$. *Por el teorema de la función abierta* θ_E *deviene isomorfismo de espacios de Banach.*

(v) *Como* $(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^{\perp}$ *es ideal cerrado* $\mathcal{U}^{**}/(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^{\perp}$ *es un álgebra de Banach y* p *es homomorfismo de álgebras. Por (iv), queda inducida en* $(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ *una estrutura de álgebra de Banach respecto a la cual tanto* $({}_*j)^*$ *como* $\widetilde{{}_*j}$ *serán homomorfismos de álgebras. Precisamente, dados* $M, N \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ *basta hacer* $MN = ({}_*j)^*(m\Box n)$, *donde* $m, n \in \mathcal{U}^{**}$ *extienden a* M *y* N *respectivamente.*

Notación 1 *Si* $L, M \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ *escribiremos* $LM \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ *al producto de ambos, como en la Prop. 12.49(v). Por la Prop. 12.38(i) haremos también*

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_t^1\left((\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*\right) &= \left\{M \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^* : L_M \text{ es } (w^*\text{-}w^*) \text{ continuo}\right\},\\ \mathcal{Z}_t^2\left((\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*\right) &= \left\{M \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^* : R_M \text{ es } (w^*\text{-}w^*) \text{ continuo}\right\}.\end{aligned}$$

Además quedan definidas las aplicaciones

$$\begin{array}{lll}\mathcal{U}^* \times \mathcal{U}^{**} \xrightarrow{\wedge} \mathcal{U}^{***}, & (f,m) \to \widehat{fm}, & \left\langle n, \widehat{fm}\right\rangle \triangleq \langle f, m\Box n\rangle,\\ \mathcal{U}^*\mathcal{U} \times (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^* \xrightarrow{\vee} (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^{**}, & (\lambda, M) \to \lambda\overset{\vee}{M}, & \left\langle L, \lambda\overset{\vee}{M}\right\rangle \triangleq \langle \lambda, ML\rangle.\end{array} \tag{134}$$

Observación 12.51 *Sean* $a \in \mathcal{U}$, $M \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$. *Por el teorema de Banach-Hahn existe* $m \in \mathcal{U}^{**}$ *extensión de* M. *Por la Prop. 12.49(iv) podemos hacer* $aM \triangleq (am)|_{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}$, *quedando bien definido* $aM \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$. *Más aún,* aM *cobra sentido en cuanto elemento de* $\mathcal{U}^{**}$, *pues si* $m_1 \in \mathcal{U}^{**}$ *fuere otra extensión de* M *dado* $f \in \mathcal{U}^*$ *es*

$$\langle f, am\rangle = \langle fa, m\rangle = \langle fa, M\rangle = \langle fa, m_1\rangle = \langle f, am_1\rangle,$$

i.e. $aM \triangleq am$ *en* $\mathcal{U}^{**}$.

Proposición 12.52 *(Ibíd., Lemma 3.1) Sea* $\mathcal{U}$ *álgebra de Banach con aproximación acotada de la unidad.*

(i) Dado $m \in \mathcal{U}^{**}$, $m \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ si y solo si $\widehat{fm} \in \iota_{\mathcal{U}^*}(\mathcal{U}^*)$ para todo $f \in \mathcal{U}^*$. En ese caso, $fm \in \mathcal{U}^*\mathcal{U}$ y $\widehat{fm} = \iota_{\mathcal{U}^*}(fm)$.

(ii) Si $M \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ son equivalentes:

(a) $M \in \mathcal{Z}_t^1\left((\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*\right)$.

(b) $\lambda\overset{\vee}{M} \in \iota_{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}(\mathcal{U}^*\mathcal{U})$ para todo $\lambda \in \mathcal{U}^*\mathcal{U}$.

(c) $aM \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ para todo $a \in \mathcal{U}$.

Demostración 12.53 **(i)** *La afirmación es consecuencia de la Prop. 12.38(i). Si* $m \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$, $f \in \mathcal{U}^*$ *y* $n \in \mathcal{U}^{**}$ *se tiene*

$$\left\langle n, \widehat{fm} \right\rangle \triangleq \langle f, m\Box n\rangle = \langle f, m\Diamond n\rangle = \langle fm, n\rangle = \langle n, \iota_{\mathcal{U}^*}(fm)\rangle .$$

Más aún, sea $\{a_j\}_{j\in J}$ *red acotada en* $\mathcal{U}$ *tal que* $m = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, \iota_j(a_j)$. *Si* $n \in \mathcal{U}^{**}$ *sigue que*

$$\begin{aligned} \langle fm, n\rangle &= \left\langle n, f\hat{m} \right\rangle \\ &= \langle f, m\Box n\rangle \\ &= \langle nf, m\rangle \\ &= \lim_{j\in J} \langle a_j, nf\rangle \\ &= \lim_{j\in J} \langle fa_j, n\rangle , \end{aligned}$$

i.e. $fm \in \overline{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}^{w}$, *y por el Teo. 13.61(i) y el Corolario 13.23 concluímos que* $fm \in \mathcal{U}^*\mathcal{U}$.

(iia $\Leftrightarrow$ *iib) Dadas cualquier red* $\{L_i\}_{i\in I}$ *en* $(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$, $\lambda \in \mathcal{U}^*\mathcal{U}$ *e* $i \in I$ *es* $\langle \lambda, ML_i\rangle = \left\langle L_i, \lambda\overset{\vee}{M} \right\rangle$. *Luego* $L_i \xrightarrow{w^*} 0_{(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*}$ *si y solo si* $\langle \lambda, ML_i\rangle \to 0$.

(iib $\Rightarrow$ *iic) Veamos que si* $a \in \mathcal{U}$ *y* $f \in \mathcal{U}^*$ *entonces*

$$(f\overset{\vee}{a})\, M \circ ({}_*j)^* = f\,(\hat{a}M). \tag{135}$$

Precisamente, si $m \in \mathcal{U}^{**}$ *extiende a* M *dado* $n \in \mathcal{U}^{**}$ *por (134), la*

Obs. 12.51 y la Prop. 12.49(v) tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle n, f\,(\overset{\wedge}{aM})\right\rangle &= \langle f, (aM)\,\Box n\rangle \\
&= \langle nf, am\rangle \\
&= \langle (nf)\,a, m\rangle \\
&= \langle n\,(fa)\,, m\rangle \\
&= \langle fa, m\Box n\rangle \\
&= \langle ({}_*j)\,(fa)\,, m\Box n\rangle \\
&= \langle fa, ({}_*j)^*\,(m\Box n)\rangle \\
&= \langle fa, M\,({}_*j)^*\,(n)\rangle \\
&= \left\langle ({}_*j)^*\,(n), (\overset{\vee}{fa})\,M\right\rangle \\
&= \left\langle n, (\overset{\vee}{fa})\,M\circ({}_*j)^*\right\rangle.
\end{aligned}$$

Ahora por hipótesis existe $\lambda\in\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ *tal que* $(\overset{\vee}{fa})\,M=\iota_{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}(\lambda)$ *y si* $n\in\mathcal{U}^{**}$ *por (135) obtenemos*

$$\left\langle n, f\,(\overset{\wedge}{aM})\right\rangle = \langle u, ({}_*j)^*\,(n)\rangle = \langle u, n\rangle = \langle n, \iota_{\mathcal{U}^*}\,(\lambda)\rangle \tag{136}$$

y por (i) sigue (ii)(c).

$(iic\Rightarrow iia)$ *Sean* $w^*\text{-lím}_{i\in I}\,N_i=0_{(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*}$, $\lambda=fa$ *en* $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ *y si* $i\in I$ *sea* $n_i\in\mathcal{U}^{**}$ *extensión de* N_i. *Por (134) y (135) si* $i\in I$ *es*

$$\langle fa, MN_i\rangle = \left\langle N_i, (\overset{\vee}{fa})\,M\right\rangle = \left\langle ({}_*j)^*\,(n_1), (\overset{\vee}{fa})\,M\right\rangle = f\,(\overset{\wedge}{aM})\,(n_i)\,. \tag{137}$$

Pero por (i) tenemos $f\,(\overset{\wedge}{aM})=\iota_{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}\,(\lambda)$ *para cierto* $\lambda\in\mathcal{U}^*\mathcal{U}$. *Por (137) escribimos*

$$\langle fa, MN_i\rangle = \langle \lambda, n_i\rangle = \langle \lambda, N_i\rangle$$

para $i\in I$, *o sea* $\text{lím}_{i\in I}\,\langle fa, MN_i\rangle=0$ *y sigue la tesis.*

Corolario 12.54 *Si* $\mathcal{U}$ *es álgebra de Banach con aproximación acotada de la unidad entonces* $\mathcal{U}\mathcal{Z}_t^1\,(\mathcal{U}^{**})=\mathcal{U}\mathcal{Z}_t^1\,((\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*)\,.$

Demostración 12.55 *Si* $M \in \mathcal{Z}_t^1\left((\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*\right)$ *por la Prop. 12.52(ii) tenemos* $\mathcal{U}M \subseteq \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$. *Luego* $\mathcal{U}(\mathcal{U}M) \subseteq \mathcal{U}\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$. *Como* $\mathcal{U}M$ *es* $\mathcal{U}$ *módulo de Banach a izquierda y* $\mathcal{U}$ *posee aproximación acotada de la unidad por el teorema de Cohen* $\mathcal{U}M = \mathcal{U}(\mathcal{U}M)$, *i.e.* $\mathcal{U}\mathcal{Z}_t^1\left((\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*\right) \subseteq \mathcal{U}\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$. *Por otra parte, dado* $n \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ *sea* N *la restricción de* n *a* $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$. *Entonces* $an = aN$ *para cada* $a \in \mathcal{U}$ *como se señalara en la Obs. 12.51 y* $N \in \mathcal{Z}_t^1\left((\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*\right)$. *Precisamente,basta notar que* $\mathcal{U}\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) \subseteq \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$, *y de nuevo por la Prop. 12.52(ii) sigue la tesis.*

Definición 12.56 *En un álgebra de Banach* $\mathcal{U}$, *un elemento* $f \in \mathcal{U}^*$ *se dice débilmente completamente continuo a izquierda (o* $f \in dcci$*) si la aplicación* $L_f^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*} : a \to fa$ *de* $\mathcal{U}$ *en* $\mathcal{U}^*$ *transforma sucesiones débiles de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes. Indicaremos* $DCCI(\mathcal{U}^*)$ *a dicha clase de elementos.*

Definición 12.57 *En un álgebra de Banach* $\mathcal{U}$, *un elemento* $m \in \mathcal{U}^{**}$ *se dice que es Baire de tipo 1 (o* $m \in B_1$*) si hay una sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* $\mathcal{U}$ *tal que* $m = w^*\text{-lím}_{n\to\infty}\, \iota_{\mathcal{U}}(a_n)$. *Indicaremos* $B_1(\mathcal{U}^{**})$ *a la clase de tales elementos.*

Lema 12.58 *(Ibíd., Lemma 3.3) Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach. Entonces* $B_1(\mathcal{U}^{**}) \subseteq \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ *si y solo si* $DCCI(\mathcal{U}^*) = \mathcal{U}^*$.

Demostración 12.59 $(\Rightarrow)$ *Sean* $f \in \mathcal{U}^*$ *y* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión débil de Cauchy en* $\mathcal{U}$. *Esta sucesión ha de ser acotada por el principio de acotación uniforme de modo que por el teorema de Alaoglu*[59] *está definido* $n = w^*\text{-lím}_{n\to\infty}\, \iota_{\mathcal{U}}(a_n)$. *Por hipótesis* $n \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$ *y si* $m \in \mathcal{U}^{**}$ *vemos que*

$$\begin{aligned} \langle fn, m\rangle &= \langle f, n\Diamond m\rangle \\ &= \langle f, n\Box m\rangle \\ &= \langle mf, n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle a_n, mf\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle fa_n, m\rangle, \end{aligned}$$

i.e. $fn = w\text{-lím}_{n\to\infty} fa_n$ *y* $f \in DCCI(\mathcal{U}^*)$.

$(\Leftarrow)$ *Sea* $p \in B_1(\mathcal{U}^{**})$, $p = w^*\text{-lím}_{n\to\infty}\, \iota_{\mathcal{U}}(b_n)$ *para cierta sucesión* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *contenida en* $\mathcal{U}$. *Sea* $\{q_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{U}^{**}$ *tal que* $w^*\text{-lím}_{i\in I}\, q_i = 0_{\mathcal{U}^{**}}$. *Si*

[59]Hay que considerar alguna subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pero como $\{\langle a_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ converge para todo $g \in \mathcal{U}^*$ la sucesión $\{\iota_{\mathcal{U}}(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ resulta w^*-convergente.

$h \in \mathcal{U}^*$, como $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ deviene sucesión débil de Cauchy, por hipótesis existe $l \in \mathcal{U}^*$ tal que $l = w\text{-lím}_{n\to\infty}(hb_n)$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i\in I} \langle l, q_i\rangle \\ &= \lim_{i\in I}\lim_{n\to\infty} \langle hb_n, q_i\rangle \\ &= \lim_{i\in I}\lim_{n\to\infty} \langle b_n, q_i h\rangle \\ &= \lim_{i\in I} \langle q_i h, p\rangle \\ &= \lim_{i\in I} \langle h, p\Box q_i\rangle, \end{aligned}$$

o sea $0_{\mathcal{U}^{**}} = w^*\text{-lím}_{i\in I}\, p\Box q_i$ y sigue la afirmación.

Teorema 12.60 *(Ibíd., Th. 3.4) Sea $\mathcal{U}$ álgebra de Banach con una aproximación acotada secuencial $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la identidad tal que $\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})\mathcal{U} \subseteq \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$.*

(i) Si $\mathcal{U}$ es débilmente secuencialmente completo entonces $\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) = \iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$.

(ii) Si $\mathcal{U}^*$ es débilmente secuencialmente completo[60] $\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) = B_1(\mathcal{U}^{**})$.

(iii) Si $\mathcal{U}$ es regular entonces $\mathcal{U}^{**} = B_1(\mathcal{U}^{**})$.

Demostración 12.61 **(i)** *Sea $m \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$. Por el Corolario 4.3 hay en $\mathcal{U}^{**}$ una unidad mixta E del tipo*

$$E = w^* - \lim_{k\to\infty} \iota_{\mathcal{U}}(e_{n_k}),$$

para cierta subsucesión $\{e_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $m = m\Box E$ y por la Prop. 12.38(i) $m = w^*\text{-lím}_{k\to\infty}(me_{n_k})$. Por hipótesis deducimos que $m \in B_1(\mathcal{U}^{**})$. Como $\mathcal{U}$ es débilmente secuencialmente completa y puesto que $\{me_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ resulta sucesión débil de Cauchy en $\mathcal{U}$ existe $a \in \mathcal{U}$ tal que $a = w\text{-lím}_{k\to\infty}(me_{n_k})$. Finalmente, es inmediato que $m = \iota_{\mathcal{U}}(a)$. La otra inclusión es trivial.

(ii) *Veamos que $DCCI(\mathcal{U}^*) = \mathcal{U}^*$ asumiendo que $\mathcal{U}^*$ es débilmente secuencialmente completo. Sean $f \in \mathcal{U}^*$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión débil de Cauchy en $\mathcal{U}$. Si $\phi \in \mathcal{U}$ entonces $\{\langle fa_n, \phi\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy porque $\{\langle a_n, \phi f\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ lo es y ambas coinciden. Por lo tanto existe $g \in \mathcal{U}^*$ tal que $g = w\text{-lím}_{n\to\infty}(fa_n)$ y sigue la afirmación. Por el Lema 12.58 es $B_1(\mathcal{U}^{**}) \subseteq \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$. La otra inclusión sigue como en la primera parte de (i).*

[60] V. [132].

(iii) *Si $\mathcal{U}$ fuere regular por el Teorema 3.1 $\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) = \mathcal{U}^{**}$ y basta razonar como en la primer parte de (i).*

Teorema 12.62 *(Ibíd., Th. 3.6) Sea $\mathcal{U}$ álgebra de Banach con aproximación acotada $\{e_i\}_{i\in I}$ de la identidad. Son equivalentes:*

(i) $\mathrm{WAP}(\mathcal{U}) \supseteq \mathcal{U}^*\mathcal{U}$. [61]

(ii) $\mathcal{U}\mathcal{U}^{**} \subseteq \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$.

(iii) $\mathcal{U}\mathcal{U}^{**} \subseteq \mathcal{U}\mathcal{Z}_t^1((\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*)$.

(iv) $(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^* = \mathcal{Z}_t^1((\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*)$.

Demostración 12.63 *$(i \Rightarrow ii)$ Sean $a \in \mathcal{U}$, $m, n \in \mathcal{U}^{**}$, $f \in \mathcal{U}^*$. Entonces*

$$\begin{aligned}\left\langle n, f\,(\overset{\wedge}{am})\right\rangle &= \langle f, (am)\,\square n\rangle \\ &= \langle f, a\,(m\square n)\rangle \\ &= \langle fa, m\square n\rangle \\ &= \langle fa, m\Diamond n\rangle \\ &= \langle (fa)\,m, n\rangle \\ &= \langle n, \iota_{\mathcal{U}^*}\,((fa)\,m)\rangle\,,\end{aligned}$$

i.e. $f\,(\overset{\wedge}{am}) \in \iota_{\mathcal{U}^*}(\mathcal{U}^*)$ y basta aplicar la Prop. 12.52(i).

$(ii \Rightarrow iii)$ Como $\mathcal{U}$ tiene aproximación acotada de la identidad por el teorema de Cohen $\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}$. Por el Corolario 12.54 tenemos

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^{**} = (\mathcal{U}\mathcal{U})\,\mathcal{U}^{**} \subseteq \mathcal{U}\,(\mathcal{U}\mathcal{U}^{**}) \subseteq \mathcal{U}\mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**}) = \mathcal{U}\mathcal{Z}_t^1((\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*).$$

$(iii \Rightarrow iv)$ Sean $M \in (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ y $\{N_j\}_{j\in J} \subseteq (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*$ red w^*-convergente a cero. Si $f \in \mathcal{U}^*$, $j \in J$ y $a \in \mathcal{U}$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle fa, MN_j\rangle &= \lim_{i\in I}\langle fe_i, a\,(MN_j)\rangle \\ &= \lim_{i\in I}\langle fe_i, ((aM)\,N_j)\rangle \\ &= \lim_{i\in I}\langle fe_i, ((aM)\,N_j)\rangle\,,\end{aligned} \tag{138}$$

[61] Generalizando la noción ya introducida en el Teorema 11.19, $\mathrm{WAP}(\mathcal{U})$ denota el conjunto de funcionales $f \in \mathcal{U}^*$ que son *casi-periódicos*, i.e. la aplicación $L_f^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$, $L_f^{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}(a) = fa$ es débilmente compacta.

donde hemos usado que $\left({}_{*}j\right)^{*}(bn) = b\left({}_{*}j\right)^{*}(n)$ *y* $b(PQ) = (bP)\,Q$ *si* $b \in \mathcal{U}$, $n \in \mathcal{U}^{**}$ *y* $P, Q \in (\mathcal{U}^{*}\mathcal{U})^{*}$. *Sabemos que* $aM = am$ *donde* m *es cualquier extensión de* M *a* $\mathcal{U}^{*}$*, de modo que por hipótesis podemos escribir* $aM = cR$ *para ciertos* $c \in \mathcal{U}$ *y* $R \in \mathcal{Z}_{t}^{1}((\mathcal{U}^{*}\mathcal{U})^{*})$. *Por (138) resulta*

$$0 = \lim_{j\in J} \langle fc, RN_j\rangle = \lim_{j\in J}\lim_{i\in I} \langle fe_i, ((cR)\,N_j)\rangle = \lim_{j\in J} \langle fa, MN_j\rangle .$$

$(iv \Rightarrow i)$ *Dados* $f \in \mathcal{U}^{*}$ *y* $a \in \mathcal{U}$ *veremos que el conjunto*

$$H(fa) = \{(fa)\,x : x \in [\mathcal{U}]_1\}$$

es relativamente débilmente compacto. Por el teorema de Eberlein-Šmulian bastará ver que dada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sucesión infinita en* $[\mathcal{U}]_1$ *el conjunto* $\{(fa)\,x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tiene algún punto de débil acumulación. Por el teorema de Alaoglu existe alguna subsucesión* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *de* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de modo que existe* $m = w^{*}\text{-lím}_{k\to\infty}\,\iota_{\mathcal{U}}(x_{n_k})$. *Si* $M = m\,|_{\mathcal{U}^{*}\mathcal{U}}$ *por la hipótesis* $M \in \mathcal{Z}_{t}^{1}((\mathcal{U}^{*}\mathcal{U})^{*})$. *Además* $aM = am$ *pertenece a* $\mathcal{U}\mathcal{Z}_{t}^{1}((\mathcal{U}^{*}\mathcal{U})^{*})$. *Por el Corolario 12.54* $am \in \mathcal{U}\mathcal{Z}_{t}^{1}(\mathcal{U}^{**})$ *y como* $\mathcal{U}\mathcal{Z}_{t}^{1}(\mathcal{U}^{**}) \subseteq \mathcal{Z}_{t}^{1}(\mathcal{U}^{**})$ *por la Prop. 12.52(i) sabemos que* $(fa)\,m \in \mathcal{U}^{*}\mathcal{U}$ *y* $\widehat{(fa)}\,m = \iota_{\mathcal{U}^{*}}((fa)\,m)$. *Si* $n \in \mathcal{U}^{**}$ *escribimos*

$$\begin{aligned}
\left\langle n, \widehat{(fa)}\,m \right\rangle &= \langle (fa)\,m, n\rangle \\
&= \langle f\,(am)\,, n\rangle \\
&= \langle am, nf\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle ax_{n_k}, nf\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle f\,(ax_{n_k})\,, n\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle (fa)\,x_{n_k}, n\rangle ,
\end{aligned}$$

i.e. $\widehat{(fa)}\,m = w\text{-lím}_{k\to\infty}\,((fa)\,x_{n_k})$.

Teorema 12.64 *(Ibíd., Th. 5.1) Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra de Banach con aproximación acotada de la unidad* $\{e_k\}_{k\in K}$. *Dado* $m \in \mathcal{U}^{**}$ *son equivalentes:*

(i) $m \in \mathcal{Z}_{t}^{1}(\mathcal{U}^{**})$.

(ii) (a) $m\iota_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{Z}_{t}^{1}(\mathcal{U}^{**})$, (b) Dado $E \in \mathcal{E}$, $m\Diamond E = m$ y (c) $fm \in \mathcal{U}^{*}\mathcal{U}$ si $f \in \mathcal{U}^{*}$.

Demostración 12.65 $(i \Rightarrow ii)$ *Sean* $w^*\text{-}\lim_{i\in I} n_i = 0_{\mathcal{U}^{**}}$ *y* $a \in \mathcal{U}$. *Evidentemente* $w^*\text{-}\lim_{i\in I}(an_i) = 0_{\mathcal{U}^{**}}$ *y por la Prop. 12.38(i) resulta*

$$0_{\mathcal{U}^{**}} = w^*\text{-}\lim_{i\in I} m\Box(an_i) = w^*\text{-}\lim_{i\in I}(ma)\Box n_i,$$

i.e. $ma \in \mathcal{Z}_t^1(\mathcal{U}^{**})$. *Dados* $E \in \mathcal{E}$, $g \in \mathcal{U}^*$, $b \in \mathcal{U}$ *es*

$$\begin{aligned}\langle b, Eg\rangle &= \langle gb, E\rangle \\ &= \langle g, bE\rangle \\ &= \langle g, \iota_{\mathcal{U}}(b)\Box E\rangle \\ &= \langle g, \iota_{\mathcal{U}}(b)\rangle \\ &= \langle b, g\rangle,\end{aligned}$$

de donde $Eg = g$. *En consecuencia,*

$$\langle g, m\Diamond E\rangle = \langle g, m\Box E\rangle = \langle Eg, m\rangle = \langle g, m\rangle,$$

y sigue (ii)(b). La condición (ii)(c) sigue de la Prop. 12.52(i).

$(ii \Rightarrow i)$ *Sea* $E \in \mathcal{S}$ *del tipo* $E = w^*\text{-}\lim_{j\in J}\iota_{\mathcal{U}}(e_j)$, *donde* $\{e_j\}_{j\in J}$ *es alguna subred de* $\{e_k\}_{k\in K}$. *Dados* $n \in \mathcal{U}^{**}$ *y* $f \in \mathcal{U}^*$ *tenemos*

$$\begin{aligned}\langle f, m\Box n\rangle &= \langle nf, m\rangle \\ &= \langle nf, m\Diamond E\rangle \quad \text{(por (ii)(b))} \\ &= \langle (nf)\,m, E\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle e_j, (nf)\,m\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle e_j(nf), m\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle nf, me_j\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle f, (me_j)\Box n\rangle \quad \text{(por (ii)(a))} \\ &= \lim_{j\in J}\langle f, (me_j)\Diamond n\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle f, m\Diamond(e_jn)\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle fm, e_jn\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle (fm)\,e_j, n\rangle \quad \text{(por (ii)(c))} \\ &= \langle fm, n\rangle \\ &= \langle f, m\Diamond n\rangle.\end{aligned}$$

13. ANEXO

13.1. Teorema de Arens-Kelley

Teorema 13.1 [62] *(cf. [5]) Sean Ω espacio compacto Hausdorff y X un espacio vectorial topológico.*

(i) $[M(\Omega)]_1 = \overline{\text{co}\,(D)}^{w^*}$, con $D = \{c\delta_x : |c| = 1 \text{ en } \mathbb{C} \text{ y } x \in \Omega\}$.

(ii) Si $A \subseteq X$ se tiene $\overline{\text{co}(A)} = \overline{\text{co}}\,(A)$,i.e. $\overline{\text{co}\,A}$ es la *cápsula convexa cerrada de A.*

(iii) Sean A, B subconjuntos de X cuyas cápsulas convexas cerradas son compactas. Entonces

$$\overline{\text{co}}\,(A \cup B) = \text{co}\,[\overline{\text{co}}\,(A) \cup \overline{\text{co}}\,(B)]\,.$$

(iv) Si X es localmente convexo y Q es subespacio compacto de X cuya cápsula convexa cerrada es compacta entonces $\text{ext}\,[\overline{\text{co}}(Q)] \subseteq Q$.

(v) Dado $\mathfrak{X}$ subespacio de Banach de $C\,(\Omega)$, $\text{ext}\,([\mathfrak{X}]_1) \subseteq D$.

(vi) $\text{ext}\,([\text{M}\,(\Omega)]_1) = D$.

Demostración 13.2 **(i)** *La inclusión $\supseteq$ es inmediata. Si $\mu \notin \overline{\text{co}\,(D)}^{w^*}$, por el Corolario 13.11 hay un operador lineal $\Lambda : \text{M}\,(\Omega) \to \mathbb{C}$ y w^*-continuo tal que para cierta constante $a \in \mathbb{R}$ es*

$$\text{Re}\,\langle \lambda, \Lambda \rangle < a < \text{Re}\,\langle \mu, \Lambda \rangle \tag{139}$$

para todo $\lambda \in D$. Como en el teorema de Goldstine existe $f \in C\,(\Omega)$ tal que $\langle \xi, \Lambda \rangle = \langle f, \xi \rangle$ para cada $\xi \in \text{M}\,(\Omega)$. Por (139), dado $x \in \Omega$ existe $c \in \mathbb{C}$ unitario de modo que

$$|f(x)| = cf(x) = \text{Re}\,[cf(x)] = \text{Re}\,\langle f, c\delta_x \rangle < a < \text{Re}\,\langle f, \mu \rangle\,.$$

Por lo tanto

$$\|f\| \leq a < \text{Re}\,\langle f, \mu \rangle \leq \|f\|\,\|\mu\|\,,$$

y como claramente $f \neq 0$ deducimos que $\|\mu\| > 1$.

---

[62] *Palabras clave:* Cápsulas convexa y convexa cerrada de un conjunto.

(ii) *La inclusión* $\supseteq$ *es inmediata. Si* $\eta \notin \overline{\text{co}}\,(A)$ *sea* C *convexo cerrado tal que* $A \subseteq C$ *y* $\eta \notin C$. *Inferimos que* $\eta \notin A$ *porque*

$$\overline{A} \subseteq \overline{\text{co}\,(A)} \subseteq C.$$

(iii) *Como* $\overline{\text{co}}\,(A) \cup \overline{\text{co}}\,(B) \subseteq \overline{\text{co}}\,(A \cup B)$ *y* $\overline{\text{co}}\,(A \cup B)$ *es convexo,*

$$\text{co}\left[\overline{\text{co}}\,(A) \cup \overline{\text{co}}\,(B)\right] \subseteq \overline{\text{co}}\,(A \cup B)\,.$$

Por la hipótesis el conjunto $K = [0,1] \times \overline{\text{co}}\,(A) \times \overline{\text{co}}\,(B)$ *es compacto. Como la función*

$$\begin{aligned} \psi : K \to \text{co}\left[\overline{\text{co}}\,(A) \cup \overline{\text{co}}\,(B)\right], \\ \psi\,(s, x, y) = (1-s)\,x + sy, \end{aligned}$$

es continua $\psi\,(K)$ *resulta compacto. Además* $\psi\,(K) \supseteq A \cup B$ *y habremos deducido (iii) si* $\psi\,(K)$ *fuere convexo. En efecto, sean* $p = (t, x, y)\,,$ $\widetilde{p} = \left(\widetilde{t}, \widetilde{x}, \widetilde{y}\right)$ *en* K, $s \in [0,1]$ *y hagamos* $z = (1-s)\,\psi\,(p) + s\psi\,(\widetilde{p})\,.$ *Entonces*

$$z = (1-s)\left[(1-t)\,x + ty\right] + s\left[\left(1-\widetilde{t}\right)\widetilde{x} + \widetilde{t}\widetilde{y}\right]. \tag{140}$$

Si $\alpha = (1-s)\,(1-t) + s\left(1-\widetilde{t}\right)$, $\alpha \in [0,1]$. *Si* $0 < s < 1$, $\alpha = 0$ *si y solo si* $t = \widetilde{t} = 1$, *en cuyo caso por (140) es*

$$z = (1-s)\,y + s\widetilde{y} = \psi\,(0, x, (1-s)\,y + s\widetilde{y})\,.$$

Análogamente, si $\beta = (1-s)\,t + s\widetilde{t}$, $\beta \in [0,1]\,.$ *Si* $0 < s < 1$, $\beta = 0$ *si y solo si* $t = \widetilde{t} = 0$ *y ahora*

$$z = (1-s)\,x + s\widetilde{x} = \psi\,(0, (1-s)\,x + s\widetilde{x}, \widetilde{y})\,.$$

Con esta notación, si $0 < s < 1$, $\alpha > 0$ *y* $\beta > 0$, *vemos que* $\alpha + \beta = 1$ *y por (140) es*

$$\begin{aligned} z &= \alpha \frac{(1-s)\,(1-t)\,x + s\left(1-\widetilde{t}\right)\widetilde{x}}{\alpha} + \beta \frac{(1-s)\,ty + s\widetilde{t}\widetilde{y}}{\beta} \\ &= \psi\left(\alpha, \frac{(1-s)\,(1-t)\,x + s\left(1-\widetilde{t}\right)\widetilde{x}}{\alpha}, \frac{(1-s)\,ty + s\widetilde{t}\widetilde{y}}{\beta}\right). \end{aligned}$$

(iv) *Supongamos existe* $x \in \operatorname{ext}[\overline{\text{co}}\,(Q)] - Q$ *y sea* U_0 *entorno de cero tal que* $(x + U_0) \cap Q = \varnothing$. *Si* U *es entorno convexo de cero tal que* $U - U \subseteq U_0$ *vemos que*

$$(x + U) \cap (Q + U) = \varnothing, \tag{141}$$

i.e. $x \notin \overline{Q + U}$. *Como* Q *es compacto existe* $F \subseteq Q$ *finito tal que* $Q \subseteq \cup_{y \in F}(y + U)$. *Sea* $K_y = \overline{\text{co}}\,[(y + U) \cap Q]$, $y \in F$. *Cada* K_y *es cerrado en* $\overline{\text{co}}\,(Q)$, *y como* X *es separado, deviene compacto. Además*

$$\overline{\text{co}}\,(Q) \subseteq \overline{\text{co}}\,(\cup_{y \in F} K_y) \subseteq \overline{\text{co}}\,(Q)\,,$$

i.e. $\overline{\text{co}}\,(Q) = \overline{\text{co}}\,(\cup_{y \in F} K_y)$. *Por (iii) sigue claramente que*

$$\overline{\text{co}}\,(Q) = \text{co}\,[\cup_{y \in F} \overline{\text{co}}(K_y)] = \text{co}\,[\cup_{y \in F} K_y]\,.$$

Luego hay escalares $\{c_y\}_{y \in F}$ *en* $[0, 1]$ *de modo que* $\sum_{y \in F} c_y = 1$ *y elementos* $z_y \in K_y$ *para cada* $y \in F$ *de modo que* $x = \sum_{y \in F} c_y z_y$. *Como* x *es extremal,* $x = z_y$ *si* $c_y > 0$, *o sea que* $x \in \cup_{y \in F} K_y$. *Pero*

$$\cup_{y \in F} K_y \subseteq \cup_{y \in F} \overline{y + U} \subseteq \overline{Q + U},$$

y se contradice (141).

(v) *Como* Ω *y toda circunferencia del plano complejo son compactos* D *resulta* w^**-compacto. Por (i), (ii) y el teorema de Alaoglu* $\overline{\text{co}}\,(D)$ *resulta* w^**-compacto y basta aplicar (iv).*

(vi) *Sea* $c\delta_x = (1 - t)\,\widetilde{\mu} + t\widetilde{\eta}$, *con* $|c| = 1$ *en* $\mathbb{C}$, $0 < t < 1$ *y* $\widetilde{\mu}, \widetilde{\eta} \in [\mathrm{M}\,(\Omega)]_1$. *Si* $\mu = \overline{c}\widetilde{\mu}$ *y* $\eta = \overline{c}\widetilde{\eta}$, $\delta_x = (1 - t)\,\mu + t\eta$ *y bastará ver que* $\delta_x = \mu = \eta$. *Fijemos* $y \neq x$ *ya que podemos suponer* $\Omega \neq \{x\}$. *Como* Ω *es separado hay abiertos* U, V *con clausuras disjuntas,* $x \in U$ *e* $y \in V$. *Por el lema de Urysohn existe* $f \in C\,(\Omega, [0, 1])$ *tal que* $f\,|_{\overline{U}} \equiv 1$ *y* $\text{sop}\,(f) \subseteq \Omega - \overline{V}$. *Como*

$$1 = f\,(x) = \delta_x(f) = (1 - t)\,\mu\,(f) + t\eta\,(f)\,, \tag{142}$$

$|\mu\,(f)| \leq 1$ *y* $|\eta\,(f)| \leq 1$ *en* $\mathbb{C}$, $\mu\,(f) = \eta\,(f) = 1$. *En consecuencia, si* $f_0 \in C\,(\Omega)$ *es nula en un entorno de* x *tenemos*

$$1 = (f + f_0)\,(x) = \delta_x\,(f + f_0) = (1 - t)\,\mu\,(f + f_0) + t\eta\,(f + f_0)\,.$$

De (142) y la linealidad de μ *y* η, $\mu\,(f_0) = \eta\,(f_0) = 0$. *Sean* $g \in [C\,(\Omega)]_1$ *tal que* $g\,(x) = 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *El conjunto*

$$U_n = \{z \in \Omega : |g\,(z)| < 1/n\}$$

es entorno abierto de x y existe también V_n abierto de modo que $x \in V_n$ y $\overline{V_n} \subseteq U_n$. Sea $\widetilde{g}_n \in C(\Omega, [0,1])$ tal que $\widetilde{g}_n \mid_{\overline{V_n}} \equiv 1$, $\operatorname{sop}(\widetilde{g}_n) \subseteq U_n$ y hagamos $\widetilde{\widetilde{g}}_n = g\widetilde{g}_n$. Entonces $\left\|\widetilde{\widetilde{g}}_n\right\| \leq 1/n$, $\widetilde{\widetilde{g}}_n \mid_{\overline{V_n}} = g$ y $\operatorname{sop}\left(\widetilde{\widetilde{g}}_n\right) \subseteq U_n$. Luego

$$\left|g - \widetilde{\widetilde{g}}_n\right| = |g(1 - \widetilde{g}_n)| \leq \|g\|_\infty \leq 1$$

y $g - \widetilde{\widetilde{g}}_n \to g$. Como cada $g - \widetilde{\widetilde{g}}_n$ es nula en un entorno de x y μ y η son continuas $\mu(g) = \eta(g) = 0$. En el caso general, sean $g \in C(\Omega)$ tal que $g(x) = 0$ y $k \in \mathbb{N}$ de modo que $g/k \in [C(\Omega)]_1$. Luego μ y η se anulan en g/k y por consiguiente en g. Como $\ker(\delta_x) \subseteq \ker(\mu) \cap \ker(\eta)$ existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $\mu = a\delta_x$ y $\eta = b\delta_x$. En particular, debe ser $\max\{|a|, |b|\} \leq 1$. Así $\delta_x = [(1-t)a + tb]\delta_x$ y podemos inferir que $(1-t)a + tb = 1$. Como 1 es extremal en la circunferencia compleja habrá de ser entonces $a = b = 1$.

13.2. Teorema de Banach-Hahn

Teorema 13.3 [63]*(cf. [67], [13], [14]) Sea X un espacio vectorial real, munido de un funcional sublineal $p : X \to \mathbb{R}$, i.e.*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ y } p(\rho x) = \rho p(x)$$

toda vez que $x, y \in X$ y $\rho \geq 0$. Sea Y un subespacio vectorial propio de X y sea $t : Y \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $t(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Y$. Entonces existe un operador lineal $T : X \to \mathbb{R}$ que extiende a t y $T(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración 13.4 *Fijemos $x_0 \in X - Y$ y sea $Z = Y \oplus \mathbb{R}x_0$. Procuraremos en principio una extensión S de t a Z en las condiciones de la afirmación. Para ello, si $y \in Y$ y $\rho \in \mathbb{R}$ sea $z = y + \rho x_0$. Debería ser $S(z) = t(y) + \rho S(x_0)$, y todo consiste en decidir la existencia de algún valor conveniente $S(x_0) \in \mathbb{R}$. Podemos asumir $\rho \neq 0$. Si $\rho > 0$, a posteriori tendríamos*

$$t(y) + \rho S(x_0) = S(z) \leq p(z) = p(y + \rho x_0) = \rho p(y/\rho + x_0),$$

de donde $S(x_0) \leq -t(y/\rho) + p(y/\rho + x_0)$. Como $y \in Y$ es arbitrario habría de ser

$$S(x_0) \leq \inf\{p(y + x_0) - t(y) : y \in Y\}. \tag{143}$$

[63]*Palabras clave*: Cadenas filtrantes. Lema de Zorn. Espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Entornos simétricos del orígen. Topologías débil, w o $\sigma(X, X^*)$ sobre un espacio vectorial topológico X y topología $*$-débil, w^* o $\sigma(X^*, X)$ sobre X^*.

Si $\rho < 0$ tendríamos

$$t(y) + \rho S(x_0) = S(z) \leq p(z) = p(y + \rho x_0) = -\rho p(-y/\rho - x_0),$$

de donde

$$S(x_0) \geq -p(-y/\rho - x_0) + t(-y/\rho).$$

Como antes, habría de ser

$$S(x_0) \geq \sup\{t(y) - p(y - x_0) : y \in Y\}. \tag{144}$$

De (143) y (144), podremos hallar una definición satisfactoria de $S(x_0)$ si para $y_1, y_2 \in Y$ resulta

$$t(y_1) - p(y_1 - x_0) \leq p(y_2 + x_0) - t(y_2). \tag{145}$$

En efecto, dados $y_1, y_2 \in Y$ tenemos

$$t(y_1) + t(y_2) = t(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) \leq p(y_1 - x_0) + p(x_0 + y_2)$$

y sigue (145). Podemos considerar entonces la familia $\mathcal{F}$ de pares ordenados (Z, S), en la que Z es un subespacio de X que contiene a Y, $S : Z \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal que extiende a t y $S(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Z$. Introducimos una noción de orden $\leq$ sobre $\mathcal{F}$, a saber: si (Z_1, S_1) y (Z_2, S_2) son elementos de $\mathcal{F}$, será $(Z_1, S_1) \leq (Z_2, S_2)$ si y solo si $Z_1 \subseteq Z_2$ y $S_2 |_{Z_1} = S_1$. Es fácil ver que $\mathcal{F}$ deviene en un conjunto parcialmente ordenado. Consideremos entonces una cadena filtrante superiormente $\mathcal{C} = \{(Z_v, S_v)\}_{v \in V}$. El conjunto $Z \triangleq \cup_{v \in V} Z_v$ contiene a Y y es un subespacio vectorial real de X pues $\mathcal{C}$ se asume filtrante superiormente. Sea $S : Z \to \mathbb{R}$, $S(x) \triangleq S_v(x)$ si $x \in Z_v$ con $v \in V$.Si fuere también $x \in Z_w$ para $w \in V$ podemos asumir sin pérdida de generalidad que $(Z_v, S_v) \leq (Z_w, S_w)$. Pero entonces $S_w(x) = S_w |_{Z_v} (x) = S_v(x)$ y así S está bien definida. Como $\mathcal{C}$ es filtrante superiormente sigue enseguida que S es una aplicación lineal que extiende a t. En consecuencia, $(Z, S) \in \mathcal{F}$ y (Z, S) es cota superior de $\mathcal{C}$. Por el lema de Zorn $\mathcal{F}$ posee un elemento maximal (Z_0, S_0). Si Z_0 fuera subespacio propio de X, razonando como al principio podemos construir un elemento $(Z_1, S_1) \in \mathcal{F}$ de manera que $Z_0 \subsetneq Z_1$ en contradicción con el carácter maximal de (Z_0, S_0). Por lo tanto $Z_0 = X$ y basta considerar $T = S_0$.

Corolario 13.5 *Sea X un espacio vectorial complejo munido de una aplicación sublineal p. Sea Y un subespacio vectorial propio de X y sea $t : Y \to \mathbb{C}$ una aplicación lineal tal que $|t(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Y$. Entonces existe un operador lineal $T : X \to \mathbb{C}$ que extiende a t, i.e. $T(x) = t(x)$ para todo $x \in Y$, de modo que $|T(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración 13.6 *Escribiremos* $t_1 = \mathrm{Re}\,(t)\,,\ t_2 = \mathrm{Im}(t)$*, o sea*

$$t_1(x) = \left(t\,(x) + \overline{t(x)}\right)/2,\ t_2(x) = \left(t(x) - \overline{t(x)}\right)/(2i)$$

para cada $x \in Y$*. Entonces* $t = t_1 + it_2$ *y tanto* t_1 *como* t_2 *son formas lineales reales sobre* Y*. Si* $x \in Y$ *podemos escribir*

$$t_1(ix) + it_2(ix) = t(ix) = it(x) = it_1(x) - t_2(x),$$

i.e.

$$t_2(x) = -t_1(ix)\ y\ t_1(x) = t_2(ix). \tag{146}$$

Las identidades en (146) son compatibles, ya que

$$t_2(ix) = -t_1\left(i^2x\right) = t_1(x).$$

Luego $t\,(x) = t_1(x) - it_1(ix)$ *para todo* $x \in Y$*. Además*

$$t_1\,(x) \leq |t_1(x)| \leq |t(x)| \leq p(x),$$

y por el Teorema 13.3 hay una extensión lineal real $T_1 : X \to \mathbb{R}$ *de* t_1 *tal que* $T_1(x) \leq p(x)$ *si* $x \in X$*. Escribiendo* $T(x) \triangleq T_1(x) - iT_1(ix)$ *queda definida una función* $T : X \to \mathbb{C}$ *tal que* $T\mid_Y = t$*. Evidentemente* T *es aditiva y si* $\zeta \in \mathbb{C}$ *y* $x \in X$ *entonces* $T(\zeta x) = \zeta T(x)$*. Precisamente, sea* $\zeta = a + ib$ *para ciertas* $a, b \in \mathbb{R}$*. Entonces*

$$\begin{aligned} T\,(\zeta x) &= T_1\,(\zeta x) - iT_1(i\zeta x) \\ &= T_1(ax + ibx) - iT_1\,(iax - bx) \\ &= aT_1(x) + bT_1(ix) - (aT_1(ix) - bT_1(x))\,i \\ &= (a + ib)\,(T_1(x) - iT_1(ix)) \\ &= \zeta T(x). \end{aligned}$$

Luego T *es una extensión* $\mathbb{C}$*-lineal de* t*. Dado* $x \in X$*, si* $T(x) \neq 0$ *sea* $\sigma \in \mathbb{S}^1$ *tal que* $T(x) = \sigma\,|T(x)|$*. Entonces*

$$|T(x)| = \overline{\sigma}T(x) = T\,(\overline{\sigma}x) = T_1\,(\overline{\sigma}x) \leq p\,(\overline{\sigma}x) = p(x)$$

y sigue la tesis.

Definición 13.7 *Si* X *es un espacio vectorial topológico, denominamos semiespacio cerrado (resp. semiespacio abierto) a todo conjunto* S *de la forma*

$$S = \{x \in X : \mathrm{Re}\,\Lambda(x) \geq \alpha\}$$

(resp. $S = \{x \in X : \mathrm{Re}\,\Lambda(x) > \alpha\}$*), donde* $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ *es una forma lineal continua y* $\rho \in \mathbb{R}$*. Dos subconjuntos de* X *se dicen separados (resp. estrictamente separados) si están contenidos en semiespacios cerrados (resp. semiespacios abiertos) disjuntos.*

Teorema 13.8 *Sean X un espacio vectorial topológico real, A, B conjuntos convexos disjuntos no vacíos, A abierto. Existen una forma lineal continua $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ y una constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\Lambda(x) < \alpha \leq \Lambda(y)$ si $x \in A$ e $y \in B$. Si B fuere también abierto, las desigualdades anteriores pueden ser estrictas.*

Demostración 13.9 *Sean $a \in A, b \in B$, y hagamos $C \triangleq A - B + c$, con $c \triangleq -a + b$. En consecuencia, $0 \in C$ y C es convexo. Como A es abierto es claro que C también lo es pues se realiza como la unión de traslaciones de A. Entonces, C es un entorno convexo de cero. Si $x \in X$ sea*[64]

$$\mu_C(x) \triangleq \inf \{t > 0 : x/t \in C\}.$$

Como la aplicación $c \to cx$ de $\mathbb{C}$ en X es continua $\mu_C(x)$ está definido y $0 \leq \mu_C(x) < \infty$. Ya que C es convexo y $0 \in C$, $x \in C$ si $\mu_C(x) < 1$. Por otra parte, si $x \in C$ existe $\delta > 0$ tal que $cx \in C$ si $|1 - c| < \delta$. Si $1 < c < 1+\delta$ se tiene $cx \in C$ y $1 > 1/c \geq \mu_C(x)$. En definitiva, $C = \{x \in X : \mu_C(x) < 1\}$. Veamos que μ_C es un funcional sublineal. En efecto, si $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$ sean s, t positivos tales que $x/s, y/t \in C$, $s < \mu_C(x) + \varepsilon/2$ y $t < \mu_C(y) + \varepsilon/2$. Entonces

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{s}{s+t} \cdot \frac{x}{s} + \frac{t}{s+t} \cdot \frac{y}{t} \in C,$$

de modo que

$$\mu_C(x+y) \leq s + t < \mu_C(x) + \mu_C(y) + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario $\mu_C(x+y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$. Que $\mu_C(tx) = t\mu_C(x)$ para todo $t \geq 0$ y todo $x \in X$ es inmediato. Ahora bien, $c \notin C$ pues $A \cap B = \varnothing$. Como C es entorno convexo de cero entonces $\mu_C(c) \geq 1$. Consideremos la aplicación lineal $l : \mathbb{R}c \to \mathbb{R}$ tal que $l(tc) = t$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Si $t \geq 0$ vemos que

$$l(tc) = t \leq t\mu_C(c) = \mu_C(tc).$$

En consecuencia $l(tc) \leq \mu_C(tc)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y existe una extensión lineal Λ de l a X de modo que $\Lambda(x) \leq \mu_C(x)$ para todo $x \in X$. Si $x \in A$ e $y \in B$ tenemos $x - y + c \in C$ y

$$\begin{aligned}\Lambda(x - y + c) &= \Lambda(x) - \Lambda(y) + l(c) \\ &= \Lambda(x) - \Lambda(y) + 1 \\ &\leq \mu_C(x - y + c) \\ &< 1,\end{aligned}$$

[64] μ_C es el denominado *funcional de Minkowski* de C.

i.e. $\Lambda(x) < \Lambda(y)$. *Notemos que* $\Lambda(A)$ *y* $\Lambda(B)$ *resultan subconjuntos convexos (o intervalos) disjuntos de* $\mathbb{R}$. *Si* $C_0 \triangleq C \cap (-C)$, C_0 *es un entorno abierto y simétrico de cero, i.e.* $C_0 = -C_0$. *Si* $x \in C_0$ *tenemos*

$$\Lambda(x) \leq \mu_C(x) < 1 \text{ y } \Lambda(-x) = -\Lambda(x) \leq \mu_C(x) < 1.$$

Por lo tanto, $|\Lambda(x)| < 1$ *y siendo* x *arbitraria,* Λ *deviene en una forma lineal acotada real sobre* X. *En consecuencia,* $\Lambda(A)$ *ha de ser abierto. Precisamente, si* $z \in A$ *entonces* $A - z$ *es entorno abierto de cero. Sea* $\eta > 0$ *tal que* $tc \in A - z$ *si* $|t| < \eta$. *Como* $\Lambda(z + tc) = \Lambda(z) + t$ *deducimos que* $\Lambda(z) + t \in \Lambda(A)$ *si* $|t| < \eta$, *sigue la afirmación y enseguida la tesis.*

Observación 13.10 *Con la notación anterior, notemos que el funcional sublineal real* μ_C *es una seminorma si y solo si* $C = -C$. *En ese caso,* μ_C *es una seminorma continua. Precisamente, sea* $\{x_a\}_{a \in A}$ *una red de* X *que converge a cierto* $x \in X$. *Si* $\lim_{a \in A} \mu_C(x_a - x) \neq 0$, *pasando eventualmente a una subred* $\{x_{a_1}\}_{a_1 \in A_1}$ *podemos suponer que existe* $\zeta > 0$ *tal que* $\mu_C(x_{a_1} - x) \geq \zeta$ *si* $a_1 \in A_1$. *Entonces* $x_{a_1} \notin x + \zeta C$, *lo cual no es posible. En consecuencia, como* $|\mu_C(x_a) - \mu_C(x)| \leq \mu_C(x_a - x)$ *para cada* $a \in A$ *sigue la afirmación.*

Corolario 13.11 *Sean* X *un espacio vectorial topológico localmente convexo,* A *y* B *subconjuntos convexos cerrados disjuntos. Si* B *es compacto entonces* A *y* B *están estrictamente separados.*

Demostración 13.12 *Asumiremos en primer lugar el caso real. Puesto que* $B \subseteq X - A$ *y* $X - A$ *es abierto dado* $x \in B$ *existe un entorno* U_x *de* 0 *tal que* $x + U_x \subseteq X - A$. *Más aún, como* X *es localmente convexo existe un entorno abierto convexo de cero* V_x *tal que* $V_x + V_x \subseteq U_x$. *Como* B *es compacto sea* $F \in \mathcal{P}_f(B)$ *tal que* $B \subseteq \cup_{x \in F}(x + V_x)$. *Así* $V \triangleq \cap_{x \in F} V_x$ *es entorno abierto convexo de cero y*

$$B + V \subseteq \cup_{x \in F}(x + V_x + V) \subseteq \cup_{x \in F}(x + V_x + V_x) \subseteq \cup_{x \in F}(x + U_x) \subseteq X - A.$$

Como $B + V$ *es abierto convexo, por el Teorema 13.8 hay una forma lineal continua* $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ *y un escalar* $\beta \in \mathbb{R}$ *de modo que* $\Lambda(x) < \beta \leq \Lambda(y)$ *para* $x \in B + V$ *e* $y \in A$. *Además está definido* $\alpha \triangleq \max\{\Lambda(x) : x \in B\}$ *pues* Λ *es continua y* B *es compacto. Como* $B \subseteq B + V$ *sigue que* $\Lambda(x) \leq \alpha < \beta \leq \Lambda(y)$ *si* $x \in B$ *e* $y \in A$. *En el caso general, en cuanto* X *es también espacio real hay un funcional* Λ *en las condiciones anteriores. Hacemos entonces* $\Lambda_0(x) \triangleq \Lambda(x) - i\Lambda(ix)$ *para* $x \in X$. *Razonando como en el Corolario 13.5 sigue que* Λ *es una forma lineal compleja sobre* X, *evidentemente continua, y* $\operatorname{Re}\Lambda_0(x) \leq \alpha < \beta \leq \operatorname{Re}\Lambda_0(y)$ *si* $x \in B$ *e* $y \in A$.

Proposición 13.13 *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo, A una parte no vacía de X. Entonces la cápsula cerrada lineal* $\mathrm{ccl}(A)$ *de A es la intersección de la familia de semiespacios cerrados de X que contienen a A.*

Demostración 13.14 *Sea $\mathfrak{J}(A)$ la intersección de la familia de semiespacios cerrados de X que contienen a A. Evidentemente,* $\mathrm{ccl}(A) \subseteq \mathfrak{J}(A)$. *Por el Corolario 13.11, si $x \notin \mathrm{ccl}(A)$ existen una forma lineal continua Λ y constantes reales $\alpha < \beta$ tales que* $\mathrm{Re}\,\Lambda(x) \leq \alpha < \beta \leq \mathrm{Re}\,\Lambda(y)$ *si $y \in \mathrm{ccl}(A)$. En consecuencia $x \notin \mathfrak{J}(A)$ y sigue la afirmación.*

Proposición 13.15 *Si X es un espacio normado dado $x \in X - \{0\}$ existe $\lambda \in S_1(X^*)$ tal que $\lambda(x) = \|x\|$.*

Demostración 13.16 *Sea $l : \mathbb{C}x \to \mathbb{C}$ tal que $l(u) = c$ si $u = cx$. Entonces l es una aplicación lineal bien definida y $|l(u)| = \|u\| / \|x\|$ para todo $u \in \mathbb{C}x$. Por el teorema de Banach-Hahn existe una extensión lineal Λ de l tal que $|\Lambda(y)| \leq \|y\| / \|x\|$ si $y \in X$. En particular, $\Lambda \in X^*$ y $\|\Lambda\| \leq 1/\|x\|$. Más aún, $\Lambda(x/\|x\|) = 1/\|x\|$ y como $\|x/\|x\|\| = 1$ entonces $\|\Lambda\| = 1/\|x\|$ y basta considerar $\lambda = \|x\|\Lambda$.*

Proposición 13.17 *Hay una inmersión lineal isométrica $\iota_X : X \hookrightarrow X^{**}$.*

Demostración 13.18 *Sea $\iota_X(x) : X^* \to \mathbb{C}$, $\iota_X(x)(\lambda) \triangleq \lambda(x)$ si $x \in X$ y $\lambda \in X^*$. Fijado $x \in X$, si $a \in \mathbb{C}$ y $\lambda, \mu \in X^*$ se tiene*

$$\begin{aligned}
\iota_X(x)(a\lambda + \mu) &= (a\lambda + \mu)(x) \\
&= (a\lambda)(x) + \mu(x) \\
&= a\lambda(x) + \mu(x) \\
&= a\iota_X(x)(\lambda) + \iota_X(x)(\mu),
\end{aligned}$$

i.e. $\iota_X(x)$ en una aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Además

$$|\iota_X(x)(\lambda)| = |\lambda(x)| \leq \|\lambda\| \|x\|$$

i.e. $\iota_X(x) \in X^{**}$ y ι_X está bien definida, con $\|\iota_X(x)\| \leq \|x\|$. Evidentemente, $\iota_X(0) = 0_{X^*}$, y por la Prop. 13.15 si $x \in X - \{0\}$ existe $\lambda \in S_1(X^*)$ tal que $\iota_X(x)(\lambda) = \|x\|$. En consecuencia $\|\iota_X(x)\| = \|x\|$ y sigue la afirmación.

13.3. Teorema de Banach-Stone

Teorema 13.19 *(Cf. [14], p. 173; [122]) Sean X e Y espacios compactos y $T : C(X) \to C(Y)$ una isometría lineal suryectiva. Hay un homeomorfismo $\tau : Y \to X$ y una función $c \in C(Y)$ tales que $|c(y)| = 1$ y*

$$T(f)(y) = c(y)\, f(\tau(y))$$

cualesquiera sean $y \in Y$ y $f \in C(X)$.

Demostración 13.20 *Evidentemente todo operador del tipo enunciado define una isometría lineal suryectiva de $C(X)$ en $C(Y)$. Probaremos que esa es, precisamente, la estructura de toda isometría lineal suryectiva. Si T es isometría lineal suryectiva $T^* : M(Y) \to M(X)$ y si $\mu \in M(Y)$ tenemos*

$$\begin{aligned}
\|T^*(\mu)\| &= \sup_{\|f\|_{C(X)}=1} |\langle f, T^*(\mu)\rangle| \\
&= \sup_{\|f\|_{C(X)}=1} |\langle T(f), \mu\rangle| \\
&= \sup_{\|F\|_{C(Y)}=1} |\langle F, \mu\rangle| \\
&= \|\mu\| .
\end{aligned}$$

Además si $\psi \in M(X)$ sea $\lambda(T(f)) = \langle f, \psi\rangle$ cuando $f \in C(X)$. Como T es inyectiva λ está bien definida, es lineal y $|\lambda(T(f))| \leq \|\psi\| \, \|T(f)\|_{C(Y)}$ puesto que T es isométrica. Por el teorema de Banach-Hahn hay una extensión lineal $\Lambda : C(Y) \to \mathbb{C}$ de λ tal que $|\langle F, \Lambda\rangle| \leq \|\psi\| \, \|F\|_{C(Y)}$ para cada $F \in C(Y)$. Luego $\Lambda \in M(Y)$, $\|\Lambda\| \leq \|\psi\|$ y si $f \in C(X)$ es

$$\langle f, T^*(\Lambda)\rangle = \langle T(f), \Lambda\rangle = \langle T(f), \lambda\rangle = \langle f, \psi\rangle ,$$

i.e. $T^*(\Lambda) = \psi$. En consecuencia T^* define un w^*-isomorfismo entre $[M(Y)]_1$ y $[M(X)]_1$ y

$$T^*[\mathrm{ext}([M(Y)]_1)] = \mathrm{ext}([M(X)]_1) .$$

Por el teorema 13.1 dado $y \in Y$ existen $\tau(y) \in X$ y $c(y) \in \mathbb{C}$, $|c(y)| = 1$, de modo que $T^*(\delta_y) = c(y)\, \delta_{\tau(y)}$. Evidentemente quedan bien definidas sendas funciones $c : Y \to \mathbb{C}$ y $\tau : Y \to X$. Si $y_1 \neq y_2$ en Y, $\overline{c(y_1)}\delta_{y_1} \neq \overline{c(y_2)}\delta_{y_2}$ en $M(Y)$. Siendo T^* inyectiva $\delta_{\tau(y_1)} \neq \delta_{\tau(y_2)}$ en $M(X)$, o sea $\tau(y_1) \neq \tau(y_2)$ y τ es inyectiva. Consideremos $y \in Y$ y una red $\{y_i\}_{i \in I}$ convergente a y en Y. Entonces $T^*(\delta_y) = w^*\text{-lím}_{i\in I}\, T^*(\delta_{y_i})$ ya que $\delta_y = w^*\text{-lím}_{i\in I}\, \delta_{y_i}$ y

$$c(y) = \langle 1, T^*(\delta_y)\rangle = \lim_{i\in I} \langle 1, T^*(\delta_{y_i})\rangle = \lim_{i\in I} c(y_i) ,$$

por lo que c es continua. Más aún, si $f \in C(X)$ e $i \in I$ tenemos

$$\begin{aligned}\left\langle f, \delta_{\tau(y_i)} \right\rangle &= c\left(y_i\right)^{-1} \left\langle f, T^*\left(\delta_{y_i}\right)\right\rangle \\ &= c\left(y_i\right)^{-1} \left\langle f, T^*\left(\delta_{y_i}\right) - T^*\left(\delta_y\right)\right\rangle + c\left(y_i\right)^{-1} \left\langle f, T^*\left(\delta_y\right)\right\rangle,\end{aligned}$$

de donde $\lim_{i\in I} \left\langle f, \delta_{\tau(y_i)} \right\rangle = \left\langle f, \delta_{\tau(y)} \right\rangle$ *y* $\delta_{\tau(y)} = w^*\text{-}\lim_{i\in I} \delta_{\tau(y_i)}$. *Como en la Prop. 10.1(v) concluímos que* $\tau(y) = \lim_{i\in I} \tau(y_i)$ *y* τ *es continua. Por otra parte,* τ *es suryectiva, ya que si* $x \in X$ *como* T^* *es suryectiva existe* $\varsigma \in M(Y)$ *de modo que* $T^*(\varsigma) = \delta_x$. *Como* T^* *es inyectiva* $\varsigma \in \operatorname{ext}\left(\left[M(Y)\right]_1\right)$, *i.e. podemos escribir* $\varsigma = d\delta_z$ *para únicos* $d \in \mathbb{C}$ *con* $|d| = 1$ *y* $z \in Y$. *Entonces* $\delta_x = dc(z)\,\delta_{\tau(z)}$, $\tau(z) = x$ *y* $c(z) = \overline{d}$. *Inferimos así que* τ *es homeomorfismo porque* X *e* Y *son compactos. Finalmente, si* $f \in C(X)$ *e* $y \in Y$ *tenemos*

$$\begin{aligned}T(f)(y) &= \langle y, T(f)\rangle \\ &= \langle T(f), \delta_y\rangle \\ &= \left\langle f, T^*\left(\delta_y\right)\right\rangle \\ &= \left\langle f, c(y)\,\delta_{\tau(y)}\right\rangle \\ &= c(y)\, f\left(\tau(y)\right)\end{aligned}$$

y sigue la tesis.

13.4. Teorema de Cohen

Teorema 13.21 *(cf. [20], [104])*[65] *Sea* X *un* $\mathcal{U}$*-módulo de Banach munido de una aproximación acotada de la unidad (i.e. hay una red acotada* $\{e_l\}_{l\in L}$ *de* $\mathcal{U}$ *tal que* $\lim_{l\in L} \|e_l x - x\| = 0$ *para todo* $x \in X$*). Dados* $z \in X$ *y* $\delta > 0$ *existen* $a \in \mathcal{U}$ *e* $y \in X$ *de modo que* $z = ay$ *y* $\|z - y\| \leq \delta$.

Demostración 13.22 *(cf. [18], Lemma 9, p. 60) Si* $\mathcal{U}$ *no fuere unitaria conside-raremos la unitización de* $\mathcal{U}$*. En todo caso, indicaremos* $e_{\mathcal{U}}$ *a la correspon-diente unidad. Si* $\{e_l\}_{l\in L}$ *es una aproximación acotada de la unidad de* $\mathcal{U}$ *para* X *sea* $C > 1$ *tal que* $\{e_l\}_{l\in L} \subseteq [\mathcal{U}]_C$. *Sean*

$$\gamma = (4C)^{-1}, \ f(e) \triangleq \left[(1-\gamma)\, e_{\mathcal{U}} + \gamma e\right]^{-1}, \ e \in [\mathcal{U}]_C.$$

Entonces f *está bien definida pues* $0 < \gamma < 1/4$, $1 - \gamma > 3/4$ *y si* $\|e\| \leq C$ *entonces*

$$\left\|\frac{\gamma e}{1-\gamma}\right\| \leq \frac{\gamma C}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

[65] *Palabras clave:* Módulos de Banach. Aproximaciones acotadas de la unidad. Unitización de un álgebra.

Si además $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \|f(e)x - x\| &= (1-\gamma)^{-1} \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^k \left\|e^k x - x\right\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x\| \qquad (147) \\ &\leq (1-\gamma)^{-1} \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^k \left\|(ex-x)\sum_{j=0}^{k-1} e^j\right\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x\| \\ &\leq (1-\gamma)^{-1} \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^k \|ex - x\| \sum_{j=0}^{k-1} C^j + \varepsilon \|x\|. \end{aligned}$$

La desigualdad (147) es uniforme para $e \in [\mathcal{U}]_C$, de modo que

$$\overline{\lim_{l \in L}} \|f(e_l)x - x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario sigue que $\lim_{l\in L} \|f(e_l)x - x\| = 0$ para $x \in X$. Construiremos una sucesión $\{l_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq L$ de modo que si $e_k \triangleq e_{l_k}$ entonces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{U}(\mathcal{U})$, con

$$a_n \triangleq (1-\gamma)^n e_{\mathcal{U}} + \gamma \sum_{k=1}^{n} (1-\gamma)^{k-1} e_k$$

y $\|t_n z - t_{n-1} z\| \leq \delta/2^n$ si $n \in \mathbb{N}$, donde $t_0 \triangleq e_{\mathcal{U}}$ y $t_n \triangleq a_n^{-1}$. Si $x = z$ la construcción de a_1 sigue del razonamiento anterior. Inductivamente, supuesto hallados $l_1, ..., l_m$ escribimos

$$u(l) \triangleq (1-\gamma)^m e_{\mathcal{U}} + \gamma \sum_{k=1}^{m} (1-\gamma)^{k-1} f(e_l) e_k.$$

Entonces,

$$u(l) - a_m = \gamma \sum_{k=1}^{m} (1-\gamma)^{k-1} \left(f(e_l)e_k - e_k\right).$$

Como antes, existe $l_{m+1} \in L$ de modo que cada $\left\|f(e_{l_{m+1}})e_k - e_k\right\|$ sea arbitrariamente pequeño y, por consiguiente, $u(l_{m+1}) \in \mathbb{U}(\mathcal{U})$. Luego

$$[(1-\gamma)e_{\mathcal{U}} + \gamma e_l]\, u(l) = (1-\gamma)^{m+1} e_{\mathcal{U}} + \gamma (1-\gamma)^m e_l + \gamma \sum_{k=1}^{m} (1-\gamma)^{k-1} e_k,$$

i.e. $a_{m+1} \in \mathbb{U}(\mathcal{U})$,

$$\left[(1-\gamma)e_{\mathcal{U}} + \gamma e_{l_{m+1}}\right] u(l_{m+1}) = a_{m+1} \text{ y } t_{m+1} = \left[u(l_{m+1})\right]^{-1} f\left(e_{l_{m+1}}\right).$$

Como

$$\begin{aligned}\|t_{m+1}z - t_m z\| &= \left\|[u(l_{m+1})]^{-1} f\left(e_{l_{m+1}}\right) z - t_m z\right\| \\ &\leq \left\|[u(l_{m+1})]^{-1} - t_m\right\| \left\|f\left(e_{l_{m+1}}\right) z\right\| + \|t_m\| \left\|f\left(e_{l_{m+1}}\right) z - z\right\| \\ &\leq 2\left\|[u(l_{m+1})]^{-1} - t_m\right\| \|z\| + \|t_m\| \left\|f\left(e_{l_{m+1}}\right) z - z\right\|,\end{aligned} \tag{148}$$

la selección de l_{m+1} se habrá hecho de modo la expresión en (148) no sea mayor que $\delta/2^{m+1}$, resultando válido el paso inductivo. Si para $n \in \mathbb{N}$ hacemos $y_n = t_n z$ claramente la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ será fundamental. Si $y \triangleq \lim_{n\to\infty} y_n$ y $a \triangleq \gamma \sum_{k=1}^{\infty} (1-\gamma)^{k-1} e_k$ deducimos que $z = ay$.

Corolario 13.23 *En las condiciones del Teorema 13.21, si $\mathcal{U}$ tiene aproximación acotada de la unidad a izquierda el conjunto $\mathcal{U}X$ es un $\mathcal{U}$-submódulo cerrado de X.*

Demostración 13.24 *Sea $Y = \mathrm{cl}(\mathcal{U}X)$. Así $\overline{Y}$ es un $\mathcal{U}$-submódulo cerrado de X y $\mathcal{U}$ posee una aproximación acotada de la identidad para $\overline{Y}$. Por el Teorema 13.21, $\overline{Y} = \mathcal{U}\overline{Y}$. Luego $\overline{Y} \subseteq \mathcal{U}X \subseteq Y$ y sigue la afirmación.*

13.5. Teorema de Davis, Figiel, Johnson & Pełczyński

Lema 13.25 [66]*Sea $\{X_n\}$ una sucesión de espacios de Banach.*

(i) Si $1 \leq p < \infty$ entonces $(\oplus_n X_n)_p^* \approx (\oplus_n X_n^*)_q$, donde $\approx$ denota isomorfismo de espacios de Banach y $1/p + 1/q = 1$.

(ii) $(\oplus_n X_n)_0^* \approx (\oplus_n X_n^*)_1$.

Demostración 13.26 (i) *Si $j \in \mathbb{N}$ sea $\eta_j : X_j \hookrightarrow \oplus_n X_n$ la inmersión natural. Si $\lambda \in (\oplus_n X_n)_p^*$ escribamos $I_p(\lambda) = \left\{\eta_j^*(\lambda)\right\}$. Si $p = 1$ tenemos*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left\|\eta_j^*(\lambda)\right\|_{\infty} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{\|x_j\|_j=1} \left|\left\langle x_j, \eta_j^*(\lambda)\right\rangle\right| \leq \|\lambda\|,$$

$I_1(\lambda) \in (\oplus_n X_n^*)_{\infty}$ e I_1 es operador lineal y acotado. Es fácil ver que I_1 es inyectivo. Además I_1 es suryectivo, pues si $x^* \in (\oplus_n X_n^*)_{\infty}$ queda definido $\lambda_{x^*} \in (\oplus_n X_n)_1^*$ haciendo $\langle x, \lambda_x\rangle = \sum \langle x_n, x_n^*\rangle$, donde $x = \{x_n\}$ y $x^* = \{x_n^*\}$. Más aún, $I_1(\lambda_{x^*}) = x^*$. Por el teorema de la función

[66] *Palabras clave: Operadores débilmente compactos. Sumas directas de espacios de Banach.*

abierta sigue la afirmación si $p = 1$. Si $1 < p < \infty$ dados $r \in \mathbb{N}$ resulta y vectores $x_i \in [X_i]$, $1 \leq i \leq r$, escribimos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r} \left|\left\langle \eta_j\left(x_j\right), \lambda\right\rangle\right|^q &= \sum_{j=1}^{r} \left|\left\langle \eta_j\left(x_j\right), \lambda\right\rangle\right|^{q-1} u_j \left\langle \eta_j\left(x_j\right), \lambda\right\rangle \qquad (149)\\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{r} \left|\left\langle \eta_j\left(x_j\right), \lambda\right\rangle\right|^{q-1} u_j \eta_j\left(x_j\right), \lambda \right\rangle \\ &= \|\lambda\| \left(\sum_{j=1}^{r} \left|\left\langle \eta_j\left(x_j\right), \lambda\right\rangle\right|^q\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Por (149) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r} \left\|\eta_j^*\left(\lambda\right)\right\|^q &= \sum_{j=1}^{r} \sup_{\|x_j\|_j = 1} \left|\left\langle x_j, \eta_j^*\left(\lambda\right)\right\rangle\right|^q \\ &= \sup_{\|x_1\|_1 = \ldots = \|x_r\|_r = 1} \sum_{j=1}^{r} \left|\left\langle \eta_j\left(x_j\right), \lambda\right\rangle\right|^q \\ &\leq \|\lambda\|^q,\end{aligned}$$

y siendo r arbitrario $I_p\left(\lambda\right) \in \left(\oplus_n X_n^*\right)_q$. Claramente I_p es lineal y acotado, siendo el resto de la prueba similar al caso anterior.

(ii) *Ídem.*

Teorema 13.27 *(cf. [31]) Sea $T \in \mathcal{B}\left(X, Y\right)$ operador débilmente compacto entre espacios de Banach. Existen un espacio reflexivo $\mathcal{R}$ y sendos operadores $A \in \mathcal{B}\left(\mathcal{R}, Y\right)$ y $B \in \mathcal{B}\left(X, \mathcal{R}\right)$ tales que $T = A \circ B$.*

Demostración 13.28 *El conjunto $W = T\left(\left[X\right]_1\right)$ es acotado, balanceado, convexo y, por hipótesis, relativamente débilmente compacto. Si $n \in \mathbb{N}$ sea p_n el funcional de Minkowski del conjunto $U_n = 2^n W + 2^{-n}(Y)_1$. Como $2^{-n}\left(Y\right)_1 \subseteq U_n$ vemos que $p_n(y) \leq 2^n$ si $y \in \left(Y\right)_1$. Luego si $\varepsilon > 0$ es $p_n\left(y\right) \leq 2^n\left(\varepsilon + \|y\|\right)$, i.e. $p_n\left(y\right) \leq 2^n \|y\|$ si $y \in Y$. Además existe $M > 0$ tal que $U_n \subseteq \left(Y\right)_M$. Luego, si $t > 0$, $y \in Y$ e $y/t \in U_n$ entonces $\|y\| < tM$, de modo que $\|y\| \leq M p_n\left(y\right)$. En definitiva, p_n es una norma equivalente a la de Y. Sea $\mathcal{R}$ el espacio de los elementos $y \in Y$ tales que $|y| \triangleq \left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n\left(y\right)^2\right]^{1/2}$ es finito. Entonces $W \subseteq \left(\mathcal{R}\right)_1$, pues si $y \in W$ y $n \in \mathbb{N}$ es $2^n y \in U_n$. Como U_n es abierto $p_n\left(2^n y\right) < 1$, $p_n(y) < 2^{-n}$ y $|y| < 1$. Sean $\mathcal{H} = \left(\oplus_n\left(Y, p_n\right)\right)_2$ y $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{H}$ tal que $\phi\left(y\right) = \left(y, y, \ldots\right)$ para $y \in \mathcal{R}$. Como ϕ es isometría* *lineal* $(\mathcal{R}, |\circ|)$ *deviene espacio de Banach. Si* $n \in \mathbb{N}$, $\iota_{\mathcal{R},Y} = P_n \circ \phi$ *donde* $P_n : \mathcal{H} \to Y$ *es la proyección a la n-ésima coordenada, i.e.* $\iota_{\mathcal{R},Y}$ *es continua. Además* ϕ^{**} *es inyectiva pues* ϕ^{*} *es suryectiva. Como en el Lema 13.25, consideremos los isomorfismos*

$$\begin{aligned} I &: \left(\oplus_n (Y, p_n)\right)_2^* \to \left(\oplus_n (Y, p_n)^*\right)_2, \\ J &: \left(\oplus_n (Y, p_n)^*\right)_2^* \to \left(\oplus_n (Y, p_n)^{**}\right)_2. \end{aligned}$$

Si $m \in \mathbb{N}$, $I \circ P_m^* = k_m$, *donde*

$$k_m : (Y, p_n)^* \hookrightarrow \left(\oplus_n (Y, p_n)^*\right)_2.$$

Si además $Q_m : \left(\oplus_n (Y, p_n)^{**}\right)_2 \to (Y, p_m)^{**}$ *es la proyección a la m-ésima coordenada resulta* $Q_m \circ J = P_m^{**} \circ I^*$. *Si* $r^{**} \in \mathcal{R}^{**}$ *obtenemos*

$$\begin{aligned} Q_m \left[\left(J \circ \left(I^{-1}\right)^* \right) \left(\phi^{**}\left(r^{**}\right)\right) \right] &= P_m^{**}\left(\phi^{**}\left(r^{**}\right)\right) \\ &= \left(P_m \circ \phi\right)^{**}\left(r^{**}\right) \\ &= \iota_{\mathcal{R},Y}^{**}\left(r^{**}\right), \end{aligned}$$

o sea

$$\phi^{**}\left(r^{**}\right) = \left(I^* \circ J^{-1}\right)\left(\iota_{\mathcal{R},Y}^{**}\left(r^{**}\right), \iota_{\mathcal{R},Y}^{**}\left(r^{**}\right), ...\right) \tag{150}$$

en $\left(\oplus_n (Y, p_n)\right)_2^{**}$. *De (150) podemos inferir ya que* $\iota_{\mathcal{R},Y}^{**}$ *es inyectiva. Veamos que*

$$\left(\iota_{\mathcal{R},Y}^{**}\right)^{-1}\left(\iota_Y(Y)\right) = \iota_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}\right). \tag{151}$$

La inclusión $\supseteq$ *se da pues*

$$\iota_{\mathcal{R},Y}^{**} \circ \iota_{\mathcal{R}} = \iota_Y \circ \iota_{\mathcal{R},Y}. \tag{152}$$

Dado $r^{**} \in \left(\iota_{\mathcal{R},Y}^{**}\right)^{-1}\left(\iota_Y(Y)\right)$ *sean* $x^{**} = \phi^{**}\left(r^{**}\right)$ *e* $y \in Y$ *tal que*

$$\iota_{\mathcal{R},Y}^{**}(r^{**}) = \iota_Y(y).$$

Probaremos que $x^{**} \in \iota_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{H}\right)$, *para lo que bastará ver que* x^{**} *es* w^**-continuo. Sea* $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ *red en* $\mathcal{H}^*$ *tal que* $w^*\text{-}\lim_{i\in I} \lambda_i = 0_{\mathcal{H}^*}$. *Si* $m \in \mathbb{N}$ *sea*

$$h_m : (Y, p_n) \hookrightarrow \left(\oplus_n (Y, p_n)\right)_2.$$

Dado $i \in I$ usando (150) escribimos

$$\begin{aligned}\langle \lambda_i, x^{**} \rangle &= \left\langle I(\lambda_i), J^{-1}\left(\iota_Y(y), \iota_Y(y), ...\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \left\{h_m^*\left(\lambda_i\right)\right\}, J^{-1}\left(\iota_Y(y), \iota_Y(y), ...\right)\right\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle h_m^*\left(\lambda_i\right), \iota_Y\left(y\right)\right\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle h_m(y), \lambda_i \right\rangle \\ &= \left\langle \phi\left(y\right), \lambda_i \right\rangle,\end{aligned}$$

de donde $\lim_{i\in I} \langle \lambda_i, x^{**}\rangle = 0$. *Existe así* $x \in \mathcal{H}$ *tal que* $x^{**} = \iota_{\mathcal{H}}(x)$ *y, si* $\{r_j\}_{j\in J}$ *es una red acotada en* $\mathcal{R}$ *tal que* $r^{**} = w^*\text{-}\lim_{j\in J} \iota_{\mathcal{R}}(r_j)$, *como* $\phi^{**} \in (w^*, w^*)$ *es*

$$\iota_{\mathcal{H}}(x) = w^*\text{-}\lim_{j\in J} \phi^{**}\iota_{\mathcal{R}}(r_j) = w^*\text{-}\lim_{j\in J} \iota_{\mathcal{H}}(\phi(r_j)).$$

Es claro entonces que $x = w\text{-}\lim_{j\in J}\phi(r_j)$, *i.e.* $x \in \overline{\phi(\mathcal{R})}^{w}$. *Como* ϕ *es isométrica y* $\mathcal{R}$ *es espacio de Banach por el Teo. 13.61(i) existe* $r \in \mathcal{R}$ *tal que* $x = \phi(r)$. *Luego*

$$\phi^{**}(\iota_{\mathcal{R}}(r)) = \iota_{\mathcal{H}}(\phi(r)) = \iota_{\mathcal{H}}(x) = x^{**} = \phi^{**}(r^{**}),$$

y como ϕ^{**} *es inyectiva sigue (151). Veamos ahora que* $\mathcal{R}$ *es reflexivo. En efecto, dados* $r_0 \in (\mathcal{R})_1$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *es* $p_n(r_0) < 1$, *i.e. existe* $t \in (0,1)$ *tal que* $r_0/t \in U_n$. *Como* U_n *es balanceado* $r_0 \in U_n$, *i.e.* $(\mathcal{R})_1$ *está contenido en el conjunto débilmente cerrado* $2^n\overline{W} + 2^{-n}[Y]_1$. *Como* p_n *es equivalente a la norma de* Y, *si* $|y_k| \to 0$ *en* $\mathcal{R}$ *es* $p_n(y_k) \to 0$ *y por ello* $\|y_k\| \to 0$. *Luego podemos escribir*

$$\iota_{\mathcal{R},Y}([\mathcal{R}]_1) = \overline{(\mathcal{R})_1}^{|\circ|} \subseteq \overline{(\mathcal{R})_1} = \overline{(\mathcal{R})_1}^{w} \subseteq 2^n\overline{W} + 2^{-n}[Y]_1. \tag{153}$$

Por (152) y (153) sigue que

$$\iota_{\mathcal{R},Y}^{**}(\iota_{\mathcal{R}}([\mathcal{R}]_1)) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\iota_Y(Y) + 2^{-n}[Y^{**}]_1\right) \subseteq \iota_Y(Y).$$

Finalmente, como

$$T([X]_1) = W \subseteq (\mathcal{R})_1$$

deducimos que $B \in \mathcal{B}(X, \mathcal{R})$ *si* $B(x) = T(x)$ *para* $x \in X$. *Haciendo* $A = \iota_{\mathcal{R},Y}$ *tenemos que* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}, Y)$ *y* $T = A \circ B$.

13.6. Teorema de Eberlein-Šmulian

Lema 13.29 [67]*Sea X espacio de Banach.*

(i) $([X^*]_1, w^*)$ es metrizable si y solo si X es separable.

(ii) $([X]_1, w)$ es metrizable si y solo si X^* es separable.

Demostración 13.30 **(i)** *Si $([X^*]_1, w^*)$ es metrizable sea $\{U_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de w^*-entornos de cero tal que $\cap_{n=1}^{\infty} U_n^* = \{0_{X^*}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $D_n \in \mathcal{P}_f(X)$ tal que*

$$U_n^* = \cap_{x \in D_n} \{x^* \in [X^*]_1 : |\langle x, x^* \rangle| < 1\}.$$

Sean $D = \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ y X_0 el subespacio de Banach de X generado por D. Si $X_0 \neq X$ por la Prop. 13.13 existirá $x^* \in [X^*]_1 - \{0_{X^*}\}$ nulo sobre X_0. Así $x^* \in \cap_{n=1}^{\infty} U_n^*$, i.e. $x^* = 0_{X^*}$, lo que no es cierto. Luego $X = X_0$ y X es claramente separable. Recíprocamente, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un subconjunto denso numerable de X y para $x^*, y^* \in [X^*]_1$ sea

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\langle x_n, x^* - y^* \rangle|}{1 + |\langle x_n, x^* - y^* \rangle|}.$$

Evidentemente d define una métrica sobre $[X^*]_1$. Más aún, d metriza la w^*-topología de $[X^*]_1$. En efecto, sea $\{z_i^*\}_{i \in I}$ una red en $[X^*]_1$ y sea $z^* = w^*\text{-lím}_{i \in I}$ en $[X^*]_1$. Dados $m \in \mathbb{N}$ e $i \in I$ se tiene

$$d(z_i^*, z^*) \leq \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} \frac{|\langle x_n, z_i^* - z^* \rangle|}{1 + |\langle x_n, z_i^* - z^* \rangle|} + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n}. \tag{154}$$

Por (154) es $\overline{\text{lím}}_{i \in I} d(z_i^*, z^*) \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n}$, y como m es arbitrario $d(z_i^*, z^*) \to 0$. Con la misma notación, si fuera $d(z_i^*, z^*) \to 0$ fijemos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_k\| \leq \varepsilon/2$, y para $i \in I$ resulta

$$\begin{aligned} |\langle x, z_i^* - z^* \rangle| &\leq |\langle x - x_k, z_i^* \rangle| + |\langle x_k, z_i^* - z^* \rangle| + |\langle x_k - x, z^* \rangle| \quad (155) \\ &\leq 2\|x - x_k\| + |\langle x_k, z_i^* - z^* \rangle| \\ &\leq \varepsilon + |\langle x_k, z_i^* - z^* \rangle|. \end{aligned}$$

[67]*Palabras clave:* Separabilidad. Espacios débilmente compactos. Espacios secuencialmente compactos.

Como
$$2^{-k}\frac{|\langle x_k, z_i^* - z^*\rangle|}{1+|\langle x_k, z_i^* - z^*\rangle|} \leq d\left(z_i^*, z^*\right)$$
es claro que $\lim_{i\in I} t_i = 0$, *donde*
$$t_i = \frac{|\langle x_k, z_i^* - z^*\rangle|}{1+|\langle x_k, z_i^* - z^*\rangle|}.$$
Luego
$$\lim_{i\in I}\frac{t_i}{1-t_i} = \lim_{i\in I}|\langle x_k, z_i^* - z^*\rangle| = 0. \tag{156}$$
Por (155) y (156) $\overline{\lim}_{i\in I}|\langle x, z_i^* - z^*\rangle| \leq \varepsilon$ *y sigue la afirmación.*

(ii) *Si* X^* *es separable por (i)* $\left([X^{**}]_1, w^*\right)$ *es metrizable. La inmersión natural* $\iota_X : X \hookrightarrow X^{**}$ *induce un homeomorfismo entre* $\left([X]_1, w\right)$ *e* $(\iota_X([X]_1), w^*)$. *En cuanto subespacio de* $\left([X^{**}]_1, w^*\right)$, $(\iota_X([X]_1), w^*)$ *devendrá metrizable, por lo que también lo será* $\left([X]_1, w\right)$. *Recíprocamente, si* $\left([X]_1, w\right)$ *es metrizable hay una sucesión* $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de* w-*entornos de cero en* $[X]_1$ *tal que* $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0_X\}$ *y basta razonar como en la primer parte de (i).*

Teorema 13.31 *(cf. [42], [121]) Sea* X *espacio de Banach,* A *subconjunto no vacío de* X. *Son equivalentes:*

(i) A es relativamente débilmente compacto.

(ii) Toda sucesión infinita de puntos de A tiene un punto de débil acumulación.

(iii) A es débilmente secuencialmente compacto.

Demostración 13.32 $(i \Rightarrow ii)$ *Es inmediato.*

$(ii \Rightarrow iii)$ *Dada* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sucesión infinita de puntos de* A *sea* X_0 *el subespacio de Banach generado por ella. Como* X_0 *es separable por el Lema 13.29(i)* $\left([X_0^*]_1, w^*\right)$ *es metrizable. Por el teorema de Alaoglu este espacio es compacto, y siendo además metrizable resulta separable. Por lo tanto es evidente que* X_0^* *resulta* w^*-*separable. Sea* $D_0 = \left\{x_{0,m}^*\right\}_{m=1}^{\infty}$ *subconjunto numerable* w^*-*denso de* X_0^*. *Por el teorema de Banach-Hahn cada elemento de* D_0 *se extiende a otro de* X^*. *Indicaremos* $D = \{x_m^*\}_{m=1}^{\infty}$ *al conjunto de estas extensiones. Por el principio de acotación uniforme se deduce fácilmente que* A *debe ser acotado. Por un proceso diagonal hay una subsucesión* $\{x_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ *de* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que*

$\{x_m^*(x_n^1)\}_{n=1}^\infty \in c$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por (ii) sea $x \in X$ punto de débil acumulación de $\{x_n^1\}_{n=1}^\infty$. En particular, por el teorema de Mazur $x \in X_0$. Si para algún $m \in \mathbb{N}$ fuese $\lim_{n\to\infty} x_m^*(x_n^1) \neq x_m^*(x)$ existiría $\eta > 0$ tal que

$$\left| x_m^*(x) - \lim_{n\to\infty} x_m^*\left(x_n^1\right) \right| > 2\eta. \tag{157}$$

El conjunto $U = \{z \in X : |x_m^*(z - x)| < \eta\}$ es entorno débil de x y por (157) $U\cap$ $\{x_n^1\}_{n=1}^\infty$ es finito, lo que contradice el carácter de punto de acumulación de x. Luego

$$\lim_{n\to\infty} x_m^*\left(x_n^1\right) = x_m^*(x) \ \ \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{158}$$

Más aún, supongamos que $x \neq w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n^1$. Existirán $x^* \in X^*$, $\delta > 0$ y una subsucesión $\{x_n^2\}_{n=1}^\infty$ de $\{x_n^1\}_{n=1}^\infty$ tales que $|x^*(x - x_n^2)| > 2\delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $y \in X$ punto de débil acumulación de $\{x_n^2\}_{n=1}^\infty$. Como antes, $y \in X_0$ y

$$\lim_{n\to\infty} x_m^*\left(x_n^2\right) = x_m^*(y) \ \ \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{159}$$

Por (158) y (159) deducimos que $x_{0,m}^*(x) = x_{0,m}^*(y)$ si $m \in \mathbb{N}$. Como D_0 es total en X_0 resulta $x = y$. Pero ahora el entorno débil

$$V = \{z \in X : |x^*(x - z)| < \delta\}$$

de x será disjunto con la sucesión $\{x_n^2\}_{n=1}^\infty$, lo que no puede ser.

13.7. Teorema de Gantmacher

Teorema 13.33 *(cf. [44])Sean X, Y espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(i) T es débilmente compacto.

(ii) $\mathcal{R}(T^{**}) \subseteq \iota_Y(Y)$.

(iii) $T^* \in (w^*, w)$.

(iv) T^* es débilmente compacto.

Demostración 13.34 *$(i \Rightarrow ii)$ Como $T^{**} \in (w^*, w^*)$ y $T^{**} \circ \iota_X = \iota_Y \circ T$ resulta*

$$T^{**}\left(\overline{\iota_X([X]_1)}^{w^*}\right) \subseteq \overline{(T^{**} \circ \iota_X)([X]_1)}^{w^*} = \overline{(\iota_Y T)([X]_1)}^{w^*}. \tag{160}$$

Además $\iota_Y \in (w, w^*)$ y $T([X]_1)$ es relativamente débilmente compacto. Luego $\iota_Y\left(\overline{T([X]_1)}^w\right)$ es w^* cerrado y por el Teo. 13.37 y (160) es

$$T^{**}(\iota_X([X]_1)) \subseteq \iota_Y\left(\overline{T([X]_1)}^w\right).$$

$(ii \Rightarrow i)$ *Como $\iota_Y \in (w, w^*)$,*

$$\begin{aligned}\iota_Y\left(\overline{T([X]_1)}^w\right) &= \overline{\iota_Y(T([X]_1))}^{w^*} \\ &= \overline{T^{**}(\iota_X([X]_1))}^{w^*} \\ &\subseteq \overline{T^{**}([X^{**}]_1)}^{w^*} \\ &= T^{**}(\iota_X([X]_1)) \subseteq \iota_Y(Y).\end{aligned} \tag{161}$$

Pero $T^{**}(\iota_X([X]_1))$ es w^*-compacto por el teorema de Alaoglu y ser $T^{**} \in (w^*, w^*)$. Además ι_Y define un (w, w^*)-homeomorfismo entre Y y su imágen. Por (161) concluímos que $\overline{T([X]_1)}^w$ es compacto y sigue la afirmación.

$(ii \Rightarrow iii)$ *Es inmediato.*

$(iii \Rightarrow ii)$ *Dado $x^{**} \in X^{**}$, si $T^* \in (w^*, w)$, el operador $T^{**}(x^{**})$ deviene w^*-continuo. Razonando como en la Prop. 12.38(viii) deducimos que $T^{**}(x^{**}) \in \iota_Y(Y)$.*

$(iii \Rightarrow iv)$ *Por el teorema de Alaoglu $[Y^*]_1$ es w^*-compacta y por hipótesis, $T^*([Y^*]_1)$ resulta w-compacta.*

$(iv \Rightarrow i)$ *Si T^* es débilmente compacto $T^{**} \in (w^*, w)$. Si $x^{**} \in X^{**}$ sigue entonces que $T^{**}(x^{**})$ es w^*-continuo y por lo tanto pertenece a $\iota_Y(Y)$. Así $\mathcal{R}(T^{**}) \subseteq \iota_Y(Y)$ y sigue la tesis.*

13.8. Teoremas de Gel´fand-Naimark

Teorema 13.35 *(cf. [45], [46]) Sea[68] $\mathcal{U}$ una C^*-álgebra unitaria, con unidad e y espacio de estados $\mathcal{S}(\mathcal{U})$, i.e. el espacio de formas lineales positivas unitarias.*

(i) Cada estado χ de $\mathcal{U}$ induce una representación cíclica $(\pi_\chi, \mathcal{H}_\chi)$ de $\mathcal{U}$.

[68] *Palabras clave: Estados. Formas lineales (positivas, autoadjuntas). Representaciones cíclicas. Representaciones equivalentes. Vectores cíclicos. Teorema espectral. Fórmula de Hadamard. Teorema de representación de Gel´fand.*

(ii) Sea $(\pi, \mathcal{H})$ representación cíclica de $\mathcal{U}$ con vector cíclico x_0 y hagamos $\chi_\pi(a) \triangleq \langle \pi(a)(x_0), x_0 \rangle$ para cada $a \in \mathcal{U}$. Entonces $\chi_\pi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ y las representaciones $(\pi_{\chi_\pi}, \mathcal{H}_{\chi_\pi})$ y $(\pi, \mathcal{H})$ son equivalentes.

(iii) Dado $a \in \mathcal{U}^+$ existe $\chi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ tal que $\chi(a) = \|a\|$.

(iv) Existe una representación isométrica de $\mathcal{U}$.

Demostración 13.36 **(i)** *Dados $\chi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$, $x, y \in \mathcal{U}$ y $t \in \mathbb{R}$ tenemos*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \chi\left((x+ty)^*(x+ty)\right) \\ &= \chi(x^*x) + t\left(\chi(x^*y) + \chi(y^*x)\right) + t^2\chi(y^*y) \\ &= \chi(x^*x) + 2t\operatorname{Re}\chi(x^*y) + t^2\chi(y^*y) \ \ \textit{pues } \chi = \chi^*. \end{aligned}$$

Como t es arbitrario $|\operatorname{Re}\chi(x^*y)| \leq (\chi(x^*x)\chi(y^*y))^{1/2}$. Reemplazando eventualmente x por algún múltiplo de x se verifica la desigualdad

$$|\chi(x^*y)| \leq (\chi(x^*x)\chi(y^*y))^{1/2}.$$

Indiquemos $\mathcal{I}_\chi = \{x \in \mathcal{U} : \chi(x^*x) = 0\}$. Si $x, y \in \mathcal{I}_\chi$ tenemos

$$0 \leq \chi\left((x+y)^*(x+y)\right) = 2\operatorname{Re}\chi(x^*y) \leq 2\left(\chi(x^*x)\chi(y^*y)\right)^{1/2} = 0,$$

y sigue ahora enseguida que $\mathcal{I}_\chi$ es un espacio vectorial complejo. Si además $x \in \mathcal{I}_\chi$ y $a \in \mathcal{U}$ tenemos

$$0 \leq \chi\left((ax)^*(ax)\right) = \chi\left(x^*(a^*ax)\right) \leq \left(\chi(x^*x)\chi\left((a^*ax)^*(a^*ax)\right)\right)^{1/2} = 0,$$

o sea $\mathcal{I}_\chi$ es ideal a izquierda de $\mathcal{U}$. Más aún, $\mathcal{I}_\chi$ es cerrado ya que si $x_n \to x$ y cada $x_n \in \mathcal{I}_\chi$ es

$$\begin{aligned} 0 &\leq \chi(x^*x) \\ &\leq \chi\left((x-x_n)^*x\right) + \chi(x_n^*x) \\ &\leq \|(x-x_n)^*x\| + \left(\chi(x_n^*x_n)\chi(x^*x)\right)^{1/2} \\ &\leq \|(x-x_n)\|\,\|x\|, \end{aligned}$$

y haciendo $n \to \infty$ vemos que $x \in \mathcal{I}_\chi$. Sean $H_\chi = \mathcal{U}/\mathcal{I}_\chi$, $q_\chi : \mathcal{U} \to H_\chi$ la proyección al cociente y si $x, y \in \mathcal{U}$ sea

$$\langle q_\chi(x), q_\chi(y)\rangle_\chi \triangleq \chi(y^*x)$$

Si $q_\chi(x) = q_\chi(z)$ y $q_\chi(y) = q_\chi(t)$ sean $u, v \in \mathcal{I}_\chi$ tales que $x = z + u$ e $y = t + v$. Entonces

$$\begin{aligned}\chi(y^* x) &= \chi\left((t+v)^* (z+u)\right) \\ &= \chi(t^* z) + \chi(t^* u) + \chi(v^* z) + \chi(v^* u) \\ &= \chi(t^* z),\end{aligned}$$

y queda así definido un producto interno $\langle \circ, \circ \rangle$ en H_χ. Sea $\|\circ\|_\chi$ la norma inducida y $\mathcal{H}_\chi$ el espacio de Hilbert que resulta al completar H_χ respecto a esta métrica. Como $\mathcal{I}_\chi$ es ideal a izquierda la relación

$$\pi_\chi(a)(q_\chi(x)) = q_\chi(ax) \text{ si } a, x \in \mathcal{U},$$

define una aplicación lineal $\pi_\chi(a) : H_\chi \to H_\chi$ tal que

$$\begin{aligned}\|\pi_\chi(a)(q_\chi(x))\|_\chi^2 &= \|q_\chi(ax)\|_\chi^2 \\ &= \chi\left((ax)^*(ax)\right) \\ &= \chi\left(x^*(a^* a) x\right) \\ &\leq \|a^* a\| \chi(x^* x) \\ &= \|a\|^2 \|q_\chi(x)\|_\chi^2 .\end{aligned}$$

Luego $\pi_\chi(a)$ extiende a un único operador contractivo de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\chi)$ y queda definida una aplicación lineal $\pi_\chi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\chi)$ contractiva tal que $\pi_\chi(e) = Id_{\mathcal{H}_\chi}$. Además

$$\begin{aligned}\langle \pi_\chi(a)(q_\chi(x)), q_\chi(y) \rangle_\chi &= \langle q_\chi(ax), q_\chi(y) \rangle_\chi \\ &= \chi\left(y^*(ax)\right) \\ &= \chi\left((a^* y)^* x\right) \\ &= \langle q_\chi(x), q_\chi(a^* y) \rangle_\chi \\ &= \langle q_\chi(x), \pi_\chi(a^*)(q_\chi(y)) \rangle_\chi ,\end{aligned}$$

o sea $\pi_\chi(a)^* = \pi_\chi(a^*)$ y por lo tanto π_χ es una representación de $\mathcal{U}$. Por otra parte, si hacemos $e_\chi = q_\chi(e)$ vemos que $\pi_\chi(\mathcal{U})(e_\chi) = H_\chi$ y H_χ es denso en $\mathcal{H}_\chi$, i.e. e_χ es vector cíclico para π_χ. Además

$$\langle \pi_\chi(a)(e_\chi), e_\chi \rangle_\chi = \langle q_\chi(a), q_\chi(e) \rangle_\chi = \chi(a)$$

para todo $a \in \mathcal{U}$.

(ii) *Claramente $\sigma_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}(\pi(a)) \subseteq \sigma_{\mathcal{U}}(a)$ para cada $a \in \mathcal{U}$, de modo que si a es hermitiano*

$$\|\pi(a)\| = r_{sp}(\pi(a)) \leq r_{sp}(a) = \|a\| .$$

En el caso general,

$$\|\pi(a)\|^2 = \|\pi(a)^* \pi(a)\| = \|\pi(a^*a)\| \leq \|a^*a\| = \|a\|^2$$

y π *es contractiva. Ahora es claro que* χ_π *es lineal y dado* $a \in \mathcal{U}$*, como podemos asumir* x_0 *unitario y puesto que* π *es una representación*

$$|\chi_\pi(a)| \leq \|\pi(a)(x_0)\| \leq \|\pi(a)\| \leq \|a\|$$

i.e. $\chi_\pi \in \mathcal{U}^*$*. Más aún,*

$$\chi_\pi^*(a) = \overline{\chi_\pi(a^*)} = \langle x_0, \pi(a^*)(x_0)\rangle = \langle \pi(a)(x_0), x_0\rangle = \chi_\pi(a)$$

o sea χ_π *es hermitiana. También*

$$\chi_\pi(a^*a) = \langle \pi(a^*a)(x_0), x_0\rangle = \|\pi(a)(x_0)\|^2 \geq 0,$$

e inferimos que χ_π *es positiva (V. [21], Ch. VIII, Th. 3.6). En particular,* $\pi(a)(x_0) = \pi(e)(\pi(a)(x_0))$ *para todo* $a \in \mathcal{U}$ *y como* $\pi(\mathcal{U})(x_0)$ *es denso en* $\mathcal{H}$ *resulta* $\pi(e) = Id_{\mathcal{H}}$ *y*

$$\chi_\pi(e) = \|x_0\| = 1,$$

i.e. $\chi_\pi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$*. Con la notación precedente, sea* $\pi_{\chi_\pi}(a)(e_{\chi_\pi}) = 0_{\mathcal{H}_{\chi_\pi}}$ *para cierto* $a \in \mathcal{U}$*. Entonces* $q_{\chi_\pi}(a) = 0_{H_{\chi_\pi}}$ *y*

$$0 = \chi_\pi(a^*a) = \langle \pi(a^*a)(x_0), x_0\rangle = \|\pi(a)(x_0)\|^2,$$

o sea $\pi(a)(x_0) = 0_{\mathcal{H}}$*. Queda definida la aplicación lineal*

$$Q : \pi_{\chi_\pi}(\mathcal{U})(e_{\chi_\pi}) \to \pi(\mathcal{U})(x_0),$$
$$Q(\pi_{\chi_\pi}(a)(e_{\chi_\pi})) = \pi(a)(x_0) \text{ si } a \in \mathcal{U},$$

que es isométrica pues

$$\|Q(\pi_{\chi_\pi}(a)(e_{\chi_\pi}))\|^2 = \|\pi(a)(x_0)\|^2 = \chi_\pi(a^*a) = \|\pi_{\chi_\pi}(a)(e_{\chi_\pi})\|^2_{\mathcal{H}_{\chi_\pi}}.$$

Así Q *se extiende a un operador isométrico de* $\mathcal{H}_{\chi_\pi}$ *en* $\mathcal{H}$*. Finalmente, como para* $a \in \mathcal{U}$ *se tiene*

$$Q(\pi_{\chi_\pi}(a)(e_{\chi_\pi})) = \pi(a)(x_0) = \pi(a)(Q(e_{\chi_\pi}))$$

sigue la equivalencia de $(\pi_{\chi_\pi}, \mathcal{H}_{\chi_\pi})$ *y* $(\pi, \mathcal{H})$*.*

(iii) *Si $\mathcal{U}$ es abeliana por el teorema de Gel´fand $\sigma(a) = \mathrm{Im}(G_{\mathcal{U}}(a))$, donde $G_{\mathcal{U}}$ es la transformada de Gel´fand de $\mathcal{U}$. Como $\|a\| \in \sigma(a)$ por ser a hermitiano existe $\chi \in \Phi_{\mathcal{U}}$ tal que*

$$\|a\| = G_{\mathcal{U}}(a)(\chi) = \chi(a)$$

y $\Phi_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{U})$. En el caso general consideremos $\varphi \in \mathcal{S}(C^*(a))$ tal que $\varphi(a) = \|a\|_{C^*(a)}$. Como a es hermitiano por la fórmula de Hadamard $\|a\|_{C^*(a)} = \|a\|$ y bastará ver que existe una extensión $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ de φ. Ciertamente, por el teorema de Banach-Hahn hay una extensión $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{U}^*$ de φ, con

$$\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\| = 1 = \widetilde{\varphi}(e).$$

Solo falta ver que $\widetilde{\varphi} \geq 0$, para lo cual sea $b \in \mathcal{U}^+$ y demostremos que $\widetilde{\varphi}(b) \geq 0$. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tales que $[0, \|b\|] \subseteq D[z_0, r]$. Como $[0, \|b\|]$ es la intersección de todos dichos círculos bastará ver que $|\widetilde{\varphi}(b) - z_0| \leq r$. Precisamente, por el teorema espectral

$$\sigma(b - z_0 e) = \sigma(b) - z_0 \subseteq [0, \|b\|] - z_0 \subseteq D[0, r]$$

y como $b - z_0 e$ es normal tenemos

$$|\widetilde{\varphi}(b) - z_0| = |\widetilde{\varphi}(b - z_0 e)| \leq \|b - z_0 e\| = r_{sp}(b - z_0 e) \leq r.$$

(iv) *Con la notación precedente, sean*

$$\mathcal{H}_u \triangleq \sum \oplus_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})} \mathcal{H}_\varphi,$$
$$\pi_u : \mathcal{U} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_u),\ \pi_u \triangleq \sum \oplus_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})} \pi_\varphi.$$

Así π_u es una representación bien definida de $\mathcal{U}$ y $\|\pi_u(a)\| \leq \|a\|$ para cada $a \in \mathcal{U}$. Por (iii) fijado $a \in \mathcal{U}$ existe $\chi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ tal que $\chi(a^*a) = \|a^*a\|$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 &= \|a^*a\| \\
&= \chi(a^*a) \\
&= \langle \pi_\chi(a^*a)(e_{a^*a}), e_{a^*a} \rangle_\chi \\
&= \|\pi_\chi(a)(e_{a^*a})\|_\chi^2 \\
&\leq \|\pi_u(a)(j_\chi(e_{a^*a}))\|_{\mathcal{H}_u}^2 \\
&\leq \|\pi_u(a)\|_{\mathcal{H}_u}^2
\end{aligned}$$

y sigue la tesis.

13.9. Teorema de Goldstine

Teorema 13.37 *(Cf. [52]) Sea X espacio normado. Entonces $\iota_X\left([X]_1\right)$ es $\sigma\left(X^{**},X^*\right)$-densa en $\left[X^{**}\right]_1$.*

Demostración 13.38 *Sean $\Phi \notin \left[X^{**}\right]_1$, $\lambda \in S_1\left(X^*\right)$, $r \in \mathbb{R}$ tales que $\left|\Phi\left(\lambda\right)\right| > r > 1$. Entonces $\left\{\Psi \in X^{**} : \left|\Psi\left(\lambda\right)\right| > r\right\}$ es un $\sigma\left(X^{**},X^*\right)$-entorno de Φ disjunto con $\left[X^{**}\right]_1$. En consecuencia, $\left[X^{**}\right]_1$ es $\sigma\left(X^{**},X^*\right)$-cerrado. Bastará ver entonces que todo elemento de $\left[X^{**}\right]_1$ es adherente para $\iota_X\left([X]_1\right)$. Si no fuere así, sea $\Theta \in \left[X^{**}\right]_1 - \overline{\iota_X\left([X]_1\right)}^{\sigma\left(X^{**},X^*\right)}$. Por el Corolario 13.11 existen una aplicación lineal continua $A : \left(X^{**},\sigma\left(X^{**},X^*\right)\right) \to \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tales que*

$$\operatorname{Re} A\left(\Theta\right) < \beta < \beta+\delta < \operatorname{Re} A\left(\Psi\right) \text{ si } \Psi \in \overline{\iota_X\left([X]_1\right)}^{\sigma\left(X^{**},X^*\right)}. \tag{162}$$

Hay un número finito de elementos de X^*, digamos $\lambda_1,...,\lambda_n$, de modo que $N \subseteq A^{-1}\left(\left(\mathbb{C}\right)_1\right)$, donde

$$N \triangleq \left\{\Phi \in X^{**} : \max_{1\leq j\leq n}\left|\Phi\left(\lambda_j\right)\right| < 1\right\}.$$

Si $\Phi \in \cap_{j=1}^n \ker\left(\iota_{X^*}\left(\lambda_j\right)\right)$ entonces $m\Phi \in N$ y $\left|A\left(\Phi\right)\right| < 1/m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\cap_{j=1}^n \ker\left(\iota_{X^*}\left(\lambda_j\right)\right) \subseteq \ker(A)$. Definimos

$$F : X^{**} \to \mathbb{C}^n,\ F\left(\Phi\right) = \left(\Phi\left(\lambda_1\right),...,\Phi\left(\lambda_n\right)\right).$$

Sea S un suplemento en $\mathbb{C}^n$ de $F\left(X^{**}\right)$, i.e. $\mathbb{C}^n = F\left(X^{**}\right)\bigoplus S$. Sea

$$a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ a(z) = A\left(\Phi\right) \text{ si } z = F\left(\Phi\right)+w,\ \Phi \in X^{**},\ w \in S.$$

Así a está bien definida: si además $z = F\left(\Phi_1\right)+w$ con $F\left(\Phi\right) = F\left(\Phi_1\right)$ entonces $\Phi-\Phi_1 \in \ker\left(\iota_{X^*}\left(\lambda_j\right)\right)$. Luego $A\left(\Phi\right) = A\left(\Phi_1\right)$. Evidentemente a es $\mathbb{C}$-lineal y $A = a\circ F$. Existe $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $a\left(z\right) = \langle z,v\rangle$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$. En definitiva,

$$\begin{aligned} A\left(\Phi\right) &= a\left(F\left(\Phi\right)\right) \\ &= \left\langle F\left(\Phi\right),v\right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \Phi\left(\lambda_j\right)\overline{v}_j \\ &= \Phi\left(\sum_{j=1}^n \overline{v}_j\lambda_j\right) \\ &= \iota_{X^*}\left(\sum_{j=1}^n \overline{v}_j\lambda_j\right)\left(\Phi\right) \end{aligned}$$

para todo $\Phi \in X^{**}$. *Luego* $A = \iota_{X^*}(\lambda^0)$, *donde* $\lambda^0 \triangleq \sum_{j=1}^{n} \overline{v}_j \lambda_j$. *Por (162) vemos que*

$$\operatorname{Re}\Theta\left(\lambda^0\right) < \beta < \beta + \delta < \operatorname{Re}\lambda^0(x) \ \text{ si } x \in [X]_1 .$$

En particular, $\beta + \delta < 0$ *y*

$$\operatorname{Re}\Theta\left(\lambda^0/\beta\right) > 1 > 1 + \delta/\beta > \operatorname{Re}\left(\lambda^0/\beta\right)(x) \ \text{ si } x \in [X]_1 .$$

Haciendo $\lambda^1 \triangleq \lambda^0/\beta$, *si* $x \in [X]_1$ *y* $\lambda^1(x) \neq 0$ *sea* $\sigma \in \mathbb{S}^1$ *de modo tal que* $\lambda^1(x) = |\lambda^1(x)|\,\sigma$. *Entonces*

$$\left|\lambda^1(x)\right| = \lambda^1(\overline{\sigma}x) = \operatorname{Re}\lambda^1(\overline{\sigma}x) < 1 + \beta/\delta.$$

En consecuencia,

$$\left\|\lambda^1\right\| \leq 1 + \beta/\delta < 1 < \operatorname{Re}\Theta\left(\lambda^1\right) \leq \left|\Theta\left(\lambda^1\right)\right| \leq \left\|\lambda^1\right\|,$$

lo cual es absurdo y sigue la tesis.

13.10. Teorema de Hildebrandt

Teorema 13.39 *(cf. [74]) Sea* X *un espacio topológico discreto. Hay un isomorfismo isométrico de espacios de Banach* $l^\infty(X)^* \approx \mathrm{M}_{f.ad.}(X)$, *donde* $\mathrm{M}_{f.ad.}(X)$ *es el espacio de medidas finitamente aditivas acotadas sobre* X.

Demostración 13.40 *Dados* $F \in l^\infty(X)$ *y* $E \in \mathcal{P}(X)$ *sea* $\mu_F(E) = \langle \chi_E, F\rangle$. *Claramente* $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{C}$ *es una medida finitamente aditiva. Si* $\pi \in \mathfrak{P}_f(X)$ *es una partición finita de* X, *digamos* $\pi = \{E_j\}_{j=1}^n$, *hay escalares complejos unitarios* $\{u_j\}_{j=1}^n$ *de modo que*

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\left\langle \chi_{E_j}, F\right\rangle\right| = \sum_{j=1}^{n} u_j \left\langle \chi_{E_j}, F\right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j \chi_{E_j}, F \right\rangle \leq \|F\|,$$

de donde $\mu_F \in \mathrm{M}_{f.ad.}(X)$ *y* $\|\mu_F\| \leq \|F\|$. *Dado* $\varepsilon > 0$ *sea* $f \in l^\infty(X)$ *unitario tal que* $\|F\| - \varepsilon < |\langle f, F\rangle|$. *Como* $\overline{f(X)}$ *es compacto en* $\mathbb{C}$ *existen* $x_1, ..., x_s \in X$ *tales que* $\overline{f(X)} \subseteq \cup_{i=1}^{s} D[x_i, \varepsilon]$. *Haciendo* $E_i = f^{-1}(D[x_i, \varepsilon])$, $1 \leq i \leq s$, *podemos escribir* $X = \cup_{i=1}^{s} G_i$ *donde* $G_1 = E_1$ *y* $G_i = E_i - \cup_{j=1}^{i-1}$ *si* $1 < i \leq s$. *Así* $\{G_i\}_{i=1}^s \in \mathfrak{P}_f(X)$ *y hacemos* $g \triangleq \sum_{i=1}^{s} f(y_i)\,\chi_{G_i}$, *donde escogemos* $y_i \in G_i$ *para cada* i. *Luego* $g \in l^\infty(X)$, $\|g\|_\infty \leq 1$ *y* $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. *En consecuencia, hay una sucesión de funciones simples* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *en* $B[0,1]$ *de modo que* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. *En consecuencia*

$$\|F\| - \varepsilon < |\langle f, F\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle f_n, F\rangle| \leq \|\mu_F\|$$

y deducimos que $\|\mu_F\| = \|F\|$ *. Queda definida una aplicación lineal e isométrica* $\Psi : l^\infty (X)^* \to \mathrm{M}_{f.ad.}(X)$ *tal que* $\Psi(F) = \mu_F$ *para cada* $F \in l^\infty (X)^*$ *. Sea ahora* $\mu \in \mathrm{M}_{f.ad.}(X)$ *y para* $h \in l^\infty (X)$ *hagamos* $\langle h, G\rangle = \int_X h d\mu$*. Es claro que* $G \in l^\infty (X)^*$ *y* $\Psi(G) = \mu$*, lo que completa la demostración.*

13.11. Teorema de Kakutani

Definición 13.41 [69] *Un espacio de Banach* M *se dice* (AM) *o abstracto si está parcialmente ordenado por una relación* $\leq$ *tal que:*

(i) Si $x, y \in M$, $\lambda \geq 0$ y $x \leq y$ entonces $\lambda x \leq \lambda y$.

(ii) Si $x, y, z \in M$ y $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$.

(iii) Dados $x, y \in M$ existe $x \vee y \in M$, donde $x \vee y$ denota a la mínima cota superior de $\{x, y\}$.

(iv) Dados $x, y \in M$ existe $x \wedge y \in M$, donde $x \wedge y$ denota a la máxima cota inferior de $\{x, y\}$.

(v) Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones de M, $x_n \to x$, $y_n \to y$ y $x_n \leq y_n$ para cada n entonces $x \leq y$.

(vi) Si $x \wedge y = 0$ entonces $\|x - y\| = \|x + y\|$.

(vii) Si $x \geq 0$ e $y \geq 0$ entonces $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Proposición 13.42 *Sea* M *espacio de Banach* (AM)*.*

(i) Si $0 \leq x \leq y$ entonces $\|x\| \leq \|y\|$.

(ii) Si $x, y, z \in M$,

$$x \vee y + z = (x + z) \vee (y + z) \text{ y } x \wedge y + z = (x + z) \wedge (y + z) . \quad (163)$$

(iii) Si $\lambda \geq 0$ y $x, y \in M$, $\lambda (x \vee y) = (\lambda x) \vee (\lambda y)$.

(iv) Si $x, y \in M$, $x + y = x \vee y + x \wedge y$.

(v) Si $x \in M$ hagamos $x^+ \triangleq x \vee 0$, $x^- \triangleq (-x) \vee 0$ y $|x| = x \vee (-x)$. Entonces

$$x = x^+ - x^-, \ \ |x| = x^+ + x^-, \ \ x^+ \wedge x^- = 0.$$

[69] *Palabras clave:* Espacios de Banach abstractos. Homomorfismos reticulares. Unidades en espacios de Banach abstractos. Rayos extremos de conjuntos convexos. Conjuntos sólidos. Espacio de estructura de Kakutani.

(vi) Si $x, y \in M$ y $x \wedge y = 0$, $\|x \vee y\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$.

Demostración 13.43 **(i)** *Es inmediato por la condición (vii) de la Definición 13.41.*

(ii) *Si $x, y, z \in M$ por la condición (ii) de la Definición 13.41 $x \vee y + z$ es cota superior de $\{x + z, y + z\}$. Si w fuere otra cota superior de ese conjunto, $w - z$ sería cota superior de $\{x, y\}$. En consecuencia, $w - z \geq x \vee y$ y sigue la afirmación. La otra identidad en (163) sigue en forma análoga.*

(iii) *Es inmediato por la condición (i) de la Definición 13.41.*

(iv) *Dados $x, y \in M$, $x + y - x \wedge y \geq x$ porque $y \geq x \wedge y$. Análogamente, $x + y - x \wedge y \geq y$. Si z fuere cota superior de $\{x, y\}$, como $x + y - z \leq x$ y $x + y - z \leq y$ sigue que $x + y - z \leq x \wedge y$ y sigue la afirmación.*

(v) *Por (ii) y (iii) vemos que*

$$|x| + x = (2x) \vee 0 = 2(x \vee 0) = 2x^+,$$
$$|x| - x = 0 \vee (-2x) = 2(0 \vee (-x)) = 2x^-,$$

de donde $|x| = x^+ + x^-$ y $x = x^+ - x^-$. Aplicando (iv),

$$x^+ \wedge x^- = x^+ + x^- - x^+ \vee x^- = 0. \tag{164}$$

(vi) *Evidentemente sigue de (vii) de la Definición 13.41.*

Ejemplos 13.44 *Si Ω es espacio de Hausdorff $M \triangleq \left(C^b_{\mathbb{R}}(\Omega), \|\circ\|_\infty\right)$ es espacio (AM). En este caso, M si $x, y \in C^b_{\mathbb{R}}(\Omega)$ hacemos $x \leq y$ si y solo si $x(t) \leq y(t)$ para cada $t \in \Omega$. Así M es espacio de Banach y las condiciones (i) - (v) de la Definición 13.41 se dan claramente. Respecto a (vi), si $x, y \in M$ e $x \wedge y = 0$ entonces x e y son no negativas en todo punto y como*

$$|x - y| \leq x + y \leq \|x + y\|$$

resulta $\|x - y\| \leq \|x + y\|$. Notamos además que $x(t) = 0$ (resp. $y(t) = 0$) toda vez que $y(t) > 0$ (resp. si $x(t) > 0$), y así $\|x - y\| \geq \|x + y\|$. Respecto a la condición (vii), si $x \geq 0$ e $y \geq 0$ ciertamente

$$x \leq x \vee y \leq \|x \vee y\|$$

y por ello $\|x\| \leq \|x \vee y\|$. Análogamente $\|y\| \leq \|x \vee y\|$ y en consecuencia $\text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x \vee y\|$. *Además*

$$x \vee y = \text{máx}\{x, y\} \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\},$$

i.e. $\|x \vee y\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$. *También son espacios* (AM) *los subespacios de* $C^b_{\mathbb{R}}(\Omega)$ *del tipo* $N \triangleq C^b_{\mathbb{R}}(\Omega, t_a, t'_a, \lambda_a, a \in A)$, *en los que* $A \neq \varnothing$, $\{t_a\}_{a\in A}$, $\{t'_a\}_{a\in A}$ *son subconjuntos de* Ω, $\{\lambda_a\}_{a\in A} \subseteq [0,1)$ *y* $x(t_a) = \lambda_a x(t'_a)$ *para todo* $x \in N$. *Asimismo, si* S *es subconjunto no vacío de* Ω *el subespacio* $C^b_{\mathbb{R}}(\Omega, S)$ *de funciones de* $C^b_{\mathbb{R}}(\Omega)$ *nulas sobre* S *es espacio* (AM) *de Banach.*

Ejemplos 13.45 *Si* Ω *está munido de la topología discreta* $C^b_{\mathbb{R}}(\Omega) = l^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega)$. *Si* (Ω, Σ, m) *es un espacio de medida positiva,* $M \triangleq L^\infty(\Omega, \Sigma, m)$ *es espacio* (AM), *identificando funciones que difieren en conjuntos* Σ*-medibles de* m*-medida cero.*

Definición 13.46 *En un espacio* M *de tipo* (AM) *llamamos unidad a todo elemento* $u \in M_+$ *tal que* $\|u\| = 1$ *de modo que si* $x \in M$ *y* $\|x\| \leq 1$ *entonces* $x \leq u$.

Observación 13.47 *Desde luego, en el contexto de los ejemplos anteriores* $C^b_{\mathbb{R}}(\Omega)$ *y* $L^\infty(\Omega, \Sigma, m)$ *tienen unidades. En cambio, si* Ω *es espacio de Hausdorff localmente compacto y* t_0 *es punto no aislado de* Ω *entonces* $C^b_{\mathbb{R}}(\Omega, \{t_0\})$ *no tiene unidades. Si hubiera alguna unidad* $u \in C^b_{\mathbb{R}}(\Omega, \{t_0\})$ *consideremos* $t_1 \in \{u < 1/2\} - \{t_0\}$. *Por el lema de Urysohn existe* $x \in C^b_{\mathbb{R}}(\Omega, \{t_0\})$, $0 \leq x \leq 1$, *tal que* $x(t_1) = 1$. *Pero*

$$1 = x(t_1) > 1/2 > u(t_1),$$

por lo que u *no podría ser unidad.*

Lema 13.48 *Sean* M *un espacio*(AM), $x_0 \in M^+$ *tal que* $\|x_0\| = 1$.

(i) $\mathfrak{V}_{x_0} \subseteq M^*_+$, donde $\mathfrak{V}_{x_0} = \{f \in M^* : f(x_0) = \|f\| = 1\}$.

(ii) Dados $f \in \mathfrak{V}_{x_0}$ e $y \in M^+$ tal que $\|x_0 \wedge y\| < 1$,

$$f(y) = f(x_0 \wedge y) < 1. \tag{165}$$

(iii) Dado $\Theta \in \mathcal{P}_f(M^+)$, digamos $\Theta = \{x_1, ..., x_n\}$, existen $y_0 \in M$ y $\Theta^\sim \in P_f(M^+)$ del tipo $\Theta^\sim = \{y_1, ..., y_n\}$ de modo que

(iiia) $0 \leq y_0 \leq x_0$ y $\|y_0\| = 1$.

(iiib) $\|y_0 \wedge \lambda y_i\| < 1$ si $\lambda > 0$ e $i = 1, ..., n$.

(iiic) Si $1 \leq i, j \leq n$ y $x_i \wedge x_j = 0$, $x_i = y_i$ o $x_j = y_j$.

(iv) Si $\Theta = \{x_1, ..., x_n\}$ como en (iii), existe $f_\Theta \in \mathfrak{V}_{x_0}$ tal que toda vez que $1 \leq i, j \leq n$ y $x_i \wedge x_j = 0$ entonces $f_\Theta(x_i) = 0$ o $f_\Theta(x_j) = 0$.

Demostración 13.49 **(i)** *Sean $f \in \mathfrak{V}_{x_0}$ e $y \in M^+$ tal que $\|y\| = 1$. Entonces*

$$0 \leq (x_0 - y) \vee 0 \leq x_0, \; 0 \leq (y - x_0) \vee 0 \leq y. \tag{166}$$

Por la Prop. 13.42(i) obtenemos

$$\|(x_0 - y) \vee 0\| \leq \|x_0\| = 1 \text{ y } \|(y - x_0) \vee 0\| \leq \|y\| = 1. \tag{167}$$

Vemos que

$$x_0 - y = (x_0 - y) \vee 0 - (y - x_0) \vee 0 = (x_0 - y)^+ - (x_0 - y)^- .$$

Por (vi) de la Definición 13.41 y (v) y (vi) de la Prop. 13.42,

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\| &= \left\|(x_0 - y)^+ - (x_0 - y)^-\right\| \\ &= \left\|(x_0 - y)^+ + (x_0 - y)^-\right\| \\ &= \||x_0 - y|\| \\ &= \left\|(x_0 - y)^+ \vee (x_0 - y)^-\right\| \\ &= \text{máx}\left\{\left\|(x_0 - y)^+\right\|, \left\|(x_0 - y)^-\right\|\right\} \\ &\leq 1. \end{aligned} \tag{168}$$

En consecuencia

$$f(x_0 - y) = 1 - f(y) \leq \|x_0 - y\| \leq 1,$$

i.e. $f(y) \geq 0$.

(ii) *Sea $z = (1 - \lambda)(x_0 \wedge y) + \lambda y$, con $y \in M^+$ tal que $\|x_0 \wedge y\| < 1$ y $0 < \lambda < 1$. Entonces*

$$x_0 \wedge y \leq z \leq y, \tag{169}$$

porque $y - z = (1 - \lambda)(y - x_0 \wedge y)$ y $z - x_0 \wedge y = \lambda(y - x_0 \wedge y)$. Como

$$\|z\| \leq (1 - \lambda)\|x_0 \wedge y\| + \lambda\|y\|$$

y $\|x_0 \wedge y\| < 1$, será $\|z\| < 1$ si λ es lo suficientemente pequeño. En ese caso, por (169)

$$x_0 \wedge z = x_0 \wedge (y \wedge z) = (x_0 \wedge y) \wedge z = x_0 \wedge y. \tag{170}$$

Como $f \in \mathfrak{V}_{x_0}$ *y usando (vii) de la Definición 13.41,*

$$1 = f(x_0) \leq f(x_0 \vee z) \leq \|x_0 \vee z\| = \max\{1, \|z\|\} = 1. \qquad (171)$$

Por la Prop. 13.42(iv), (170) y (171) obtenemos

$$\begin{aligned} f(x_0 \wedge y) &= f(x_0 \wedge z) \\ &= 1 + f(z) - f(x_0 \vee z) \\ &= f(z) \\ &= (1-\lambda) f(x_0 \wedge y) + \lambda f(y), \end{aligned}$$

de donde sigue (165).

(iii) *Haremos inducción en el cardinal* n *de* Θ*. Sea* $z_0 = x_0$ *y si* $\Theta = \{x_1\}$ *y* $\|x_0 \wedge \lambda x_1\| < 1$ *para todo* $\lambda > 0$ *sea* $y_1 = x_1$ *y* $z_1 = z_0$*. Sino, existirá* $\lambda_1 > 0$ *tal que* $\|x_0 \wedge \lambda_1 x_1\| = 1$*, en cuyo caso sea* $z_1 = x_0 \wedge \lambda_1 x_1$ *e* $y_1 = 0$*. En ambos casos, sea* $y_0 = z_1$*. Ahora, si* $\Theta = \{x_1, x_2\}$ *consideremos los elementos* y_1 *y* z_1 *asociados a* x_1*. Si* $\|z_1 \wedge \lambda x_2\| < 1$ *para todo* $\lambda > 0$ *sea* $z_2 = z_1$ *e* $y_2 = x_2$*. Sino existirá* $\lambda_2 > 0$ *tal que* $\|z_1 \wedge \lambda_2 x_2\| = 1$ *y hacemos* $z_2 = z_1 \wedge \lambda_2 x_2$ *e* $y_2 = 0$*. En ambos casos sea* $y_0 = z_2$*. Sea* $n > 1$ *y supongamos hallados elementos positivos* $z_0 \geq z_1 \geq ... \geq z_{n-1}$ *de norma uno e* $y_1, ..., y_{n-1} \in M^+$*. Si* $\|z_{n-1} \wedge \lambda x_n\| < 1$ *para todo* $\lambda > 0$ *escribimos* $z_n = z_{n-1}$ *e* $y_n = x_n$*. Sino existirá* $\lambda_n > 0$ *tal que* $\|z_{n-1} \wedge \lambda_n x_n\| = 1$ *y hacemos* $z_n = z_{n-1} \wedge \lambda_n x_n$ *e* $y_n = 0$*. Hacemos* $y_0 = z_n$ *y sigue el paso inductivo. La condición (iiia) se verifica por construcción. Respecto a (iiib), si para* $i \in \mathbb{N}$ *es* $y_i \neq 0$ *debe ser* $y_i = x_i$*. Como* $y_0 \leq z_{i-1}$ *por la Prop. 13.42(i) si* $\lambda > 0$ *tenemos*

$$\|y_0 \wedge \lambda y_i\| = \|y_0 \wedge \lambda x_i\| \leq \|z_{i-1} \wedge \lambda x_i\| < 1.$$

Respecto a (iiic) supongamos $x_i \wedge x_j = 0$*,* $i < j$ *en* $\mathbb{N}$*,* $x_i \neq y_i$*. Veremos que* $\|z_{j-1} \wedge \lambda x_j\| < 1$ *para todo* $\lambda > 0$*, con lo que tendremos* $x_j = y_j$*. Pero sabemos existe* $\lambda_i > 0$ *tal que* $z_i = z_{i-1} \wedge \lambda_i x_i$*, de modo que*

$$\begin{aligned} 0 &\leq z_{j-1} \wedge \lambda x_j \\ &\leq z_i \wedge \lambda x_j \\ &= (z_{i-1} \wedge \lambda_i x_i) \wedge \lambda x_j \\ &= z_{i-1} \wedge (\lambda_i x_i \wedge \lambda x_j) \\ &\leq \lambda_i x_i \wedge \lambda x_j \\ &\leq \max\{\lambda_i, \lambda\} x_i \wedge x_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iv) *Sean $y_0, y_1, ..., y_n$ asociados a Θ conforme a (iii). Por el teorema de Banach-Hahn existe $f_\Theta \in M^*$ tal que $f_\Theta(y_0) = \|f_\Theta\| = 1$. En consecuencia $f \in \mathfrak{V}_{y_0}$ y por (i) $f \geq 0$. Además por (iiia) vemos que*

$$1 = f_\Theta(y_0) \leq f_\Theta(x_0) \leq 1,$$

i.e. $f_\Theta \in \mathfrak{V}_{x_0}$. Supongamos $x_i \wedge x_j = 0$ para ciertos $1 \leq i, j \leq n$. Por (iiic) podemos suponer $x_i = y_i$ y $\|z_{i-1} \wedge \lambda x_i\| < 1$ para todo $\lambda > 0$. Por (ii) sigue que

$$f_\Theta(\lambda x_i) = f_\Theta(z_{i-1} \wedge \lambda x_i) < 1$$

cualquiera sea $\lambda > 0$, de donde $f_\Theta(x_i) = 0$.

Teorema 13.50 *(cf. [80]) Sea M un espacio (AM) de Banach.*

(i) Hay un espacio compacto Hausdorff Ω, un conjunto de índices A, subconjuntos $\{f_a\}_{a\in A}$, $\{f'_a\}_{a\in A}$ de Ω y $\{\lambda_a\}_{a\in A}$ de $[0,1)$ y un homomorfismo acotado entre espacios (AM) de Banach

$$\delta_K : M \to C^b_{\mathbb{R}}(\Omega, f_a, f'_a, \lambda_a, a \in A). \tag{172}$$

Diremos que Ω es el *espacio de estructura de Kakutani de M.*

(ii) Dado $x_0 \in M$ existe $f_0 \in \Omega$ tal que $|\delta_K(x_0)(f_0)| = \|x_0\|$.

(iii) δ_K es suryectiva, y en definitiva (172) establece un isomorfismo isométrico reticular de espacios de Banach (AM). Esta afirmación sigue de los siguientes hechos:

(iiia) Sean $X_0 \in C^b_{\mathbb{R}}(\Omega, f_a, f'_a, \lambda_a, a \in A)$, $f_0, g_0 \in \Omega$. Existe $y_0 \in M$ tal que

$$f_0(y_0) = X_0(f_0) \text{ y } g_0(y_0) = X(g_0). \tag{173}$$

(iiib) Si $g_0 \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$ existe $z_0 \in M$ tal que $g_0(z_0) = X_0(g_0)$ y para todo $f \in \Omega$ es $f(z_0) > X_0(f) - \varepsilon$.

(iiic) Dado $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in M$ tal que $|f(x_\varepsilon) - X_0(f)| < \varepsilon$ para todo $f \in \Omega$.

Demostración 13.51 **(i)** *Sea Ω' la clase de formas lineales $f \in M^*_+$ de norma uno tales que si $x, y \in M$ es $f(x) = 0$ o $f(y) = 0$ si $x \wedge y = 0$. Si $f \in \Omega'$ y $x, y \in M$, por (163) es $(x - x\wedge y) \wedge (y - x \wedge y) = 0$. Entonces*

$$f(x \wedge y) \in \{f(x), f(y)\}. \tag{174}$$

Siendo $f \geq 0$,

$$f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y). \tag{175}$$

De (174) y (175) concluímos que

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

Luego

$$f(x \vee y) = f(x + y - x \wedge y) = f(x) + f(y) - f(x) \wedge f(y) = f(x) \vee f(y)$$

y todo elemento de Ω' deviene en un homomorfismo de retículos. El conjunto $\Omega \triangleq \overline{\Omega'}^{w^*}$ es w^*-compacto como consecuencia del teorema de Alaoglu, y $\|f\| \leq 1$ para todo $f \in \Omega$. Dado $f \in \Omega$ tal que $\|f\| = \lambda$ en $[0,1)$, $f = \lambda f'$ con $f' \in \Omega'$.[70] *Quedan establecidas expresiones $f_a = \lambda_a f'_a$ entre elementos $f \in \Omega$, $f'_a \in \Omega'$, $\lambda_a \in [0,1)$ e índices a en cierto conjunto A. En particular, notar que los elementos de Ω son asimismos homomorfismos de retículos. Además tenemos una aplicación*

$$\delta_K : M \to C(\Omega, f_a, f'_a, \lambda_a, a \in A), \ \delta_K(x)(f) = f(x), \tag{176}$$

la que está bien definida: Fijado $x \in M$, $\delta_K(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ es claramente w^*-continua, $\|\delta_K(x)\| \leq \|x\|$ y si $a \in A$ se tiene

$$\delta_K(x)(f_a) = f_a(x) = \lambda_a f'_a(x) = \lambda_a \delta_K(x)(f'_a).$$

Por otra parte, δ_K no solo es un operador acotado entre espacios de Banach, sinó también un homomorfismo de retículos ya que si $x, y \in M$ y $f \in \Omega$ se tiene

$$\delta_K(x \vee y)(f) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = \delta_K(x)(f) \vee \delta_K(y)(f),$$
$$\delta_K(x \wedge y)(f) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = \delta_K(x)(f) \wedge \delta_K(y)(f).$$

(ii) *La afirmación para $x_0 = 0$ es trivial. Dado $x_0 \in M - \{0\}$, si asumimos el resultado para vectores de norma uno, existirá $f_0 \in \Omega$ tal*

[70] En particular, $\|f\| = 1$ para cada $f \in \Omega$ en caso que M tuviere alguna unidad u. En efecto, por la Definición 13.46 si $f \in \Omega'$ y $\|x\| \leq 1$ entonces $x \leq u$, y como $f \geq 0$ y tiene norma uno y $\|u\| = 1$ es $f(x) \leq f(u) \leq 1$. Como x es arbitrario, $f(u) = 1$. Sinó habrá una red $\{f_i\}_{i \in I}$ de Ω' tal que $f = w^*\text{-lím}_{i \in I} f_i$ y es claro que

$$f(u) = \lim_{i \in I} f_i(u) = 1.$$

En este caso Ω' deviene w^*-compacto y $\delta_K : M \to C(\Omega')$ será un isomorfismo isométrico reticular de espacios abstractos de Banach.

que $|f_0(x_0/\|x_0\|)| = 1$, y como f_0 es $\mathbb{R}$-lineal el resultado será cierto en general. Como en (168), $\|x_0\| = \max\{\|x_0^+\|, \|x_0^-\|\}$. Supongamos $\|x_0\| = 1$ y el resultado cierto para elementos positivos de norma uno. Si fuere $\|x_0^+\| = 1$ existiría $f_+ \in \Omega$ tal que $f_+(x_0^+) = 1$. Luego $\|f_+\| = 1$ y como $x_0^+ \wedge x_0^- = 0$ habrá de ser $f_+(x_0^-) = 0$. Así

$$|f_+(x_0)| = f_+(x_0^+) = 1 = \|x_0\|.$$

Asimismo, si $\|x_0^-\| = 1$ existirá $f_- \in \Omega$ tal que $f_-(x_-) = 1$. Ahora $f_-(x_0^+) = 0$ y

$$|f_-(x_0)| = f_-(x_0^-) = 1 = \|x_0\|.$$

Todo se reduce así a probar el resultado cuando x_0 es positivo y de norma uno. Si $\Theta \in \mathcal{P}_f(M^+)$ sea $f_\Theta \in \mathfrak{V}_{x_0}$ tal que toda vez que $f_\Theta(x) = 0$ o $f_\Theta(y) = 0$ cuando $x, y \in \Theta$ y $x \wedge y = 0$. Indiquemos Ω_Θ al conjunto de todos los funcionales con las propiedades de f_Θ. Por el Lema 13.48(iv) $\Omega_\Theta \neq \varnothing$ y claramente Ω_Θ es subconjunto w^*-cerrado de $[M^*]_1$. Si $F \in \mathcal{P}_f(\mathcal{P}_f(M^+))$ entonces $\cap\Omega_\Theta \neq \varnothing$ porque $\cap_{\Theta\in F}\Omega_\Theta \supseteq \Omega_{\cup_{\Theta\in F}\Theta}$. Siendo $\{\Omega_\Theta\}_{\Theta\in\mathcal{P}_f(M^+)}$ una familia de partes cerradas del espacio w^*-compacto separado $[M^*]_1$, existe $f_0 \in \cap_{\Theta\in\mathcal{P}_f(M^+)}\Omega_\Theta$. En consecuencia, $f_0 \in M^*$ y

$$\|f_0\| = f(x_0) = 1 = \|x_0\|$$

porque $f_0 \in \mathfrak{V}_{x_0}$. Por el Lema 13.48(i), $f_0 \geq 0$ y claramente $f_0(x) = 0$ o $f_0(y) = 0$ toda vez que $x \wedge y = 0$. Entonces $f_0 \in \Omega'$ y, en particular, deviene en un homomorfismo de retículos. En definitiva, $f_0 \in \Omega$ e inferimos que δ_K es isométrica.

(iii) Asumiendo (iiia)-(iiic), sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq M$ tal que para $f \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$ es $|f(x_n) - X_0(f)| < 1/n$. Dados $n, m \in \mathbb{N}$ por (ii) existe $f \in \Omega$ tal que $|f(x_n - x_m)| = \|x_n - x_m\|$, de modo que

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= |f(x_n - x_m)| \\ &= |f(x_n) - f(x_m)| \\ &\leq |f(x_n) - X_0(f)| + |X_0(f) - f(x_m)| \\ &< 1/n + 1/m.\end{aligned}$$

Luego $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es sucesión de Cauchy. Sea $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Si $g \in \Omega$ tendremos entonces

$$|X_0(g) - g(x_0)| = \lim_{n\to\infty} |X_0(g) - g(x_n)| = 0.$$

(iiia) *Como* $X(0)=0$ *podemos suponer* $f_0 \neq 0$ *o* $g_0 \neq 0$. *Si* $f_0 = 0$ *existen* $x_0 \in M$ *y* $\rho \in \mathbb{R}$ *tales que* $g_0(x_0) \neq 0$ *y* $X(g_0) = \rho g_0(x_0)$, *en cuyo caso bastará hacer* $y_0 = \rho x_0$. *Supongamos entonces* f_0 *y* g_0 *no nulos y distintos. Si para algún* $a \in A$ *fuera* $f_0 = f_a$ *y* $g_0 = f'_a$ *tendremos*

$$f_0 = f_a = \lambda_a f'_a = \lambda_a g_0.$$

Dado $y \in M$ *tal que* $g_0(y) \neq 0$ *será* $\lambda_a = f_0(y)/g_0(y)$,

$$X_0(f_0) = \lambda_a X(g_0) = \frac{f_0(y)}{g_0(y)} X(g_0)$$

y bastará que $y_0 \triangleq (X(g_0)/g_0(y))\, y$. *En otro caso, si* $\|f_0\| < 1$ *podemos escribir* $f_0 = \|f_0\| f'$, *donde* $f' \in \Omega'$. *Así* $\|f_0\| \in A$, $f' = f'_{\|f_0\|}$ *y a posteriori debería ser*

$$X(f_0) = \|f_0\| X(f') = \|f_0\| f'(y_0).$$

Podemos asumir entonces que $f_0, g_0 \in \Omega'$ *y son distintos. Supongamos además que existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\lambda \equiv \frac{f_0(y_1)}{g_0(y_1)} = \frac{f_0(y_2)}{g_0(y_2)} \text{ si } g_0(y_1) \neq 0,\ g_0(y_2) \neq 0,\ y_1, y_2 \in M. \quad (177)$$

Si existiese $y_1 \in \ker(f_0) - \ker(g_0)$, *por (177) es* $M - \ker(g_0) \subseteq \ker(f_0)$. *Esto no es posible pues* $M - \ker(f_0)$ *es denso en* M *y* $\ker(f_0) \subsetneq M$. *En consecuencia* $\ker(f_0) \subseteq \ker(g_0)$ *y* $\{f_0, g_0\}$ *deberá ser linealmente dependiente. Como* $f_0, g_0 \in \Omega'$ *será* $f_0 = -g_0$ *porque suponemos* $f_0 \neq g_0$. *Como* f_0 *y* g_0 *son positivos resulta* $f_0 = g_0 = 0$, *lo cual no es cierto. Luego existen* $y_1, y_2 \in M$ *tales que* $f_0(y_1)\, g_0(y_2) - g_0(y_1)\, f_0(y_2) \neq 0$. *Luego el sistema de ecuaciones*

$$X(f_0) = \alpha f_0(y_1) + \beta f_0(y_2),\ X(g_0) = \alpha g_0(y_1) + \beta g_0(y_2) \quad (178)$$

admíte una única solución $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2$ *y con* $y_0 \triangleq \alpha_0 y_1 + \beta_0 y_2$ *de (178) sigue (173).*

(iiib) *Fijados* $g_0 \in \Omega$ *y* $\varepsilon > 0$, *si* $f_0 \in \Omega$ *aplicando (iiia) existen* $y_0 \in M$ *tal que* $g_0(y_0) = X_0(g_0)$ *y un* w^**-entorno* U_{f_0} *de* f_0 *tal que*

$$f(y_0) > X_0(f_0) - \varepsilon \text{ para todo } f \in U_{f_0}.$$

Por la compacidad de Ω *sean* $f_1, ..., f_m \in \Omega$, $y_1, ..., y_m \in M$ *de modo que* $\Omega = \cup_{j=1}^m U_{f_j}$ *y* $f(y_j) > X_0(f_j) - \varepsilon$ *si* $f \in U_{f_j}$, $1 \leq j \leq m$. *Si* $y_0 = y_1 \vee ... \vee y_m$ *entonces*

$$g_0(y_0) = \max_{1 \leq j \leq m} g_0(y_j) = X_0(g_0)$$

y si $f \in \Omega$

$$f(y_0) = \max_{1 \le j \le m} f(y_j) > X_0(f) - \varepsilon.$$

(iiic) *Dado $\varepsilon > 0$, por (iiib), si $g_0 \in \Omega$ existen $x_0 \in M$ y un w^*-entorno V_{g_0} de g_0 tales que $g(x_0) > X_0(g) - \varepsilon$ si $g \in \Omega$ y $g(x_0) < X_0(g) + \varepsilon$ si $g \in V_{g_0}$. Por ser Ω compacto existen $g_1, ..., g_n \in \Omega$, $x_1, ..., x_n \in M$ tales que $\Omega = \cup_{i=1}^n V_{g_i}$, $g(x_i) < X_0(g) + \varepsilon$ si $g \in V_{g_i}$ y $g(x_i) > X_0(g) - \varepsilon$ si $g \in \Omega$, $1 \le i \le n$. Finalmente, si $x_\varepsilon = x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y si $g \in \Omega$, existirá $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $g \in V_{g_i}$ y por lo tanto*

$$X_0(g) - \varepsilon < g(x_\varepsilon) \le g(x_i) < X_0(g) + \varepsilon.$$

Observación 13.52 *Si X es espacio de Hausdorff compacto $C(X) = C_b(X)$, $\beta X \subseteq M(X)$, donde βX es la compactación de Stone-Čech de X. Siendo X compacto, si $\delta : X \to \beta X$, $\delta_x(f) = f(x)$ si $x \in X$ y $f \in M$, δ define un homeomorfismo $X \approx \beta X$. Sea $M = C(X)$ y Ω el espacio de Hausdorff asociado a M por el Teorema 13.50. Sabemos que $\Omega \subseteq \left[M(X)^+\right]_1$ y por (176) resulta*

$$\delta_K : C(X) \to C(\Omega), \ \delta_K(x)(\mu) = \int_X x d\mu.$$

Más aún, con la notación del Teorema 13.50,

$$\delta(X) = \beta X \subseteq \Omega = \overline{\Omega'}^{w^*} = \Omega'.$$

Además $\Omega' \subseteq \delta(X)$, ya que si $\mu \in \Omega'$ y hay puntos distintos $s, t \in \operatorname{sop}(\mu)$ consideremos entornos disjuntos U y V de s y t respectivamente. Por el lema de Urysohn existen $x, y \in M$ no negativas tales que $x(s) = y(t) = 1$, $\operatorname{sop}(x) \subseteq U$ y $\operatorname{sop}(y) \subseteq V$. Pero entonces $x \wedge y = 0$ y tanto $\mu(x)$ como $\mu(y)$ son positivos, lo que no es posible. Si $\operatorname{sop}(\mu) = \varnothing$, hay un cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de X por abiertos tales que $\int_X f d\mu = 0$ si $f \in M$, $0 \le f \le 1$ y $\operatorname{sop}(f) \subseteq U_i$, $i \in I$. Luego en todo caso $\mu(U_i) = 0$ y, como X se asume compacto, $\mu = 0$. Como $\|\mu\| = 1$ debe ser entonces $\mu \in \delta(X)$.

13.12. Teorema de densidad de Kaplansky

Lema 13.53 [71]*Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.*

(i) La composición de operadores es fuertemente continua sobre $[\mathcal{B}(\mathcal{H})]_1$.

(ii) Si f es función compleja continua definida para $|z| \le 1$ la función $(A, A^*) \to f(A)$ es fuertemente continua sobre el conjunto $[N(\mathcal{H})]_1$ de operadores normales unitarios.

[71] *Palabras clave:* Subálgebras esenciales. Conmutadores. Transformación de Cayley.

(iii) La *transformación de Cayley*

$$\mathcal{C} : \mathrm{Re}\,(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to U\,(\mathcal{B}(\mathcal{H}))\,,\ \mathcal{C}\,(A) = (A - i)\,(A + i)^{-1}$$

está bien definida, aplica operadores normales en unitarios y es fuertemente continua.

(iv) Dada $h \in C_0\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la función $A \to h(A)$ es fuertemente continua sobre $\mathrm{Re}\,(\mathcal{B}(\mathcal{H}))\,.$

Demostración 13.54 **(i)** *Sean* $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_j\}_{j\in J}$ *redes en* $[\mathcal{B}(\mathcal{H})]_1$ *fuertemente convergentes a* $A, B \in [\mathcal{B}(\mathcal{H})]_1$ *respectivamente. Si* $x \in \mathcal{H}$, $i \in I$ *y* $j \in J$ *se tiene*

$$\begin{aligned}\|(A_iB_j - AB)\,(x)\| &\le \|A_i\,((B_j - B)\,(x))\| + \|(A_i - A)\,(B\,(x))\| \\ &\le \|(B_j - B)\,(x)\| + \|(A_i - A)\,(B\,(x))\|\,,\end{aligned}$$

de donde sigue enseguida la afirmación.

(ii) *Dados* $A_0 \in [N(\mathcal{H})]_1$ *y* $F \in \mathcal{P}_f\,(\mathcal{H})$ *veremos que hay un entorno fuerte* $\mathcal{S}$ *de* A_0 *en* $[N(\mathcal{H})]_1$ *tal que*

$$\max_{x\in F} \|(f(A) - f(A_0))\,(x)\| < 1$$

si $A \in \mathcal{S}$*. Por el teorema de Stone-Wierstrass* $\mathbb{C}\,[z, \overline{z}]$ *es uniformemente densa en* $C\,([\mathbb{C}]_1)\,.$ *Sea* $g \in \mathbb{C}\,[z, \overline{z}]$ *tal que*

$$\max_{|z|\le 1} |g\,(z, \overline{z}) - f(z)| < 1/\,(3m)\,,$$

con $m = \max_{x\in F} \|x\|\,.$ *Por (i) la función* $A \to g\,(A, A^*)$ *es fuertemente continua sobre* $[N(\mathcal{H})]_1$*. Hay entonces un subconjunto finito* G *de* $\mathcal{H}$ *tal que*

$$\max_{x\in F} \|(g\,(A, A^*) - g\,(A_0, A_0^*))\,(x)\| < 1/3$$

si $\max_{y\in G} \|(A - A_0)\,(y)\| < 1$ *y* $A \in [N\,(\mathcal{H})]_1\,.$ *Sea* $\mathcal{S}$ *el conjunto de dichos operadores. Si* $A \in \mathcal{S}$ *y* $x \in F$ *resulta*

$$\begin{aligned}\|f\,(A) - f\,(A_0)\,(x)\| &\le \|(f(A) - g\,(A, A^*))\,(x)\| \\ &\quad + \|(g\,(A, A^*) - g\,(A_0, A_0^*))\,(x)\| \\ &\quad + \|((g\,(A_0, A_0^*)) - f(A_0))\,(x)\| \\ &< 2\,\|x\|\,/(3m) + 1/3 \\ &= 1,\end{aligned}$$

(V. [21], Ch. IX, §1).

(iii) *Basta notar que si* $A, A_0 \in \operatorname{Re}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ *se tiene*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(A) - \mathcal{C}(A_0) &= (A+i)^{-1}(A-i) - (A_0 - i)(A_0+i)^{-1} \qquad (179)\\ &= (A+i)^{-1}\left[A - i - (A+i)(A_0-i)(A_0+i)^{-1}\right]\\ &= (A+i)^{-1}\left[A - i - (A+i)\left(1 - 2i(A_0+i)^{-1}\right)\right]\\ &= -2i(A+i)^{-1}\left[1 - (A+i)(A_0+i)^{-1}\right].\end{aligned}$$

Si $x \in \mathcal{H}$*, como* $\left\|(A+i)^{-1}\right\| \leq 1$ *de (179) obtenemos*

$$\|(\mathcal{C}(A) - \mathcal{C}(A_0))(x)\| \leq 2\left\|x - (A+i)(A_0+i)^{-1}\right\|,$$

de donde $\mathcal{C}(A_0) = sot\text{-}\mathrm{lím}_{A\to A_0}\mathcal{C}(A)$ *en* $\operatorname{Re}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

(iv) *La función* f *definida sobre la circunferencia unitaria centrada en cero tal que* $f(1) = 0$ *y*

$$f(z) = h[-i(z+1)/(z-1)] \text{ si } |z| = 1 \text{ y } z \neq 1$$

deviene continua. Como $h(A) = f(\mathcal{C}(A))$ *si* $A \in \operatorname{Re}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ *la afirmación sigue de (ii) y (iii).*

Teorema 13.55 *(Cf. [84]) Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* M *una* $*$*-subálgebra esencial de* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$*, i.e. el subespacio generado por elementos de la forma* $T(x)$ *con* $T \in M$ *y* $x \in \mathcal{H}$ *es denso en* $\mathcal{H}$*. Entonces* $\overline{[M]_1}^{sot} = \left[\overline{M}^{sot}\right]_1$.

Demostración 13.56 *Como todo subconjunto fuertemente cerrado de* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *es cerrado* $\overline{M}^{sot}$ *es cerrado. Notemos que*

$$\overline{M}^{sot} \subseteq \left(M^-\right)^{-sot} \subseteq \left(\overline{M}^{sot}\right)^{-sot} = \overline{M}^{sot},$$

i.e. $\left(M^-\right)^{-sot} = \overline{M}^{sot}$. *Además si* Y *es un subespacio de un espacio de Banach* X, $\left[\overline{Y}\right]_1 = \overline{[Y]_1}$. *En efecto,* $\left[\overline{Y}\right]_1 \supseteq \overline{[Y]_1}$ *por continuidad de la norma. Además es inmediato que* $\left(\overline{Y}\right)_1 \subseteq \overline{[Y]_1}$ *y así*

$$\left[\overline{Y}\right]_1 = \overline{\left(\overline{Y}\right)_1} \subseteq \overline{[Y]_1}.$$

Si asumimos el resultado cierto para M *cerrado tendremos*

$$\overline{[M]_1}^{sot} = \left(([M]_1)^-\right)^{-sot} = \overline{\left[\overline{M}\right]_1}^{sot} = \left[\left(M^-\right)^{-sot}\right]_1 = \left[\overline{M}^{sot}\right]_1.$$

No hay pérdida de generalidad entonces si asumimos que M es cerrado. Las siguientes inclusiones son inmediatas

$$\overline{[M]_1}^{sot} \subseteq [M]_1 \subseteq \left[\overline{M}^{sot}\right]_1 .$$

Sea ahora $T \in \left[\mathrm{Re}\left(\overline{M}^{sot}\right)\right]_1$. Como M es convexo $\overline{M}^{sot} = \overline{M}^{wot}$ (V. [21], Th. IX.5.2) y como $*$ es wot-continua $T \in \overline{\mathrm{Re}(M)}^{sot}$. Si $S \in \mathrm{Re}\,(M)$, $-i \notin \sigma_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}(S)$. Si M^c es el conmutador de M, M^c es una $*$- subálgebra cerrada unitaria de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Asimismo, M^{cc} es una $*$-subálgebra cerrada unitaria de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y por lo tanto $\sigma_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}(S) = \sigma_{M^{cc}}(M)$ (V. [21], Ch. VIII, Prop. 1.14). En consecuencia está definida su transformada de Cayley $\mathcal{C}(S) = (S-i)(S+i)^{-1}$ en M^{cc}. Por el Teorema 13.69 $M^{cc} = \overline{M}^{sot}$. Con la notación del Lema 13.53(iv) y con $h \in [C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})]_1$ tal que $h(t) = t$ si $|t| \leq 1$ sigue que $h(S) \in \overline{f(M)}^{sot}$, i.e. $h(S) \in \overline{[\mathrm{Re}\,(M)]_1}^{sot}$. Escribiendo $T = sot\text{-}\mathrm{lím}_{j\in J} T_j$ con $\{T_j\}_{j\in J} \subseteq \mathrm{Re}\,(M)$ obtenemos

$$T = h(T) = sot\text{-}\lim_{j\in J} h(T_j)$$

y $T \in \overline{[\mathrm{Re}\,(M)]_1}^{sot}$. Así

$$\left[\mathrm{Re}\left(\overline{M}^{sot}\right)\right]_1 \subseteq \overline{[\mathrm{Re}\,(M)]_1}^{sot}. \tag{180}$$

El monomorfismo

$$\Gamma : M_2\left(\overline{M}^{sot}\right) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}),$$
$$\Gamma\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right)(x,y) = (Ax+By, Cx+Dy),$$

con $A,B,C,D \in M_2\left(\overline{M}^{sot}\right)$ y $x,y \in \mathcal{H}$, induce naturalmente una métrica en $M_2\left(\overline{M}^{sot}\right)$. Más aún, $M_2\left(\overline{M}^{sot}\right)$ admite una involución respecto a la que resulta en una $*$-álgebra de Banach. Así $\mathcal{M} \triangleq \mathrm{Im}\,(\Gamma)$ será una $*$-subálgebra cerrada esencial de $\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$. En el caso general, dado $V \in \left[\overline{M}^{sot}\right]_1$ sea $\widetilde{V} \in \mathcal{M}$ tal que $\widetilde{V}(x,y) = (Vy, V^*x)$ si $x,y \in \mathcal{H}$. Si $x,y,z,t \in \mathcal{H}$ es

$$\left\langle \widetilde{V}(x,y),(z,t)\right\rangle = \langle Vy,z\rangle + \langle V^*x,t\rangle = \langle y,V^*z\rangle + \langle x,Vt\rangle = \langle (x,y),(Vt,V^*z)\rangle,$$

i.e. $\widetilde{V}^* = \widetilde{V}$ *y* $\left\|\widetilde{V}\right\| \leq 1$. *Si* $V = wot\text{-}\lim_{i\in I} V_i$ *para cierta red* $\{V_i\}_{i\in I}$ *de* M *tenemos*

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i\in I}\left[\langle (V_i - V)\, y, z\rangle + \langle x, (V_i - V)\, t\rangle\right] \\ &= \lim_{i\in I}\left[\langle (V_i - V)\, y, z\rangle + \langle (V_i - V)^* x, t\rangle\right] \\ &= \lim_{i\in I}\left\langle \left((V_i - V)\, y, (V_i - V)^* x\right), (z,t)\right\rangle \\ &= \lim_{i\in I}\left\langle \left(\Gamma(\begin{bmatrix} 0 & V_i \\ V_i^* & 0 \end{bmatrix}) - \widetilde{V}\right)(x,y), (z,t)\right\rangle \end{aligned}$$

y podemos deducir que $\widetilde{V} \in \left[\operatorname{Re}\left(\overline{\Gamma\left[M_2\left(M\right)\right]}^{sot}\right)\right]_1$. *Como observamos en (180) para el caso autoadjunto habrá una red* $\left\{W^l\right\}_{l\in L}$ *en* $M_2(M)$ *tal que* $\left\{\operatorname{Re}\left(\Gamma\left(W^l\right)\right)\right\}_{l\in L} \subseteq [\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})]_1$ *y* $\widetilde{V} = sot\text{-}\lim_{l\in L}\operatorname{Re}\left(\Gamma\left(W_l\right)\right)$. *Si* $l \in L$ *y* $w \in \mathcal{H}$, *escribiendo* $W^l = \left[W^l_{i,j}\right]_{i,j=1,2}$, *vemos que*

$$\left\|\left(V - \left(W^l_{1,2} + \left(W^l_{2,1}\right)^*\right)/2\right)(w)\right\| \leq \left\|\left(\widetilde{V} - \operatorname{Re}\left(\Gamma\left(W^l\right)\right)\right)(0,w)\right\|$$

y

$$\left\|\left(W^l_{1,2} + \left(W^l_{2,1}\right)^*\right)/2\right\| \leq \left\|\operatorname{Re}\left(\Gamma\left(W^l\right)\right)\right\| \leq 1,$$

i.e. $V = sot\text{-}\lim_{l\in L}\left[\left(W^l_{1,2} + \left(W^l_{2,1}\right)^*\right)/2\right]$ *y* $V \in \overline{[M]_1}^{sot}$.

13.13. Teorema de Krein-Šmulian

Teorema 13.57 *(cf. [86]) En un espacio de Banach* X, *un subconjunto convexo* A *de* X^* *es* w^**-cerrado si y solo si* $A \cap [X^*]_r$ *lo es para cada* $r > 0$.

Demostración 13.58 *Evidentemente la condición es necesaria. Fijemos un elemento* $x_0^* \notin A$. *Es fácil ver que* A *ha de ser cerrado por lo que existe* $r > 0$ *tal que* $B\left[x_0^*, r\right] \cap A = \emptyset$. *Luego* $[X^*]_1 \cap B = \emptyset$, *donde* $B = \left(A - x_0^*\right)/r$. *Sea* $s > 0$ *y veamos que* $B \cap [X^*]_s$ *es* w^**-cerrado. Sea* $\{y_i^*\}_{i\in I}$ *una red de* $B \cap [X^*]_s$ *y sea* $y^* = w^*\text{-}\lim_{i\in I} y_i^*$. *Hay una red* $\{z_i^*\}_{i\in I} \subseteq A$ *tal que* $y_i^* = \left(z_i^* - x_0^*\right)/r$ *para cada* $i \in I$. *Haciendo* $z^* = x_0^* + ry^*$ *es fácil ver que*

$$w^*\text{-}\lim_{i\in I} z_i^* = w^*\text{-}\lim_{i\in I}\left(x_0^* + ry_i^*\right) = z^*$$

y como $\{z_i^*\}_{i\in I} \subseteq [X^*]_{\|x_0^*\|+rs}$ *por hipótesis* $z^* \in A$. *Luego ciertamente se tiene* $y^* \in B \cap [X^*]_s$. *Veamos que hay una sucesión* $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ *de subconjuntos finitos de* X *tales que*

$$nF_n \subseteq [X]_1 \;\; y \;\; B \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} F_k^o \cap [X^*]_n = \emptyset, \tag{181}$$

donde F^o denota, para cada parte F de X, el correspondiente conjunto polar

$$F^o = \left\{ u^* \in X^* : \sup_{x \in F} |\langle x, u^* \rangle| \leq 1 \right\}.$$

Como $[X^*]_1 \cap B = \emptyset$ podemos hacer $F_0 = \{0_X\}$. Si $F_0, ..., F_{n-1}$ se hubiesen hallado verificando (181) sea $Q = B \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} F_k^o \cap [X^*]_{n+1}$. Entonces Q es w^*-compacto pues es w^*-cerrado en $[X^*]_{n+1}$, que además lo es por el teorema de Alaoglu. Si la familia

$$\mathcal{I} = \left\{ Q \cap F^o : F \in \mathcal{P}_f \left([X]_{1/n} \right) \right\}$$

de partes w^*-cerradas de Q tuviere la propiedad de intersección finita sería $\cap \mathcal{I} \neq \emptyset$. Pero

$$\bigcap \left\{ F^o : F \in \mathcal{P}_f \left([X]_{1/n} \right) \right\} = [X^*]_n.$$

La inclusión $\supseteq$ es inmediata. Además si $x^* \in X^*$ y $\|x^*\| > n$ existe $x \in [X]_1$ tal que $|\langle x/n, x^* \rangle| > 1$, i.e. $x^* \notin \{x/n\}^o$ y $\|x/n\| \leq 1/n$. Así

$$\emptyset \neq \cap \mathcal{I} = \mathcal{Q} \cap [X^*]_n = B \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} F_k^o \cap [X^*]_n,$$

lo cual contradice (181). Existe entonces $F_n \in \mathcal{P}_f \left([X]_{1/n} \right)$ tal que $Q \cap F_n^o = \emptyset$, i.e. $B \cap \bigcap_{k=0}^{n} F_k^o \cap [X^*]_{n+1} = \emptyset$ y vale el paso inductivo. Enumeremos los elementos de $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ en una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Es claro que $x_n \to 0$ y queda definida la aplicación $T \in \mathcal{B}(X^*, c_0)$, $T(x^*) = \{\langle x_n, x^* \rangle\}_{n=1}^{\infty}$. Ahora, $T(B)$ es convexo y por (181) será $T(B) \cap [c_0]_1 = \emptyset$. Por el teorema de Banach-Hahn existe $\Lambda \in c_0^*$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{Re} \langle \lambda, \Lambda \rangle < c \leq \operatorname{Re} \langle T(x^*), \Lambda \rangle \ \ \textit{si } \lambda \in (c_0)_1 \ \textit{ y } x^* \in B.$$

Reemplazando eventualmente Λ y c por $\Lambda / \|\Lambda\|$ y $c / \|\Lambda\|$ podemos suponer $\|\Lambda\| = 1$. Si $\lambda \in (c_0)_1$ sea $s \in \mathbb{C}$ unitario tal que $\langle \lambda, \Lambda \rangle = \overline{s} |\langle \lambda, \Lambda \rangle|$. Entonces

$$|\langle \lambda, \Lambda \rangle| = \langle s\lambda, \Lambda \rangle = \operatorname{Re} \langle s\lambda, \Lambda \rangle < c,$$

y como λ es arbitrario

$$1 \leq c \leq \operatorname{Re} \langle T(x^*), \Lambda \rangle \ \ \textit{si } x^* \in B.$$

Más aún, $\Lambda = \{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y si* $x^* \in B$ *como* X *es completo tenemos*

$$\langle T(x^*), \Lambda\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x^*\rangle \Lambda_n = \langle x_0, x^*\rangle ,$$

donde $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n x_n$, *y así* $\operatorname{Re}\langle x_0, x^*\rangle \geq 1$ *para cada* $x^* \in B$. *Por lo tanto* $0_{X^*} \notin \overline{B}^{w^*}$, *de donde* $x_0^* \notin \overline{A}^{w^*}$.

Corolario 13.59 *Sea* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ *on operador entre espacios de Banach. Son equivalentes: (a)* $\operatorname{ran}(T)$ *es cerrado. (b)* $\operatorname{ran}(T^*)$ *es* w^**-cerrado. (c)* $\operatorname{ran}(T^*)$ *es cerrado.*

Demostración 13.60 *Sean* $Z = \overline{\operatorname{ran}(T)}$ *y* $p : X \to X/\ker(T)$ *la proyección al cociente. Queda inducido* $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(X/\ker(T), Z)$ *isomorfismo tal que*

$$T\mid^{Z} = \widetilde{T} \circ p \quad y \quad \operatorname{ran}(T) = \operatorname{ran}(\widetilde{T}). \tag{182}$$

Además $(X/\ker(T))^* \approx \ker(T)^o$ *vía la aplicación siguiente: si* $x^* \in \ker(T)^o$ *sea* $\Phi(x^*)(p(x)) = x^*(x)$, $x \in X$. Φ *está bien definido, es lineal e inyectivo. Si* $\eta \in (X/\ker(T))^*$ *entonces* $\eta \circ p \in \ker(T)^o$ *y* $\Phi(\eta \circ p) = \eta$, *i.e.* Φ *es un isomorfismo y* $\Phi^{-1}(\eta) = \eta \circ p$. *Asimismo,* $Y^*/Z^o \approx Z^*$: *Si* $q : Y^* \to Y^*/Z^o$ *sea* $\Psi : Y^*/Z^o \to Z^*$ *tal que* $\Psi(q(y^*))(z) = y^*(z)$, *donde* $y^* \in Y^*$ *y* $z \in Z$. *También* Ψ *está bien definida, es lineal, inyectiva, y dado* $z^* \in Z^*$ *si* $y^* \in Y^*$ *es extensión de* z^* *se tiene* $\Psi(q(y^*)) = z^*$. *Consideremos la aplicación*

$$\Delta : Y^* \to \ker(T)^o, \ \Delta = \Phi^{-1} \circ \widetilde{T}^* \circ \Psi \circ q.$$

Si $y^* \in Y^*$ *y* $x \in X$ *tenemos*

$$\begin{aligned}
\Delta(y^*)(x) &= \Phi^{-1}\left[\widetilde{T}^*(\Psi(q(y^*)))\right](x) \\
&= \widetilde{T}^*[\Psi(q(y^*))](S(p(x))) \\
&= \Psi(q(y^*))(T(x)) \\
&= y^*(T(x)) \\
&= T^*(y^*)(x),
\end{aligned}$$

i.e. $\Delta(y^*) = T^*(y^*)$ *y* $\widetilde{T}^*[\Psi(q(y^*))] = \Phi(T^*(y^*))$. *Así*

$$\operatorname{ran}(\widetilde{T}^*) = \Phi[\operatorname{ran}(T^*)]. \tag{183}$$

En particular, $\widetilde{T}$ *es inyectivo y tiene rango denso. Asumamos el resultado válido para* $\widetilde{T}$: *Si* $\operatorname{ran}(\widetilde{T})$ *fuere cerrado también lo será* $\operatorname{ran}(T)$ *por (182) y*

$\operatorname{ran}(T^*)$ *por (183). Asímismo, como* $\operatorname{ran}(\widetilde{T})$ *es* w^**-cerrado,* Φ *es isomorfismo y* $\Phi \in (w^*, w^*)$ *por (183) vemos que* $\operatorname{ran}(T^*)$ *ha de ser* w^**-cerrado. En definitiva, podemos remitirnos al caso en que* T *es un monomorfismo con rango denso. Bajo estas hipótesis obramos a continuación:*

($a \Rightarrow b$) Si $\operatorname{ran}(T)$ es cerrado y denso T es suryectiva. Si además es inyectiva por el teorema de la función abierta T es inversible. Luego T^* es inversible y sigue (b).

($b \Rightarrow a$) Como $\overline{\operatorname{ran}(T^*)}^{w^*} = \ker(T)^o$, suponemos que $\operatorname{ran}(T^*)$ es cerrado y que T es inyectiva, T^* es suryectiva. Como $\ker(T^*) = \operatorname{ran}(T)^o$, T^* resulta inyectiva pues $\operatorname{ran}(T)$ es denso. Por el teorema de la función abierta T^* es inversible. Existe entonces $c > 0$ tal que $[X^*]_c \subseteq T^*([Y^*]_1)$. Si $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| &= \sup_{y^* \in [Y^*]_1} |y^*(T(x)))| \\
&= \sup_{y^* \in [Y^*]_1} |T^*(y^*)(x))| \\
&\geq \sup_{x^* \in [X^*]_c} |x^*(x))| \\
&= c\|x\|.
\end{aligned}$$

Así T es acotada inferiormente y tiene rango denso, o sea es inversible. Ahora (a) es inmediato.

($b \Rightarrow c$) Es inmediato.

($c \Rightarrow b$) Por el teorema de Krein-Šmulian bastará ver que $\operatorname{ran}(T^*) \cap [X^*]_r$ es w^*-cerrado para cada $r > 0$. Sea $x^* \in X^*$ tal que $x^* = w^*\text{-lím}_{n\to\infty} T^*(y_n^*)$ para cierta sucesión $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ de Y^*, con $\{T^*(y_n^*)\}_{n=1}^\infty$ acotada en X^*. Como T tiene rango denso T^* es inyectivo y $T^* \mid^{\operatorname{ran}(T^*)}$ deviene inversible, en particular, acotado inferiormente. Luego $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ será acotada en Y^* y, considerando eventualmente alguna subsucesión, por el teorema de Alaoglu existe $y_0^* \in Y^*$ tal que $y_0^* = w^*\text{-lím}_{n\to\infty} y_n^*$ y enseguida vemos que $x^* = T^*(y_0^*)$.

13.14. Teorema de Mazur

Teorema 13.61 *(cf. [97]) Sea* X *un espacio normado. Si* $C \subseteq X$ *es convexo, entonces* $\overline{C} = \overline{C}^{\sigma(X,X^*)}$.

Demostración 13.62 *Como la topología de la norma es más fina que la topología débil,* $\overline{C} \subseteq \overline{C}^{\sigma(X,X^*)}$. *Si* $x \in X - \overline{C}$ *por el Corolario 13.11 existen* $\Lambda \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $\varepsilon > 0$ *tales que* $\operatorname{Re}\Lambda(x) < \alpha < \alpha + \varepsilon < \operatorname{Re}\Lambda(y)$ *para todo* $y \in \overline{C}$. *El conjunto* $M = \{z \in X : |\Lambda(x - z)| < \varepsilon\}$ *es un* $\sigma(X, X^*)$*-entorno de* x. *Pero si* $y \in C$ *tenemos*

$$|\Lambda(y - x)| \geq \operatorname{Re}(y - x) > \varepsilon,$$

i.e. $M \cap C = \varnothing$ *y* $x \notin \overline{C}^{\sigma(X,X^*)}$.

13.15. Espectros. Teorema de Rickart

Si $\mathcal{U}$ es un álgebra y $a \in \mathcal{U}$ decimos que a es *cuasi-regular a izquierda* (resp. *a derecha*) si existe $b \in \mathcal{U}$ tal que $b \circ a = 0$ (resp. $a \circ b = 0$), donde $\circ$ denota el *producto de Kaplansky* $x \circ y = x + y - xy$ para $x, y \in \mathcal{U}$. El producto $\circ$ es asociativo y admíte a cero como elemento neutro. Un elemento se dirá *cuasi-regular* o perteneciente a $\mathcal{QR}(\mathcal{U})$ si lo es tanto a derecha como a izquierda. Dado $a \in \mathcal{QR}(\mathcal{U})$ es fácil ver que existe a° único tal que $a^\circ \circ a = a \circ a^\circ = 0$, y a tal a° se lo llama *elemento cuasi-inverso de* a. Indicamos $\mathcal{QS}(\mathcal{U})$ a la clase de *elementos cuasi-singulares* de $\mathcal{U}$, constituída los elementos no cuasi-regulares de $\mathcal{U}$. Éstos conceptos están motivados para cubrir situaciones en las que el álgebra $\mathcal{U}$ no es unitaria, en cuyo caso se considera la correspondiente unitización. Así, si $\mathcal{U}$ es álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (en general $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) hacemos $\mathcal{U}^\# = \mathcal{U} \oplus \mathbb{K}$ munida de la estructura algebraica natural en la cual

$$\begin{aligned}(a, k) + (b, h) &\triangleq (a + b, k + h)\\ k(a, h) &\triangleq (ka, kh)\\ (a, k)(b, h) &\triangleq (ab + kb + ha, kh)\end{aligned}$$

para $a, b \in \mathcal{U}$ y $k, h \in \mathbb{K}$. En particular, $\mathcal{U}^\#$ resulta álgebra unitaria con unidad $e^\# \triangleq (0, 1)$. Además, si $(\mathcal{U}, \|\|)$ es álgebra normada también lo es $\mathcal{U}^\#$ haciendo $\|(a, k)\| \triangleq \|a\| + |k|$. Tenemos

$$\mathbb{U}\left(\mathcal{U}^\#\right) = \{(a, k) : k \neq 0 \text{ y } -a/k \in \mathcal{QR}(\mathcal{U})\}$$

y si $\mathcal{U}$ no es álgebra unitaria dado $a \in \mathcal{U}$ es natural definir $\sigma(a) \triangleq \sigma((a, 0))$, de modo que

$$\sigma(a) = \{k \in \mathbb{K} - \{0_\mathbb{K}\} : a/k \in \mathcal{QS}(\mathcal{U})\} \cup \{0_\mathbb{K}\}. \tag{184}$$

La definición (184) es general, válida aún si el álgebra es unitaria. Precisamente, si $\mathcal{U}$ es unitaria, $a \in \mathcal{U}$ y $k \neq 0_\mathbb{K}$ tenemos que $k \in \sigma(a)$ si y solo si $a/k \in \mathcal{QS}(\mathcal{U})$.

Proposición 13.63 *Sea* $\mathcal{U}$ *un álgebra normada. Entonces* $\mathcal{QR}(\mathcal{U})$ *es abierto y la operación* $\mathcal{QR}(\mathcal{U}) \to \mathcal{QR}(\mathcal{U})$, $a \to a^0$ *es un homeomorfismo.*

Demostración 13.64 *La aplicación* $j : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^\#$ *es un homomorfismo continuo, más aún, isométrica. Además*

$$\left(e^\# - j(a)\right)\left(e^\# - j(b)\right) = e^\# - j(a \circ b)$$

para $a, b \in \mathcal{U}$. *En consecuencia, si* $J(a) = e^\# - j(a)$ *para* $a \in \mathcal{U}$ *tenemos* $J^{-1}\left(\mathbb{U}\left(\mathcal{U}^\#\right)\right) = \mathcal{QR}(\mathcal{U})$ *y como* J *es aplicación continua* $\mathcal{QR}(\mathcal{U})$ *es abierto. Fijado ahora* $a_0 \in \mathcal{U}$ *escribamos* $(a_0 + h)^\circ = a_0^\circ + k$. *Si* $x \in \mathcal{U}$ *tenemos* $(1 - a_0^\circ)(x - a_0) = a_0^\circ \circ x$. *Haciendo* $x = a_0 + h$ *resulta*

$$\begin{aligned} a_0^\circ &= ((1 - a_0^\circ) h) \circ (a_0^\circ + k) \\ &= h - a_0^\circ h + a_0^\circ + k - (h a_0^\circ + hk - a_0^\circ h a_0^\circ - a_0^\circ hk) . \end{aligned}$$

Luego

$$k - hk + a_0^\circ hk = -h + a_0^\circ h + h a_0^\circ - a_0^\circ h a_0^\circ. \tag{185}$$

De (185) estimamos

$$\begin{aligned} \|k\| - \|h\| \|k\| - \|a_0^\circ\| \|h\| \|k\| &\le \|k\| - (\|-hk\| + \|a_0^\circ hk\|) \\ &\le \|k\| - \|a_0^\circ hk - hk\| \\ &\le \|k - hk + a_0^\circ hk\| \\ &\le (1 + \|a_0^\circ\|)^2 \|h\| . \end{aligned} \tag{186}$$

Finalmente, de (186) resulta

$$\|(a_0 + h)^\circ - a_0^\circ\| \le \frac{(1 + \|a_0^\circ\|)^2 \|h\|}{1 - (1 + \|a_0^\circ\|) \|h\|},$$

i.e. $\lim_{h \to 0} (a_0 + h)^\circ = a_0^\circ$.

Teorema 13.65 *(cf. [112], Th. 1.6.3) Si* $\mathcal{U}$ *es un álgebra normada y* $x \in \mathcal{U}$ *existe* $\alpha \in \sigma(x)$ *tal que* $r_{sp}(x) \le |\alpha|$.

Demostración 13.66 *Toda álgebra normada real puede ser inmersa isométricamente en un álgebra compleja (v. [112], Ch. I, §3), de modo que asumiremos que el álgebra dada es compleja. Si* $0 \notin \sigma(x)$ *entonces* $\mathcal{U}$ *es unitaria,* x *es inversible y* $1 \le r_{sp}(x)\, r_{sp}(x^{-1})$. *Por lo tanto, si* $r_{sp}(x) = 0$ *entonces* $0 \in \sigma(x)$ *y la afirmación resulta cierta. Supongamos que* $r_{sp}(x) > |\alpha|$ *para todo* $\alpha \in \sigma(x)$. *La función* $f(\alpha) = (x/\alpha)^\circ$ *resulta continua si* $|\alpha| \ge r_{sp}(x)$ *y nula en el infinito. Luego* f *es uniformemente continua en el semiplano*

$|\alpha| \geq r_{sp}(x)$. Fijado $n \in \mathbb{N}$ mayor que uno sean $z_1, ..., z_n$ las raíces n-ésimas de la unidad. Para $w \in \mathbb{C}$ indicaremos $w_j = wz_j$, $1 \leq j \leq n$. Como $z^n - 1 = \prod_{j=1}^{n} (z - \overline{z_j})$ escribimos

$$1 - z^{-n} = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{zz_j}\right). \tag{187}$$

Reemplazando z por ζ/ξ en (187) obtenemos

$$1 - \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^n = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{\xi}{\zeta_j}\right) \tag{188}$$

y haciendo $\xi = x$ en (188) es

$$1 - \left(\frac{x}{\zeta}\right)^n = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\zeta_j}\right).$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{x}{\zeta}\right)^n = \left(\frac{x}{\zeta_1}\right) \circ ... \circ \left(\frac{x}{\zeta_n}\right). \tag{189}$$

Por (189) podemos escribir $(x/\zeta)^n = (x/\zeta_j) \circ R_j$, donde

$$R_j = -\sum_{k=1}^{n-1} \zeta_j^{-k} x^k, \ 1 \leq j \leq n.$$

Si $|\zeta| \geq r_{sp}(x)$ cada x/ζ_j y cada R_j resultará cuasi-regular e inferimos que $f(\zeta_j) = R_j \circ (\zeta^{-n} x^n)^\circ$. Ahora

$$\sum_{j=1}^{n} R_j = -\sum_{k=1}^{n-1} x^k \sum_{j=1}^{n} \zeta_j^{-k} = -\sum_{k=1}^{n-1} \zeta^k x^k \sum_{j=1}^{n} z_j^k. \tag{190}$$

Pero si $1 \leq k < n$ la aplicación $z \rightarrow z^k$ produce una biyección en las raíces n-ésimas de la unidad y la suma de éstas es nula, de donde por (190) es

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j) = \left(\zeta^{-n} x^n\right)^\circ. \tag{191}$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $\|f(z) - f(w)\| < \varepsilon$ si $|z - w| < \delta$ en el semiplano $|\alpha| \geq r_{sp}(x)$. Si $\rho = r_{sp}(x)$ y $\psi = \rho + \delta/2$ es $\|f(\rho_j) - f(\psi_j)\| < \varepsilon$ para $1 \leq j \leq n$ y por (191)

$$\left\| \left(\rho^{-n} x^n\right)^\circ - \left(\psi^{-n} x^n\right)^\circ \right\| < \varepsilon.$$

Pero $\lim_{n\to\infty}(\psi^{-n}x^n)=0$, *ya que en caso contrario existirá* $\kappa>0$ *y una subsucesión infinita* $\{n_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\|\psi^{-n_l}x^{n_l}\|\geq\kappa$ *para todo* l*. En consecuencia* $\|x^{n_l}\|^{1/n_l}\geq\kappa^{1/n_l}\psi$ *para todo* l*, i.e.* $\rho\geq\psi$ *lo que es falso. Por la Prop. 13.63 es* $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left\|(\rho^{-n}x^n)^\circ\right\|=0$*, o bien* $\lim_{n\to\infty}\|\rho^{-n}x^n\|=0$*. Esto es imposible ya que* $\|\rho^{-n}x^n\|\geq 1$ *para todo* n*.*

13.16. Teorema de Segal

Teorema 13.67 [72]*(cf. [119]) Si* G *es grupo localmente compacto separado el álgebra* $L^1(G)$ *es semisimple.*

Demostración 13.68 *Dados* $f\in L^1(G)$ *y* $g\in C_{00}(G)$ *por la desigualdad integral de Minkowsky y la invariancia de la medida de Haar* $f*g\in L^2(G)$ *y* $\|f*g\|_2\leq\|f\|_1\|g\|_2$*. Por el teorema de Banach-Hahn el operador lineal*

$$\widetilde{M_f}:C_{00}(G)\to L^2(G)\,,\ \widetilde{M_f}(g)=f*g,$$

admite una extensión a un operador lineal $M_f:L^2(G)\to L^2(G)$ *de modo que* $\|M_f(g)\|_2\leq\|f\|_1\|g\|_2$ *para todo* $g\in L^2(G)$*. En consecuencia queda definido* $M:L^1(G)\to\mathcal{B}(L^2(G))$ *operador lineal tal que* $M(f)=M_f$ *y* $\|M(f)\|\leq\|f\|_1$ *para cada* $f\in L^1(G)$*. Notemos que* $L^1(G)$ *es una* $*$*-álgebra de Banach si para* $f\in L^1(G)$ *escribimos* $f^*(x)=\overline{f(x^{-1})\Delta_G(x^{-1})}$ *para* $x\in G$*. Es fácil ver que* M *deviene en un homomorfismo. Más aún, para* $f\in L^1(G)$*,* $g,h\in C_{00}(G)$ *por el teorema de Fubini y por propiedades de la medida de Haar tenemos*

$$\begin{aligned}\langle M_f(g),h\rangle&=\langle f*g,h\rangle\\&=\int_G\left[\int_G f(x)g(x^{-1}y)dx\right]\overline{h(y)}dy\\&=\int_G f(x)\left[\int_G g\left(x^{-1}y\right)\overline{h(y)}dy\right]dx\\&=\int_G f(x)\left[\int_G g(z)\,\overline{h(xz)}dz\right]dx\\&=\int_G g(z)\overline{\left[\int_G\overline{f(x)}h(xz)dx\right]}dz\\&=\int_G g(z)\overline{\left[\int_G f^*(x)h\left(x^{-1}z\right)dx\right]}dz\\&=\langle g,M_{f^*}(h)\rangle\,.\end{aligned}$$

[72]*Palabras clave: Radical de Jacobson. Integral y medida de Haar.* A^*-álgebras.

Como M_f es continuo y $C_{00}(G)$ es denso en $L^2(G)$ podemos inferir que M es un $*$-homomorfismo. Consideremos la clase $\mathcal{U}$ de entornos abiertos simétricos relativamente compactos de $e \in G$. Dado $U \in \mathcal{U}$ por el lema de Urysohn existe $u_U \in C_{00}(G)^+$ tal que $\operatorname{sop}(u_U) \subseteq U$ y $\|u_U\|_1 = 1$. Si $f \in L^1(G)$ y $U \in \mathcal{U}$ tenemos

$$\left\|f * (u_U)^{\vee} - f\right\|_1 = \int_G \left| \int_G f(x)\,(u_U)^{\vee}\left(x^{-1}y\right) dx - f(y) \right| dy. \tag{192}$$

Además por la invariancia de la medida de Haar

$$\int_G (u_U)^{\vee}\left(x^{-1}y\right) dx = \int_G u_U\left(y^{-1}x\right) dx = \int_G u_U(x)\,dx = 1$$

cualquiera sea $y \in G$. Entonces en (192) tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|f * (u_U)^{\vee} - f\right\|_1 &= \int_G \left| \int_G (f(x) - f(y))\,(u_U)^{\vee}\left(x^{-1}y\right) dx \right| dy \qquad (193)\\
&= \int_G \left| \int_G (f(x^{-1}) - f(y))\,(u_U)^{\vee}(xy)\,\Delta_G\left(x^{-1}\right) dx \right| dy\\
&= \int_G \left| \int_G (f(yz^{-1}) - f(y))\,(u_U)^{\vee}(z)\,\Delta_G\left(z^{-1}\right) dz \right| dy\\
&\leq \int_U u_U\left(z^{-1}\right) \Delta_G\left(z^{-1}\right) \int_G \left|f(yz^{-1}) - f(y)\right| dy dz.
\end{aligned}$$

Como en la prueba del Teorema 11.6 de (193) sigue que $\left\{(u_U)^{\vee}\right\}_{U\in\mathcal{U}}$ es aproximación acotada de la unidad a derecha de $L^1(G)$. Ahora, si $M(f) = 0$ será $f * (u_U)^{\vee} = 0_{L^2(G)}$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Luego $f * (u_U)^{\vee} = 0$ a.e. para todo $U \in \mathcal{U}$ y por lo tanto $f = 0_{L^1(G)}$, i.e. M es un monomorfismo. Sea ahora $|f| \triangleq \|M(f)\|$ para $f \in L^1(G)$. Vemos que $(L^1(G), |\circ|)$ es un álgebra normada, $|f * g| \leq |f|\,|g|$ y $|f^* * f| = |f|^2$ para todo $f, g \in L^1(G)$, i.e. $L^1(G)$ es un A^*-álgebra. Dado $f \in J(L^1(G))$, como $f^* * f \in J(L^1(G))$ deberá ser $r_{sp}(f^* * f) = 0$ (V. [18], Prop. 1, p. 126). Por el Teorema 13.65 es $r_{sp}(f^* * f) \geq |f^* * f|^2$ y podemos concluir que $f = 0$.

13.17. Teorema de Von Neumann

Teorema 13.69 *(cf. [133]) Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y M una $*$-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si P es la proyección de $\mathcal{H}$ sobre el subespacio cerrado generado por elementos de la forma $T(x)$ con $T \in M$ y $x \in \mathcal{H}$ entonces*

$$\overline{M}^{wot} = L = M^{cc}P,$$

donde $L = \{T \in M^{cc} : TP = PT = T\}$.

Demostración 13.70 *Notemos que* $P \in M^c \cap M^{cc}$. *En efecto, si* $T \in M$ *claramente* $PT = T$. *Además* $T = TP + T(Id_{\mathcal{H}} - P)$ *y si* $y \in \operatorname{ran}(P)^{\perp}$ *tenemos*

$$\|T(y)\|^2 = \langle T^*(T(y)), y\rangle = 0$$

pues $T^* \in M$, *de modo que* $TP = T$ *y* $P \in M^c$. *Si además* $S \in M^c$ *y* $x \in \mathcal{H}$ *tenemos*

$$\begin{aligned}(PS)(T(x)) &= P((ST)(x)) \\ &= P((TS)(x)) \\ &= (TS)(x) \\ &= (ST)(x) \\ &= S(P(T(x))) \\ &= (SP)(T(x)).\end{aligned}$$

Además hay una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de elementos de la forma* $s_n = \sum_{j=1}^{j_n} T_{j,n}(x_{j,n})$, *donde* $n, j_n \in \mathbb{N}$, $T_{j,n} \in M$ *y* $x_{j,n} \in \mathcal{H}$ *de modo que* $(PS)(y) = \lim_{n\to\infty} s_n$. *Como* $S^* \in M^c$ *obtenemos*

$$\begin{aligned}\|(PS)(y)\|^2 &= \langle (S^*PS)(y), y\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle S^*(s_n), y\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{j_n} T_{j,n}(S^*(x_{j,n})), y \right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $P(y) = 0$ *es además* $(SP)(y) = 0$ *y* $P \in M^{cc}$. *Por otra parte*

$$\operatorname{ran}(P)^{\perp} = \{w \in \mathcal{H} : X(w) = 0 \text{ si } X \in M\}. \tag{194}$$

Ciertamente, si $w \in \operatorname{ran}(P)^{\perp}$ *dados* $X \in M$ *y* $t \in \mathcal{H}$ *se tiene*

$$0 = \langle X^*(t), w\rangle = \langle t, X(w)\rangle,$$

y como t *es arbitrario* $X(w) = 0$. *Asimismo, si* $w \in \mathcal{H}$ *es tal que* $X(w) = 0$ *cuando* $X \in M$ *sea* $s \in \operatorname{ran}(P)$. *Con la notación anterior, con* $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ *tenemos*

$$\begin{aligned}\langle s, w\rangle &= \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{j_n} T_{j,n}(x_{j,n}), w \right\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{j_n} \langle x_{j,n}, T_{j,n}^*(w)\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Sigue entonces que $M \subseteq L$. Además es fácil ver que L es wot-cerrado, por lo que $\overline{M}^{sot} \subseteq L$ dado que M es convexo. La identidad $L = M^{cc}P$ se deduce ahora sencillamente. Finalmente, sea $U \in L$ y fijemos un número finito de vectores $z_1, ..., z_m \in \mathcal{H}$. Veremos que $\mathcal{S}(U, z_1, ..., z_m) \cap M \neq \varnothing$, donde

$$\mathcal{S}(U, z_1, ..., z_m) = \left\{ X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \max_{1 \le j \le m} \|(X - U)(z_j)\| < 1 \right\}.$$

Sea $\mathcal{W} = \overline{\langle X^{\oplus m}(z) \rangle_{X \in M}}$ en $\mathcal{H}^{\oplus m}$, con $z = (z_1, , , .z_m)$, y sea $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus m})$ el proyector de $\mathcal{H}^{\oplus m}$ sobre $\mathcal{W}$. Entonces Q determina una matriz única de operadores $[Q_{i,,j}]_{1 \le i,j \le m} \in M_m(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que

$$Q_i(t) = \sum_{j=1}^{m} Q_{i,,j}(t_j) \quad si \;\; t = (t_1, ..., t_m)$$

en $\mathcal{H}^{\oplus m}$ y $1 \le i \le m$. Dados $t \in \mathcal{H}^{\oplus m}$, $X \in M$ hay únicos $u \in \mathcal{W}$, $v \in \mathcal{W}^{\perp}$ tales que $t = u + v$. En particular

$$\left\| \left(QX^{\oplus m} \right)(v) \right\|^2 = \left\langle \left(X^{\oplus m} \right)^* QX^{\oplus m}(v), v \right\rangle = \left\langle (X^*)^{\oplus m} QX^{\oplus m}(v), v \right\rangle = 0$$

pues $(X^*)^{\oplus m}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$. Por lo tanto

$$\left(QX^{\oplus m} \right)(t) = Q\left(X^{\oplus m}(u) + X^{\oplus m}(v) \right) = X^{\oplus m}(u) = \left(X^{\oplus m} Q \right)(t)$$

y $Q \smile X^{\oplus m}$. Así

$$\left(QX^{\oplus m} \right)_i(t) = \sum_{j=1}^{m} Q_{i,,j}(X(t_j)) = X(\sum_{j=1}^{m} Q_{i,,j}(t_j)) = \left(X^{\oplus m} Q \right)(t)$$

i.e. $Q_{i,j} \smile X$ y $\{Q_{i,j}\}_{1 \le i,j \le m} \subseteq M^c$. Como además $(QX^{\oplus m})(z) = X^{\oplus m}(z)$ si $1 \le i \le m$ resulta

$$X(z_i) = \sum_{j=1}^{m} Q_{i,,j}(X(z_j)) = X(\sum_{j=1}^{m} Q_{i,,j}(z_j)),$$

i.e. $X\left(z_i - \sum_{j=1}^{m} Q_{i,,j}(z_j) \right) = 0$. Siendo $X \in M$ arbitrario, por (194) resulta

$$z_i - \sum_{j=1}^{m} Q_{i,,j}(z_j) \in \operatorname{ran}(P)^{\perp} \;\; si \; 1 \le i \le m.$$

Pero $\operatorname{ran}(P)^{\perp} = \operatorname{ran}(Id_{\mathcal{H}} - P)$, $U = UP$ *y* $U \in M^{cc}$ *de modo que*

$$U(z_i) = \sum_{j=1}^{m} (UQ_{i,,j})(z_j) = \sum_{j=1}^{m} (Q_{i,,j}U)(z_j) \;\; si\; 1 \leq i \leq m.$$

Así $U^{\oplus m}(z) = Q(U^{\oplus m}(z))$ *y* $U^{\oplus m}(z) \in \mathcal{W}$, *de modo que existe* $X_0 \in M$ *tal que* $\left\|U^{\oplus m}(z) - X_0^{\oplus m}(z)\right\| < 1$. *Luego*

$$\max_{1 \leq i \leq m} \|(U - X_0)(z_i)\| \leq \left\|U^{\oplus m}(z) - X_0^{\oplus m}(z)\right\| < 1$$

y $X_0 \in \mathcal{S}(U, z_1, ..., z_m) \cap M$.

Referencias

[1] M. J. Aleandro & C. C. Peña: *On dual valued operators on Banach algebras.* New York Journal of Maths., Vol. 18, 657-665, (2012). Zbl 06098867.

[2] M. Altman: *Contracteurs dans les algèbres de Banach.* C. R. Acad. Sci. Paris. Sèr. A-B, **274**, 399-400, (1972). MR 45#2473.

[3] R. Arens: *Operations induced in function classes.* Monatsh Math., 55, 1-19, (1951). MR 13, 372b.

[4] R. Arens: *The adjoint of a bilinear operation.* Proc. Amer. Math. Soc.2, 839-848, (1951), MR 13, 659f.

[5] R. Arens & J. L. Kelley: *Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 62, no. 3, 499-508, (1947).

[6] Z. Argün & K. Rowlands: *On the Arens semiregularity of weighted group algebras.* Glasgow Math. J., **36**, 269-275, (1994).

[7] N. Arikan: *A simple condition ensuring the Arens regularity of bilinear mappings.* Proc. AMS, Vol. 84, no. 4, 525-532, (1982). MR 83i46053.

[8] K. H. Azer: *The Arens regularity and weak topological center of module actions.* arXiv:1010.5414 [math.FA], Cornell University Library, 1-21, (2010).

[9] K. H. Azar & A. Riazi: *Arens regularity of bilinear forms and unital Banach module spaces.* arXiv:1003.3379 [math.FA], Cornell University Library, 1-13, (2010).

[10] K. H. Azer: *Arens product and topological center of some Banach spaces.* Int. J. of Math. Analysis, vol. 1, no. 21, 1011-1018, (2007). Zbl 1154.46314.

[11] K. H. Azer: *Arens regularity of tensor products and weak amenability of Banach algebras.* arXiv:1011.0762 [math.FA]. Cornell University Library, 1-12, (2010).

[12] J. W. Baker & A. Rejali: *On the Arens regularity of weighted convolution algebras.* J. London Math. Soc., (2) **40**, 535-546, (1989). MR 91i 46054.

[13] S. Banach: *Sur les funtionelles lineaires,* I, II. Studia Math. 1, 211–216, 223–239, (1929).

[14] S. Banach: *Théorie des opérations linéaires.* Monografje Matematyczne, Vol. 1, Warsawa, (1932).

[15] A. L. Barrenechea & C. C. Peña: *On bounded dual-valued derivations on certain Banach algebras.* Publications de l'Institut Mathèmatique. Nouvelle sèrie. Tome 86(100), 107-114, (2009). Zbl pre05656373.

[16] A. L. Barrenechea & C. C. Peña: *On the structure of derivations on certain non-amenable nuclear Banach algebras.* New York J. of Maths., 15, 199-209, (2009). Zbl pre05561324.

[17] S. J. Bhatt & H. V. Dedania: *A Beurling algebra is semisimple: an elementary proof.* Bull. Australian Math. Soc., Vol. 66, 91-93, (2002). Zbl 1003.43002.

[18] F. F. Bonsall & J. Duncan: *Complete normed algebras.* Springer-Verlag. N. Y., Heidelberg, Berlín, (1973). MR 56 # 1063.

[19] Civin, P. & Yood, B.: *The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra.* Pacific J. Mathematics, **11**, 847-870, (1961). MR 26#622.

[20] P. J. Cohen: *Factorization in group algebras.* Duke Math. J. Math., **26**, 199-205, (1959). MR 21#3729.

[21] J. B. Conway: *A course in functional analysis.* 2nd. Ed., Springer-Verlag. N.Y.. (1990). MR 86h: 46001.

[22] I. G. Craw & N. J. Young: *Regularity of multiplication in weighted group algebras and semigroup algebras.* Quarterly J. Math., Oxford, (2) 25, 351-358, (1974). MR51#1282.

[23] F. Cunningham, Jr.: *L-structure in L-spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 95, no. 2, 274-299, (1960). Zbl. 0094.30402.

[24] H. G. Dales: *Banach algebras and automatic continuity.* Oxford Sc. Publ.. London Math. Soc. Monographs, **24**. USA, (2000). ISBN: 0-19-850013-0.

[25] H. G. Dales & H. V. Dedania: *Weighted convolution algebras on subsemigroups of the real line.* Dissertationes Mathematicae, **459**. Institute of Maths., Polish Academy of Sciences. Varsovia, (2009). Zbl 1177.46037.

[26] H. G. Dales, F. Ghahramani & N. GrønbÆk: *Derivations into iterated duals of Banach algebras.* Studia Mathematica 128 (1), 19-54, (1998). MR 99g:46064.

[27] H. G. Dales & A. T. -M. Lau: *The second duals of Beurling algebras.* Memoirs of the AMS, (2005). ISBN-10: 0-8218-3774-5.

[28] H. G. Dales, A. T. -M. Lau & D. Strauss: *Second duals of measure algebras.* Dissertationes Mathematicae. Rozprawi Matematyczne, **481**, 1-121, (2012). Zbl 1148.43002.

[29] J. W. Davenport: *Results related to multipliers and double centralizers of B^*-algebras and certain A^*-algebras.* Texas Teach University Libraries. Electronic Theses and Dissertations, 1-64, (1974).

[30] K. R. Davidson: *C^*-algebras by example.* Fields Institute Monographs, AMS, (1996). ISBN: 0-8218-0599-1.

[31] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson & A. Pełczyński: *Factoring weakly compact operators.* J. Functional Analysis, **17**, 311-327, (1974). MR 0355536.

[32] M. Daws: *Arens regularity of the algebra of operators on a Banach space.* Bulletin of the London Math. Soc., Vol. 36, no. 4, 493-503, (2004). Zbl 1066.47073.

[33] M. Daws: *Banach algebras of operators.* PhD. Thesis, University of Leeds, (2004).

[34] M. Daws: *Arens regularity of algebras arising from tensor-norms.* New York Journal of Maths., **13**, 215-270, (2007). Zbl 1130.47054.

[35] M. Daws: *Multipliers, self-induced and dual Banach algebras.* Dissertationes Math., **470, 1-62,** (2010). Zbl 1214.43004.

[36] M. M. Day: *Amenable semigroups.* Ill. J. of Maths., **1**, 509-544, (1957). MR 19-1067.

[37] Dixon, P. G.: *Approximate identities in Banach algebras.* Proc. London Math. Soc., (3) 26, 485-496, (1973). MR 47#9286.

[38] J. Duncan & S. A. R. Hosseiniun: *The second dual of a Banach algebra.* Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A, **84,** 309-325, (1979). MR81f:46057.

[39] N. Dunford & J. T. Schwartz: *Linear operators. Part I: General Theory.* Pure and Appl. Maths., Vol. VII. Interscience Publ. Inc., N. Y., Londres, Sydney, (1957). ISBN: 0 470 22605 6.

[40] H. A. M. Dzinotyiweyi: *Weakly almost periodic functions and the irregularity of multiplication in semigroup algebras.* Math. Scandinavica, **46**, 157-172, (1980). Zbl. 045622004.

[41] H. A. M. Dzinotyiweyi: *Weighted function algebras on groups and semigroups.* Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 33, 307-318, (1986). Zbl. 0571.43006.

[42] W. F. Eberlein: *Weak compactness in Banach spaces.* Pro. Nat. Acad. Sci., USA, **33**, 51-53, (1947). MR 0021239 (9,42a).

[43] M. Filali & P. Salmi: *Topological centers of weighted convolution algebras.* Bulletin Canadian Math. Soc. (2009). DOI: 10.4153/CMB-2010-016-x.

[44] V. Gantmacher: *Über schwache totalstetige Operatoren.* Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 7(49):2, 301–308, (1940). JFM 66.0548.02.

[45] I. M. Gel´fand & I. M. Naĭmark: *On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space.* (Russian) Mat. Sb. N. S., **12**, (54) 197-213, (1943).

[46] I. M. Gel´fand & I. M. Naĭmark: *Rings with involutions and their representations.* (Russian) Izvest. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **12**, 445-480, (1948).

[47] F. Ghahramani: *Weighted group algebra as an ideal in its second dual space.* Proc. of the AMSVol. 90, no. 1, 71-76, (1984). MR 85i:43007.

[48] F. Ghahramani: *Compact elements of weighted group algebras.* Pacific J. of Maths., Vol. 113, no. 1, 77-84, (1984). Zbl. 0547.43003.

[49] F. Ghahramani & J. Laali: *Amenability and topological centers of the second duals of Banach algebras.* Bull. Australian Math. Soc., 65, 191-197, (2002).

[50] I. Glicksberg: *Uniform boundedness for groups.* Canadian J. Math., 14, 269-276, (1962). MR21:7405. Zbl 0088.02903.

[51] I. Gliksberg: *Weak compactness and separate continuity.* Pacific J. Math., 11, 205-214, (1961). MR22:11275.

[52] H. H. Goldstine: *Weakly complete Banach spaces.* Duke Math. J., **4**, 125-131, (1938). MR1546039.

[53] F. Gordeau: *Amenability and the second dual of a Banach algebra.* Studia Mathematica, 125 (1), 75-81, (1997). MR 98g:46065.

[54] M. E. Gordji: *Arens regularity of some bilinear maps.* Proyecciones. Revista de Matemática. Vol. 28, no. 1, 21-26, (2009). Zbl 1186.46051.

[55] M. E. Gordji & M. Filali: *Arens regularity of module actions.* Studia Mathematica, 181, 237-254, (2007).

[56] G. Godefroy & B. Iochum: *Arens-regularity of Banach algebras and the geometry of Banach spaces.* J. of Functional Analysis, **80**, 47-59, (1988). Zbl 0675.46017.

[57] C. C. Graham: *Arens regularity and weak sequential completeness for quotients of the Fourier algebra.* Illinois J. of Maths., Vol. 44, no. 4, 712-740, (2000). Zbl 0963.43001.

[58] C. C. Graham: *A b.a.i. proof of the non-Arens regularity of* $L^1(G)$. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 133, no. 1, 163-165, (2004).

[59] E. E. Granirer: *Amenability and semisimplicity for second duals of quotients of the Fourier algebra.* J. Austral. Math. Soc., Serie A, **63**, 289-296, (1997). Zbl 0914.46041.

[60] M. Grosser: $L^1(G)$ *as an ideal in its second dual space.* Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 73, no. 3, 363-364, (1979). MR 82i:43005.

[61] M. Grosser: *Bidualräume und Vervollständigungen von Banachmoduln. Lect. Notes in Maths.,* **717**, Springer-Verlag, Berlín, (1979). MR 82i: 46075.

[62] M. Grosser: *Arens semiregular Banach algebras.* Monatsh. Math., **98**, no. 1, 41-52, (1984). MR 86d:46042.

[63] M. Grosser: *Arens semi-regularity of the algebra of compact operators.* Ill. J. of Math, Vol. 31, no. 4, 544-572, (1987). MR909783.

[64] A. Grothendieck: *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels géneráux.* Amer. J. Maths., 74, 168-186, (1952). MR 13, 857e.

[65] A. Grothendieck: *Résumé des resultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires.* Ann. Inst. Fourier. Grenoble, **4**, 73-112, (1954). MR15-879; 1140; MR16-1336.

[66] S. L. Gulick: *Commutativity and ideals in the biduals of topological algebras.* Pacific J. of Maths., Vol. 18, no. 1, (1966).MR 33#3118.

[67] H. Hahn: *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen.* Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 157, 214–229, (1926). JFM 53.0369.03.

[68] P. R. Halmos: *Measure theory.* 9th Printing. D. Van Nostrand Co., USA, (1964). ISBN-10: 0387900888.

[69] J. Hennefeld: *A note on the Arens products.* Pacific J. of Math., Vol. 26, no. 1, 115-119, (1968). MR 37#6755.

[70] J. Hennefeld: *The Arens products and an embedding theorem.* Pacific J. of Maths., Vol. 29, no. 3, (1969). Zbl. 0182.16904.

[71] J. Hennefeld: *Finding a maximal subalgebra on which the two Arens products agree.* Pacific J. of Math., Vol. 59, no. 1, 93-98, (1975). Zbl 0328.46052.

[72] J. Hennefeld: *$L(X)$ as a subalgebra of $K(X)^{**}$.* Illinois J. of Mathematics, Volume 23, no. 4, 681-686, (1979).

[73] E. Hewitt & K. A. Ross: *Abstract harmonic analysis.* Vol. I: Structure of topological groups, integration theory, group representations. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 115. Acad. Press, Inc., Publishers, N. Y.. Springer-Verlag. Berlín, Göttingen, Heidelberg. (1963). MR 28#158.

[74] Hildebrandt, T. H.: *On bounded linear functional operations.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 36, 868-875, (1934).

[75] N. Işik, J. Pym & A. Ülger: *The second dual of a group algebra of a compact group.* J. London Math. Soc., (2) 35, 135-148, (1987).

[76] R. C. James: *Super-reflexive spaces with bases.* Pacific J. of Maths., Vol. 41, no. 2, 409-419, (1972). Zbl 0235.46031.

[77] B. E. Johnson: *Cohomology in Banach algebras.* Memoirs of the AMS, vol. 127, (1972). MR 51#11130.

[78] J. Johnson: *Remarks on Banach spaces of compact operators.* J. of Functional Analysis, **32**, 304-311, (1979).

[79] R. V. Kadison & J. R. Ringrose: *Fundamentals of the theory of operator algebras.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 15. AMS. Academic Press, (1997). ISBN: 0-8218-0820-6.

[80] S. Kakutani: *Concrete representation of abstract (M)-spaces. A characterization of the space of continuous functions.* Annals of Mathematics. Vol. 42, no. 4, 994-1024, (1941). Zbl 0060.26604.

[81] S. Kaplan: *The second dual of the space of continuous functions.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 86, 70-90, (1957).

[82] S. Kaplan: *The second dual of the space of continuous functions II.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 93, 329-350, (1959).

[83] S. Kaplan: *The second dual of the space of continuous functions III.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 101, 34-51, (1961).

[84] I. Kaplansky: *A theorem of rings of operators.* Pacific Journal, Vol. 1, no. 2, 227-232, (1951). MR 0050181.

[85] J. L. Kelley: *Topología general.* Editorial Universitaria de Buenos Aires. 2da Edición, (1975).

[86] M. Krein & V. Šmulian: *On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space.* Ann. of Math., **41**, 556-583, (1940). Zbl 0024.41305.

[87] J. Laaly & J. Pym: *Concepts of Arens regularity for general measure algebras.* Quarterly J. Math., Oxford (2), **47**, 187-198, (1996). Zbl 0860.43003.

[88] H. C. Lai: *Multipliers of a Banach algebra in the second conjugate algebra as an idealizer.* Tôhoku Math. Journal, 26, 431-452, (1974). MR.50 #10817.

[89] A. T. -M. Lau & R. J. Loy: *Weak amenability of Banach algebras on locally compact groups.* J. Functional Analysis, 145, 175-204, (1997).

[90] A. T. -M. Lau & A. Ülger: *Some geometric properties on the Fourier and Fourier-Stieltjes algebras of locally compact groups, Arens regularity and related problems.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 337, no. 1, 321-359, (1993). Zbl 0778.43003.

[91] A. T. -M. Lau & A. Ülger: *Topological centers of certain dual algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., **348**, 1191-1212, (1996). MR 96h:43003.

[92] B. R. Li: *Introduction to operator algebras.* World Scientific, Singapur, (1999). ISBN: 981-02-0941-X.

[93] V. Losert & H. Rindler: *Asymptotically central functions and invariant extensions of Dirac measure. Probability measures on groups, VII.* Lect. Notes in Maths., **1064**, 368-378. Springer, Berlín, New York, (1984). MR 86e:43007.

[94] S. Maghsoudi, R. Nasr-Isfahani & A. Rejali: *Strong Arens irregularity of Beurling algebras with a locally convex topology.* Archiv der Mathematik, 437-448, (2006). Zbl 1096.43003.

[95] B. D. Malviya & B. J. Tomiuk: *Multiplier operators in B^*-algebras.* Proc. of the AMS, Vol. 31, no. 2, 505-510, (1972).

[96] L. Maté: *The Arens products and multiplier operators.* Studia Math., Vol. 28, no. 3, 227-234, (1967).

[97] S. Mazur: *Sur les anneaux linéaires.* S. R. Acad. Sci.. Paris, **207**, 1025-1027, (1938). Zbl 0020.20101.

[98] M. Neufang: *On the topological center problem for weighted convolution algebras.* arXiv: 020108v1[math.FA], Cornell University Library, 1-6, (2002).

[99] M. Neufang: *A unified approach to the topological center problem for certain Banach algebras arising in abstract harmonic analysis.* Archiv der Mathematik, 82, 164-171, (2004).

[100] Nooreddiny, A. R. & Riazi, A.: *Invariance of Arens irregularity under extension.* Bull. of the Malaysian Math. Sc. Soc., (2) **36** (2), 393-399, (2013).

[101] T. W. Palmer: *The bidual of the compact operators.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 288, no. 2, 827-839, (1985). MR 86f:47027.

[102] T. W. Palmer: *Banach algebras and the general theory of *-algebras.* Vol. I*: Algebras and Banach algebras.* Cambridge University Press. Cambridge (1994). ISBN: 0-521-36637-2. MR 95c:46002.

[103] V. Pták: *An extension theorem for separately continuous functions and to functional analysis.* Commentationes Mathematicae Carolinae, 4, 3, 109-116, (1963). Zbl 0144.17001.

[104] V. Pták: *Un théorème de factorisation.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **275**, 1297-1299, (1972). Zbl 0252.46044.

[105] C. C. Peña: On extension and structure of generalized derivations. New Zealand Journal of Maths., Vol. 42, 83-90, (2012). Zbl 06121882

[106] J. S. Pym: *The convolution of functionals on spaces of bounded functions.* Proc. London Math. Soc., 3, 15, 84-104, (1965). MR 30#3367.

[107] J. Pym & A. Ülger: *On the Arens regularity of inductive limit algebras and related matters.* Quarterly J. Math., Oxford, (2) **40**, 101-109, (1989). Zbl 0682.46032.

[108] D. E. Ramirez: *The measure algebra as an operator algebra.* Canadian J. Math., **20**, 1391-1396, (1968).

[109] A. Rejali & H. R. E. Vishki: *Regularity and amenability of the second dual of weighted group algebras.* Proyecciones. Revista de Matemática. Vol. 26, no. 3, 259-267, (2007). Zbl 1182.46040.

[110] A. Rejali & H. R. E. Vishki: *Weighted convolution measure algebras characterized by convolution measure algebras.* J. of Sciences, Islamic Republic of Iran 19(2), 169-173, (2008).

[111] M. Reed & B. Simon: *Methods of modern mathematical physics, I.* Academic Press, N. Y., (1972). ISBN: 0-12-585050-6.

[112] C. E. Rickart: *General theory of Banach algebras.* D. Van Nostrand Co. Inc., Princeton, N. J., Toronto, N. Y., (1960). MR22#5903.

[113] F. Riesz: *Sur les opérations fonctionnelles linéaires.* C. R. Acad. Sci. Paris 149, 974–977, (1910). JFM 40.0388.03.

[114] K. A. Ross: *The structure of certain measure algebras.* Pacific J. Math., Vol. 11, no. 2, 723-737, (1961).

[115] W. Rudin: *Real and complex analysis.* 2nd. Edition. MaGraw-Hill Series in Higher Maths., USA, (1974). MR 49#8783.

[116] W. Rudin: *Functional analysis.* McGraw-Hill Publ. Co., New Delhi, N. Y., (1973). ISBN-10: 0070542368.

[117] H. H. Schaefer: *Banach lattices and positive operators.* Springer-Verlag, New York, (1974). Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 215. MR0423039 (54 #11023).

[118] R. Schatten: *A theory of cross spaces.* Ann. of Math. Studies, no. 26, Princeton University Press. N.J., MR **12**, 86, (1950).

[119] I. E. Segal: *The group algebra of a locally compact group.* Trans. Amer. Math. Soc., **61**, 69-105, (1947). MR 8-438.

[120] S. Sherman: *The second adjoint of a C^*-algebra.* Proc. International Congress Mathematicians. Cambridge, Mass., Vol. 1, 470, (1950).

[121] V. L. Šmulian: *Über lineare topologieche Räume.* Mat. Sbornik N. S., 7(49), 425-448, (1940).

[122] M. H. Stone: *Applications to the theory of boolean rings to general topology.* Trans. Amer. Math. Soc., **41**, 375-481, (1937). Zbl 0017.13502.

[123] Z. Takeda: *Conjugate spaces of operator algebras.* Proc. Japan Acad., **29**, 90-95, (1954). MR 0063578 (16,146c).

[124] J. L. Taylor: *The structure of convolution measure algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 119, no. 1, 150-166, (1965).

[125] J. L. Taylor: *Noncommutative convolution measure algebras.* Pacific J. of Maths., Vol. 31, no. 3, 809-826, (1969). MR 41#844.

[126] B. J. Tomiuk & Wong, P-K.: *The Arens product and duality in B^*-* algebras. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 25, no. 3, 529-535, (1970).

[127] B. J. Tomiuk: *Arens regularity and the algebra of double multipliers.* Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 81, no. 2, 293-298, (1981). Zbl 0489.46040.

[128] B. J. Tomiuk: *Multipliers on weakly completely continuous Banach algebras.* Bull. of the Institute of Maths. Academia Sinica. Vol. 27, no. 1, 51-69, (1999). Zbl 0930.46047.

[129] A. Ülger: *Weakly compact bilinear forms and Arens regularity.* Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 101, no. 4, 697-704, (1987). Zbl 0635.46044.

[130] A. Ülger: *Arens regularity of the algebra* $A\widehat{\otimes}B$. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 305, no. 2, 623-639, (1988). MR 89c:46064.

[131] A. Ülger: *Arens regularity sometimes implies RNP.* Pacific J. of Math., Vol. 143, no. 2, 377-399, (1990). MR 91f: 46O67.

[132] A. Ülger: *Arens regularity of weakly sequentially complete Banach algebras.* Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 127, no. 11, 3221-3227, (1999). MR 200b:46080.

[133] J. Von Neumann: *Zur algebra der funktional operationen und theorie der normalen operatoren.* Math. Ann., **102**307-427, (1929).

[134] S. Watanabe: *A Banach algebra which is an ideal in the second dual space.* Sci. Rep. Niigata Univ., Ser. A, no. 11, 95-101, (1974). MR 52 #3960.

[135] S. Watanabe: *A Banach algebra which is an ideal in the second conjugate space II.* Sci. Rep. Niigata Univ. Ser. A, no. 13, 43-48, (1976). Zbl 0363.46046.

[136] J. G. Wendell: *Left centralizers and isomorphisms of group algebras.* Pacific J. Maths., **2**, 251-261, (1952). MR 14-246.

[137] P. K. Wong: *On the Arens product and annihilator algebras.* Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 30, no. 1, 79-83, (1971). Zbl 0218.46059.

[138] P. K. Wong: *Arens product and the algebra of double multipliers.* Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 94, no. 3, 441-444, (1985). MR 86g: 46075.

[139] P. K. Wong: *On the Arens products and reflexive Banach algebras.* Int. J. Math. & Math. Sci., Vol. 14, no. 2, 407-409, (1991). Zbl 0759.46043.

[140] N. J. Young: *The irregularity of multiplication in group algebras.* Quart. J. Math.. Oxford (2), **24**, 59-62, (1973). MR47#9290.

[141] N. J. Young: *Semigroup algebras having regular multiplication.* Studia Math., T. XLVII, (1973). MR48#9260.

[142] N. J. Young: *Separate continuity and multilinear operations.* Proc. London Math. Soc., (3) 26, 289-319, (1973). Zbl 0247.46027.

[143] N. J. Young: *Periodicity of functionals and representations of normed algebras on reflexive spaces.* Proc. Edinburgh Math. Soc., (2) 20, no. 2, 99-102, (1976/77). MR 55#8800.

[144] I. Zalduendo: *A simple example of a non-commutative Arens product.* Publicacions Matemàtiques, Vol. 35, 475-477, (1991). Zbl 0763.46038.