Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Topología de Conjuntos, un primer curso.

Juan Antonio Pérez

www.sociedadmatematicamexicana.org.mx

Serie: Textos. Vol. 18 (2015)

Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
Carretera a La Bufa S.N.
98000 Zacatecas, Zac., México
Tel. 01 (492) 922 99 75 ext. 32

Topología de Conjuntos

UN PRIMER CURSO

Juan Antonio Pérez

Universidad Autónoma de Zacatecas
Francisco García Salinas

Prólogo

El presente material es el resultado de 30 años de ejercicio docente en Topología de Conjuntos a nivel de licenciatura, en la Universidad Autónoma de Zacatecas, y se ha nutrido de la rica experiencia que un ramillete de estudiantes entusiastas han ido aportando. Los primeros intentos de escribir el presente texto tuvieron lugar desde la impartición del primer curso, y tanto su contenido como su estructura se han modificado de forma radical en más de una ocasión, atendiendo a los intereses de los estudiantes tanto como a la maduración que mi entendimiento de la topología y sus usos me han ido proporcionando.

El orden de presentación de los temas, así como la profundidad con la que son tratados se han ido moldeando con cada una de las generaciones de estudiantes con los que he tenido el privilegio de interactuar. Puedo afirmar que este libro es de la autoría de ellos, aunque ciertamente, cada uno de los errores me pertenece en absoluto. Puede encontrarse en este texto la huella de cada uno de mis estudiantes en el transcurso de los años sin excepción alguna, varios de ellos de forma muy significativa.

La primera versión consistió de las notas de clase que de mi curso tomó la ahora doctora en Matemática Educativa Leticia Sosa Guerrero. No puedo dejar de mancionar a Jesús Leaños Macías, a Nydia Monserrat Veyna García, así como a los hermanos Pedro y Marlem Solís Santana, quienes contribuyeron encontrando una buena cantidad de errores e imprecisiones. En la limpieza de la última versión fue particularmente valioso el aporte de la estudiante Andrea Arlette España Tinajero. No quiero dejar de agradecer la también invaluable crítica de los árbitros, sin cuyo apoyo habría en

esta obra más errores de los que seguramente conserva, todos los cuales han escapado a mis numerosos escrutinios y son, por supuesto, de mi entera y exclusiva responsabilidad.

Muchos colegas también, a través de sus generosos comentarios y opiniones propiciaron modificaciones que han mejorado el texto; y en otras ocasiones, reforzado la convicción de que los cambios no deben producirse, so pena de no expresar las ideas según las concibe el autor, o de perder lo que de estilo propio en el texto pudiese ser encontrado. Agradezco a todos ellos citando en orden alfabético: Lilia del Riego, Ernesto Lupercio, Zbigniew Oziewicz, Alexander Pyschev, Miguel Maldonado, Juan Martínez, Armando Mata, Guillermo Moreno (†), Juan José Rivaud (†), Gregory Wene, Peter Wynn y Miguel Xicoténcatl.

La paciencia y atingencia de Emilio Lluis, editor de la Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana son dignas de todo mi reconocimiento, por la dedicación puesta en la serie de la que el presente texto forma parte.

Finalmente, y de forma muy especial, agradezco su tolerancia e incondicionalidad a mi esposa Leticia, a mis hijas Ariadna Isis y Violeta Lucía, al igual que a mis nietos Emilio, Darío y Adrián por el tiempo que no les dediqué en el empeño por concluir este librito.

Juan Antonio Pérez
Zacatecas, Zac., México
mayo de 2015

Índice general

Introducción

La Topología es la más jóven de las disciplinas consideradas como pilares fundamentales de la Matemática contemporánea, y sin embargo, pensada como la rama de las matemáticas cuyo objeto de estudio es la continuidad, sus orígenes se pierden con facilidad en la Historia.

La convergencia es otra de las propiedades naturalmente topológicas, y es ella una de las primeras caracterizaciones de la continuidad a la que se recurre en el trayecto del aprendizaje matemático. En realidad, continuidad y convergencia no son sino dos manifestaciones del mismo fenómeno. Tanto la continuidad como la convergencia se definen en términos de una noción de cercanía o proximidad, lo que no necesariamente significa distancia.

Intuitivamente, un espacio topológico es un conjunto sobre el que se ha definido una noción de proximidad, que es la que le proporciona una estructura topológica. Un elemento de un conjunto, se convierte en un punto, cuando el conjunto adquiere una estructura topológica. Una vecindad de un punto es una colección de puntos cercanos a él.

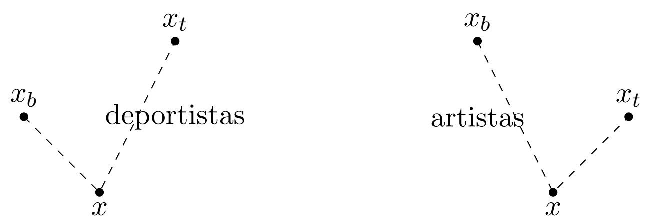
Una aplicación es continua si las imágenes de puntos cercanos son también puntos cercanos, lo que se expresa mejor en términos de vecindades: la preimagen de una vecindad es también una vecindad.

La matemática del amor

Consideremos el siguiente ejemplo, extraído de las relaciones afectivas que se dan entre los miembros de una sociedad, en donde los puntos del espacio son las personas, y en donde la vecindad más inmediata de un punto es su núcleo familiar. La familia es la célula de la sociedad, y tiene su origen en una pareja que decide compartir la vida, de manera que la mínima vecindad que una persona puede tener está constituida por ella misma y su pareja. La familia en primer grado incluye a padres y hermanos durante la soltería, y a los hijos luego de la constitución de la pareja. La familia en segundo grado incluye a primos y tíos, en cuando se irán agregando familiares políticos como suegros, yernos y nueras. El entorno familiar llega a ser tan grande que incluye a la sociedad toda.

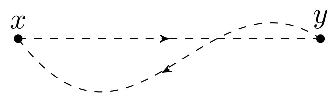
En estos términos, la familia en primer grado, en segundo, tercero, la extendida y todas sus posibles ampliaciones constituyen vecindades de una persona. Otras vecindades se construyen a través de la formación de lazos de compañerismo, amistad, afinidad política y otros. Las intersecciones entre ellas, necesariamente finitas, son también vecindades. Ejemplos son los miembros de la familia con la misma profesión o semejante orientación política.

La distancia física, geométrica o geográfica, da paso a la idea de proximidad afectiva o afinidad, que no necesariamente tiene una expresión numérica. El afecto también se construye a través de la cotidianeidad y las coincidencias: clubes, escuelas, equipos deportivos y otros colectivos se constituyen en vecindades de una persona. La persona x, aficionada al baloncesto y el teatro, tiene dos hijos, que identificaremos por x_b y x_t, que practican el baloncesto y el teatro respectivamente. La comunidad deportiva percibirá una mayor cercenía de x con x_b que con x_t, mientras que la percepción de la colectividad artística será la exactamente opuesta. La persona x se asume como igualmente cercano con cada uno de sus dos hijos.



Notemos, por ejemplo, que una vez que x constituye una pareja con y, toda vecindad de x incluye a y, al tiempo que toda vecindad de y contiene también a x. Técnicamente decimos que los dos puntos distintos x, y no son topológicamente distinguibles. La “distancia” de x a y y viceversa es cero, a pesar de que no son el mismo punto, por lo que concluimos que la noción de proximidad o la de lejanía no se identifican, en este caso, con la de una métrica.

Las relaciones afectivas no se corresponden necesariamente con los nexos en un espacio métrico, y ni siquiera con los de un espacio pseudométrico, puesto que la intensidad del afecto que x siente por y, no es necesariamente igual al recíproco.

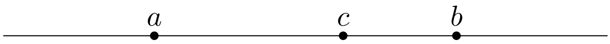


La noción de cercanía que proporciona la estructura topológica, entonces, no siempre se corresponde con una pseudométrica. Técnicamente: no todo espacio topológico es metrizable. Caracterizar a los espacios topológicos metrizables es una de las misiones de la Topología de Conjuntos.

El antecedente euclidiano

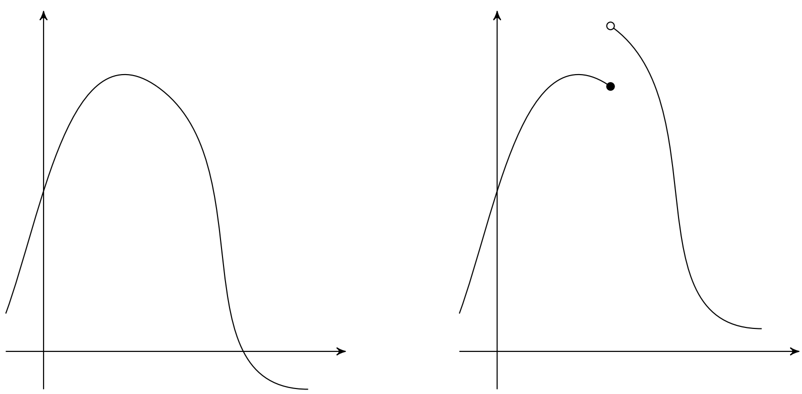
La recta euclidiana no es un simple conjunto de puntos, pues ya de suyo, la recta euclidiana tiene una estructura topológica, a la que llamamos, consecuentemente, topología euclidiana. Una de las definiciones que se encuentran en los textos de geometría elemental carcteriza a la recta como una unión de puntos que tienen la misma “dirección”. Esta definición ingenua esconde las ideas de orientación, orden y dirección, que como veremos más adelante, son definitorias de topologías específicas.

Uno de los axiomas de la geometría euclidiana postula que dados dos puntos distintos a y b, existe un tercer punto c, sobre la misma recta, que se encuentra entre ellos. Si denotamos $a < b$ se ha elegido una orientación para la recta, y un orden coincidente con ella; el axioma postula la existencia de un tercer punto c que satisface $a < c < b$. La topología euclidiana es la topología del orden determinada por este orden.



La topología del plano euclidiano es la topología producto sobre el producto de dos copias de la recta euclidiana, y así para cualquier producto de copias de la recta. El espacio de las sucesiones reales es el espacio topológico producto $\mathbb{R}^\infty$, o más precisamente $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Intuitivamente, una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si su gráfica no se "rompe", asumiendo la topología euclidiana en ambas "copias" de la recta. La gráfica de una función continua es, en este sentido, una "recta curvada". Nos referimos en este caso a un ejemplo de continuidad, al que podríamos llamar "continuidad euclidiana", puesto que se refiere a la continuidad de funciones entre espacios euclidianos, que son metrizables. De hecho, la topología euclidiana es determinada por la métrica euclidiana.

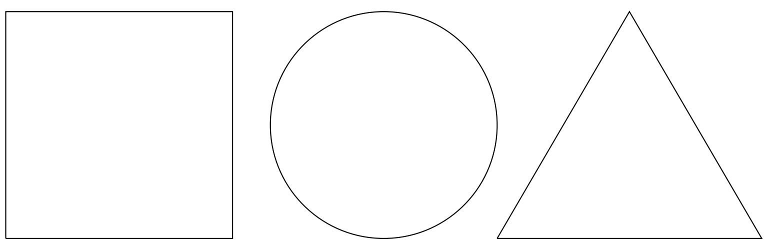


En este sentido, la gráfica de una función continua es una copia de la recta, que imita el hecho de que la recta no se "rompe". Esta propiedad de la recta es también una propiedad topológica, y recibe el nombre de completitud. Este hecho de "no romperse" de la recta expresa de forma intuitiva que la recta euclidiana es un espacio métrico completo. En general, los espacios euclidianos son espacios métricos completos.

La geometría de la deformación

El primer paso en el estudio de los espacios topológicos es la clasificación, y en función de que la continuidad es la propiedad fundamental en Topología, dos espacios se consideran "esencialmente el mismo" si cada uno de ellos puede "deformarse continuamente en el otro". Es decir, si dados dos espacios topológicos X, Y, existen una biyección bicontinua $f : X \to Y$, lo que significa que la inversa $f^{-1} : Y \to X$ es también continua.

Si existe un homeomorfismo $f : X \to Y$ se dice que los espacios X, Y son homeomorfos, y el homeomorfismo es claramente una relación de equivalencia, puesto que la composición de aplicaciones continuas es una aplicación continua. Un círculo es homeomorfo con un cuadrado, y este a su vez con un triángulo. Lo que aquí parece esencial es que se trata de curvas planas cerradas con exactamente "un agujero".

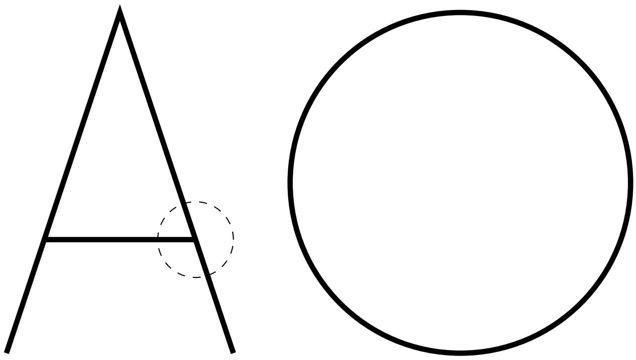


Se ha dicho que un topólogo es un matemático que no distingue entre una dona y una taza. El significado es que estos dos objetos son objetos homeomorfos, es decir, topológicamente equivalentes. La dona y la taza pertenecen a la misma clase de homeomorfismo. Las letras de del albafeto castellano pueden clasificarse mediante homeomorfismo. Los conjuntos siguientes son las distintas clases de homeomorfismo correspondientes.

- {A,R}
- {B}
- {C, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z}
- {D, O}
- {Ñ}
- {E, F, G, T, Y}
- {H, K}
- {X}
- {P}
- {Q}

La letra “Ñ” es la única letra mayúscula del alfabeto castellano que no es conexa. Entre las minúsculas, ni la “i” ni la “j” son conexas. La determinación de las clases de homeomorfismo de los espacios topológicos ha resultado ser, en general, un problema extraordinariamente complicado, por lo que a se ha recurrido a clasificaciones más gruesas. Una de ellas es la homotopía. Dos espacios son homotópicamente equivalentes, si uno de ellos puede deformarse continuamente en el otro.

Las letras “A” y “O” son homotópicamente equivalente, porque la “A” puede deformarse continuamente “encogiendo” sus “patas”, en tanto que “O” es homeomorfa con la parte superior de la letra “A”. Estas dos letras no son homeomorfas, dado que la letra “O” no tiene un punto con una vecindad como la que se muestra en la ilustración que sigue.



La relación de homotopía es también una relación de equivalencia, y las clases de homotopía de las letras del alfabeto castellano son las siguientes.

- {A, D, O, P, Q, R}
- {B}
- {C, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, S, T, U, V, W, X, Y, Z}
- {Ñ}

La letra "Ñ" no es ni homomorfa no homotópicamente equivalente con ninguna otra, dado que es la única que no es conexa. Las letras en la clase de homotopía de la letra "C" son simplemente conexas, porque pueden ser deformadas en un punto. Las letras "B" y "D", por ejemplo, no son homotópicamente equivalentes, puesto que presentan cantidades distintas de "orificios".

La clasificación de espacios topológicos via homeomorfismo es un problema tan intrincado que no parece tener solución a corto plazo. Muchos invariantes son desarrollados con el objetivo de obtener clasificaciones parciales, y seguramente el lector disfrutará el trayecto que conduce a la confección de un catálogo semejante.

Capítulo 1

Espacios Pseudométricos

Este primer capítulo se dedica a la exploración de una clase particular de espacios topológicos, cuya estructura está dada por una noción de "distancia". Se pretende que el lector alimente la teoría a partir de los ejemplos provenientes del Análisis, haciendo necesario el tránsito hacia las nociones más generales de topología y de espacio topológico.

Las propiedades que podemos caracterizar como propias de la Topología se asocian con los fenómenos de la convergencia y la continuidad. En esa perspectiva, está asociada desde la antigüedad con los puntos de contacto entre la filosofía y las matemáticas. Continuando en esa línea, la noción de infinito juega un papel fundamental en la exploración de los hechos topológicos.

Por su parte, la topología de los espacios métricos tiene sus orígenes en la geometría euclidiana, y constituye el eslabón que la conecta con la topología general. Adquiere entonces sentido la expresión común que caracteriza a la topología como una geometría dotada de elasticidad.

Los requisitos mínimos que debe satisfacer una noción de distancia es que un objeto dista cero de sí mismo, y que la distancia entre dos puntos nunca es mayor que la suma de sus distancias a un tercer punto. Estas características nos permiten extraer la esencia de las propiedades topológicas, hasta el punto en el que finalmente se prescinde de ellas. El concepto de distancia se hace un poco más elástico, cuando la noción de "cercanía" permite la existencia de puntos distintos que distan cero. Cada versión es más general que la que le precede, y por tanto, más poderosa.

1.1. Métricas y Pseudométricas

Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto, una *pseudométrica* sobre X es una función

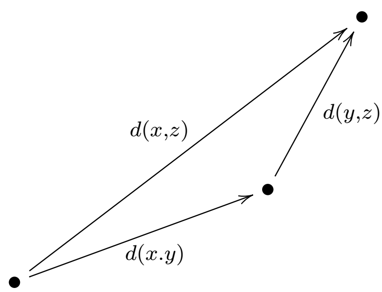
$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguentes propiedades:

1. (**Simetría**) $d(x, y) = d(y, x)$ para $x, y \in X$.
2. (**Desigualdad del triángulo**) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para $x, y, z \in X$.
3. (**Regularidad**) $d(x, x) = 0$ para $x \in X$.

   Una pseudométrica es una *métrica* si cumple además con:

4. (**No degeneración**) Si $d(x, y) = 0$ entonces $x = y$.



Un *espacio pseudométrico*[1] es un par (X, d) donde X es conjunto no vacío y d es una pseudométrica. De la misma manera, un *espacio métrico*

[1] Un espacio pseudométrico es también llamado *écart* en francés, cuya traducción literal al castellano es *divergencia*, de manera que una traducción con algo de sentido matemático sería *espacio divergente*.

es un espacio pseudométrico (X, d), donde d es una métrica. Si (X, d) es un espacio pseudométrico y $x \in X$, se dice que x es un *punto*[2] de (X, d).

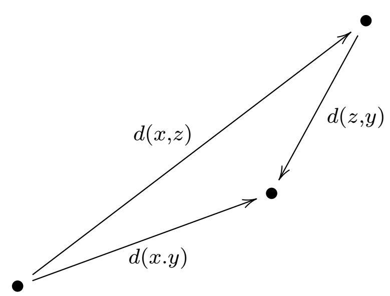
Proposición 1.1 *Una pseudométrica es una función no negativa.*

Demostración. Usando las propiedades de regularidad, la simetría y la desigualdad del triángulo, para $x, y \in X$ arbitrarios tenemos

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

de donde $d(x, y) \geq 0$. ■

Nota 1 *La definición de una pseudométrica puede ser más concisa y elegante, basta que satisfaga la propiedad de regularidad y la desigualdad del triángulo en la forma $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$.*



Así, la simetría se obtiene de $d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x) = d(y, x)$, y de $d(y, x) \leq d(y, y) + d(x, y) = d(x, y)$.□

Ejemplo 1.1 *Sobre un conjunto no vacío X definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

la cual es claramente una métrica sobre X. Esta métrica se conoce como la métrica discreta. □

[2]Nótese que un punto no pertenece a un conjunto, sino a un espacio.

Ejemplo 1.2 *Sobre un conjunto no vacío X definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante $d(x, y) = 0$ para todo par $(x, y) \in X \times X$. Esta es claramente una pseudométrica sobre X. Esta pseudométrica se conoce como la pseudométrica indiscreta.* □

Ejemplo 1.3 *La métrica euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$ se define por $d(x, y) = |x-y|$, determinada por la norma pitagórica.* □

Ejemplo 1.4 *Toda métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ induce una métrica acotada $D : X \times X \to [0, 1)$ mediante*

$$D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Para demostrar que se satisface la desigualdad del triángulo notemos que, para $a, b, c \geq 0$ con $c \leq a + b$ se tiene $c(1 + a + b) \leq (1 + c)(a + b)$, de donde

$$\frac{c}{1 + c} \leq \frac{a + b}{1 + a + b} \leq \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b}.$$

Notemos además que para $s, t \geq 0$ se satisface

$$\frac{s}{1 + s + t} \leq \frac{s}{1 + s}.$$

En consecuencia

$$D(x, z) \leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \leq D(x, y) + D(y, z).$$

Este ejemplo será de utilidad. □

En la jerga topológica es común denotar $I = [0, 1]$ y llamarlo "el intervalo", por razones que serán evidentes en breve. De la misma manera, dados conjuntos no vacíos A y B, denotamos por B^A el conjunto de las aplicaciones $f : A \to B$. Si B es un anillo, entonces la aplicación $f \in B^A$ se llama *función.*

Ejemplo 1.5 *Sobre* $\mathbb{R}^I$*, la aplicación dada por*

$$d(f,g) = \text{ínf}\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

es una pseudométrica pero no es una métrica. No obstante, la aplicación dada por

$$\delta(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

define efectivamente una métrica. □

Denotamos por $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^I\right)$, o bien por $M(I,\mathbb{R})$, la colección de las funciones continuas[3] sobre I, y por $\mathcal{R}\left(\mathbb{R}^I\right)$ la de las funciones Riemann-integrables.

Ejemplo 1.6 *Sobre* $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^I\right)$*, la aplicación dada por*

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

es claramente una métrica. Sin embargo, sobre $\mathcal{R}\left(\mathbb{R}^I\right)$*,* d *es únicamente una pseudométrica.*□

Ejemplo 1.7 *La función* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida mediante*

$$d(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases},$$

es una métrica en el plano, conocida como la "métrica ferrocarrilera". □

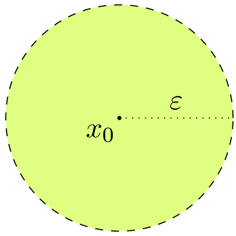
Ejemplo 1.8 *Definamos* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *por*

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

es una métrica conocida como la "métrica del taxista". □

El subconjunto $B_\epsilon(x_0) = \{x \in X | d(x,x_0) < \varepsilon\}$ se conoce como la *bola abierta* de *radio* ε y *centro* x_0.

[3]Se usa la 'C' obviamente, por ser la inicial de "continuidad" en castellano, en inglés se usa 'M' por ser la inicial de "map" que se usa como sinónimo de "continuous mapping".



Los espacios pseudométricos son espacios topológicos, cuya topología es generada por las bolas abiertas, y el resto del capítulo se dedica a explorar este hecho. Las propiedades que comparten los espacios pseudométricos serán generalizadas, y revisadas en otros contextos más adelante. En lo sucesivo usaremos como sinónimos los términos "bola" y "bola abierta".

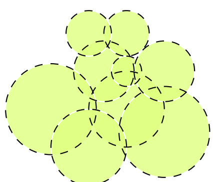
Sean (X, d) un espacio pseudom étrico y $x \in X$ un punto, se dice que el conjunto $A \subseteq X$ es una *vecindad* de x si

$$B_\epsilon(x) \subseteq A,$$

para algún $\varepsilon > 0$. El *sistema de vecindades* de x es el conjunto cuyos elementos son las vecindades de x, y se denota[4] por $\mathcal{N}(x)$.

1.2. Conjuntos abiertos

Un conjunto U en un espacio pseudométrico (X, d) se dice que es un *conjunto abierto* si $U \in \mathcal{N}(x)$ para todo $x \in U$, es decir, si es vecindad de cada uno de sus puntos. La *topología* sobre un espacio es la colección de sus conjuntos abiertos, de manera que una primera tarea consistirá en caracterizar la condición de ser un conjunto abierto.



[4]La letra "$\mathcal{N}$" se usa por ser la inicial del vocablo inglés "neigbourhood" que se traduce literalmente como vecindad, vecindario o entorno.

Proposición 1.2 *Las bolas son conjuntos abiertos.*

Demostración. Claramente $B_\varepsilon(x) \in \mathcal{N}(x)$. Sean ahora $y \in B_\varepsilon(x)$ con $y \neq x$, $\delta = \text{mín}\{d(x,y), \varepsilon - d(x,y)\}$ y $z \in B_\delta(y)$. Entonces, en todo caso $d(y,z) < \varepsilon - d(x.y)$, y en consecuencia

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(x,z) < \varepsilon$$

con lo que $z \in B_\varepsilon(x)$, con lo que $B_\varepsilon(x) \in \mathcal{N}(y)$. ■

Corolario 1.3 *Un conjunto es abierto si y sólo si es unión de bolas.*

Demostración. Ejercicio. ■

Notemos que, el espacio total X es un conjunto abierto, dado que contiene todas las bolas posibles, y además el conjunto vacío $\varnothing \subset X$ es también abierto, en este caso, por vacuidad.

Proposición 1.4 *La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Demostración. Basta observar que una unión de uniones de bolas es una unión de bolas. ■

Proposición 1.5 *La intersección finita de bolas abiertas es una unión de bolas abiertas.*

Demostración. Si $B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \ldots \cap B_{\varepsilon_n}(x_n) = \varnothing$, no hay nada que demostrar, en caso contrario, supongamos que $x \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \ldots \cap B_{\varepsilon_n}(x_n)$, entonces si

$$\varepsilon_x = \text{mín}\,\{\varepsilon_0 - d(x,x_0), \ldots, \varepsilon_n - d(x,x_n)\}$$

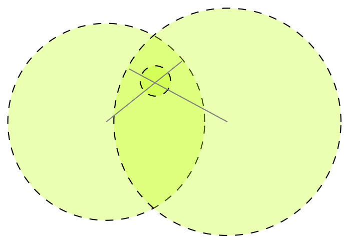
es claro, por la desigualdad del triángulo, que

$$B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \ldots \cap B_{\varepsilon_n}(x_n)$$

y además

$$B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \ldots \cap B_{\varepsilon_1}(x_1) = \bigcup_{x \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \ldots \cap B_{\varepsilon_n}(x_n)} B_{\varepsilon_x}(x)$$

como se quería demostrar. ■



Corolario 1.6 *La intersección finita de abiertos es abierta.*

Demostración. Ejercicio. ■

1.3. Conjuntos cerrados

Un conjunto $F \subseteq X$ es un *conjunto cerrado* si su complemento $F^c \subseteq X$ es abierto. La sección se dedica a caracterizar los conjuntos cerrados en un espacio pseudométrico. Por abuso de lenguaje, y por comodidad, llamaremos "puntos" a los conjuntos que constan de un único punto.

Proposición 1.7 *En un espacio métrico (X, d) los puntos son cerrados.*

Demostración. Si X consta de un único punto, no hay nada que demostrar. En otro caso, sean $x, y \in X$ dos puntos distintos, y sea $\varepsilon = d(x, y) > 0$, entonces claramente $x \notin B_\varepsilon(y)$, de manera que, entonces $\{x\}^c$ es unión de bolas. ■

Esta propiedad no necesariamente se cumple en un espacio pseudométrico (X, d), dado que para dos puntos distintos $x, y \in X$, no se tiene garantía de que $d(x, y) > 0$.

Proposición 1.8 *Los conjuntos cerrados en un espacio pseudométrico satisfacen:*

1. *El vacío y el espacio son cerrados.*
2. *La intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*
3. *La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Demostración. Ejercicio. ■

Si (X, d) es un espacio pseudométrico y $\varnothing \neq A \subseteq X$, entonces la restricción $d|_{A\times A}$ es una pseudométrica sobre A, y la verificación queda como ejercicio. Entonces $(A, d|_{A\times A})$ es un espacio pseudométrico, y se dice que es un *subespacio pseudométrico* de (X, d), el cual suele denotarse como (A, d).

1.4. Interior, cerradura y frontera

Se dice que $x \in X$ es un *punto interior* de A si $A \in \mathcal{N}(x)$. El *interior* de A es el conjunto de los puntos interiores de A y se denota por A°.

Proposición 1.9 *Para todo conjunto A se satisface $A^\circ \subseteq A$.*

Demostración. Si $A^\circ = \varnothing$, no hay nada que demostrar. Si $x \in A^\circ$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A$, y en particular $x \in A$. ■

En interior de A es claramente un conjunto abierto, y de hecho, es el máximo abierto contenido en A.

Sea A un conjunto en un espacio pseudométrico (X, d) un punto $x \in X$ es un *punto de adherencia* de A si $U \cap A \neq \varnothing$ para toda $U \in \mathcal{N}(x)$. La cerradura[5] de A es el conjunto de sus puntos de adherencia, y se denota mediante $\overline{A}$. Claramente $A \subseteq \overline{A}$ para todo $A \subseteq X$.

Un punto $x \in X$ es un *punto de acumulación* de A si $(U - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$ para toda $U \in \mathcal{N}(x)$. El *conjunto derivado* de A es el conjunto de sus puntos de acumulación, y se denota por A'. De las definiciones se sigue de inmediato que todo punto de acumulación es de adherencia, es decir, que $A' \subseteq \overline{A}$.

Proposición 1.10 *Para todo conjunto A en un espacio pseudométrico se tiene $\overline{A} = A \cup A'$.*

Demostración. La inclusión $A \cup A' \subseteq \overline{A}$ es muy clara. Por otra parte, si $x \in \overline{A}$ y $x \notin A'$, sea $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $(U - \{x\}) \cap A = \varnothing$, entonces, como $U \cap A \neq \varnothing$, necesariamente $x \in A$. ■

La cerradura de A es claramente un conjunto cerrado, y de hecho, es el mínimo cerrado que contiene a A. En cualquier caso, si U es un abiero contenido en A y F es un cerrado que contiene a A, se satisface la relación siguiente.

$$U \subseteq A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq F$$

En general, es posible encontrar puntos de la cerradura de A que no son ni puntos interiores ni puntos de acumulación. La demostración queda como ejercicio. La *frontera* de A se denota por ∂A y se define como $\overline{A} \cap \overline{A^c}$. Entonces, un punto frontera x es tal que $U \cap A \neq \varnothing$ y $U \cap A^c \neq \varnothing$ para toda $U \in \mathcal{N}(x)$. Así, los conjuntos A°, ∂A y $(A^c)^\circ$ son tres conjuntos mutuamente ajenos cuya unión es el espacio, y además $\partial A = \partial(A^c)$.

La frontera de A es entonces un conjunto cerrado, por lo que $\overline{\partial A} = \partial A$. Ahora bien, como el lector podrá demostrar con facilidad, $\overline{(\partial A)^c} = X$, en espacios métricos, de suerte que $\partial(\partial A) = \partial A$. Nótese además, que en espacios métricos, $(\partial A)^\circ = \varnothing$.

Los espacios euclidianos tienen subespacios muy interesantes. El *disco* de dimensión $n+1$ se define como un subespacio de R^{n+1} mediante

$$D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \leq 1\},$$

[5]Adherencia, clausura.

mientras que la *esfera* de dimensión n es

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Es claro que como subespacios del mismo espacio euclidiano se satisface $S^n = \partial D^{n+1}$.

Exploraremos los conceptos de esta sección más adelante, en un contexto más general.

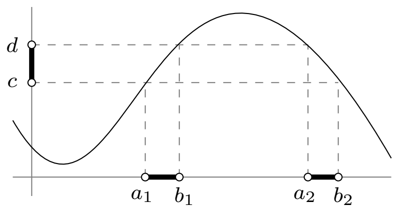
1.5. Continuidad

Consideremos dos espacios pseudométricos (X, d_X) y (Y, d_Y). Sea además $f : X \to Y$ una aplicación, decimos que f es *continua* en $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y = f(x)$, entonces

$$f\left(B_\delta(x)\right) \subseteq B_\varepsilon(y).$$

Una aplicación es *continua* si es continua en cada uno de los puntos de su dominio. En términos coloquiales, una aplicación es continua, si y sólo si, las imágenes de puntos cercanos son también puntos cercanos. Observamos entonces, que la noción de continuidad descansa sobre la de cercanía.

$f^{-1}(c,d) = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$

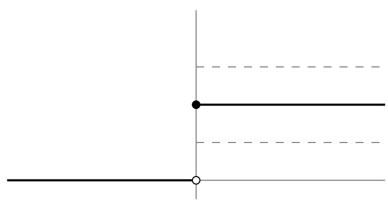


Ejemplo 1.9 *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuya gráfica se reproduce arriba, es continua.* $\square$

Ejemplo 1.10 *La función escalón de Heaviside*[6] *$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por*

$$h(t) = \begin{cases} 0 & si \quad -\infty < t < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq t < \infty \end{cases},$$

es continua en cada punto de la recta, excepto para $t = 0$.



[6] Oliver Heaviside (1850 - 1925), ingeniero y matemático inglés autodidacta, que contribuyó de forma importante en la construcción del *cálculo operacional.* Le son atribubidos una gran cantidad de descubrimientos matemáticos, aunque no parece haber proporcionado las demostraciones correspondientes.

Notemos que para $0 < \varepsilon < 1$ *se tiene* $f^{-1}(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = [0, \infty)$*, que no es abierto en* $\mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 1.11 *La función de Dirichlet*[7] $\Delta : I \to \{0, 1\}$*, que se define mediante*

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

no es continua en ningún punto de su dominio. La preimágenes posibles de abiertos no triviales son $\mathbb{Q} \cap I$ *y* $\mathbb{Q}^c \cap I$*, ninguno de los cuales es abierto.* $\square$

Dados un espacio pseudométrico (X, d), un subconjunto no vacío $A \subseteq X$ y un punto $x \in X$, la *distancia* del punto x al conjunto A se define mediante

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y)|y \in A\}.$$

Teorema 1.11 *La función* $d(\_, A) : X \to \mathbb{R}$ *es continua para todo* $A \subseteq X$ *en un espacio pseudométrico* (X, d).

Demostración. Claramente, si $a \in A$, entonces para cualesquiera $x, y \in X$:

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a),$$

por la desigualdad del triángulo, y puesto que la desigualdad es válida para todo $a \in A$, entonces

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A),$$

de manera que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Consecuentemente, si $d(x, y) < \varepsilon$ entonces $|d(x, A) - d(y, A)| < \varepsilon$, de donde se sigue la continuidad. ■

[7] Peter Gustav Lejeune Dirchlet (1805 - 1859), matemático alemán, a quien se atribuye la definición formal contemporánea de función.

Teorema 1.12 *Sean (X, d) un espacio pseudométrico y $A \subseteq X$, entonces*

$$\overline{A} = \{x \in X | d(x, A) = 0\}.$$

Demostración. Por definición, $x \in \overline{A}$ si y sólo si $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$ para todo $\varepsilon > 0$, es decir, si y sólo si $d(x, A) = 0$. ■

Dados dos conjuntos A y B no vacíos en un espacio pseudométrico (X, d), definimos la *distancia* entre ellos mediante

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, B) | a \in A\}.$$

Queda como ejercicio para el lector demostrar que esta noción de distancia es simétrica, es decir, que

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(b, A) | b \in B\},$$

de donde se sigue que

$$d(A, B) = \underset{a \in A}{\text{ínf}} \left(\underset{b \in B}{\text{ínf}}\, d(a, b) \right) = \underset{b \in B}{\text{ínf}} \left(\underset{a \in A}{\text{ínf}}\, d(a, b) \right) = d(B, A).$$

Supongamos que $f : X \to Y$ es continua y sea $U \subseteq Y$ un conjunto abierto, dado $x \in f^{-1}(U)$, sea $y = f(x) \in U$, y tomemos $\varepsilon_x > 0$ tal que $B_{\varepsilon_x}(y) \subseteq U$, y sea $\delta_x > 0$ tal que $f\left(B_{\delta_x}(x)\right) \subseteq B_{\varepsilon_x}(y)$. Tenemos entonces que $B_{\delta_x}(x) \subseteq f^{-1}(U)$, de donde $f^{-1}(U)$ es vecindad de todos sus puntos y es en consecuencia abierto.

Supongamos recíprocamente que para todo abierto $U \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto, y sea $x \in X$ un punto arbitrario. Tomemos $B_\varepsilon(y)$ para $\varepsilon > 0$ arbitrario, donde $y = f(x)$, por hipótesis $f^{-1}B_\varepsilon(y) \subseteq X$ es abierto y además $x \in f^{-1}B_\varepsilon(y)$, existe entonces $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}B_\varepsilon(y)$, es decir, $f\left(B_\delta(x)\right) \subseteq B_\varepsilon(y)$, de donde se sigue la continuidad de f.

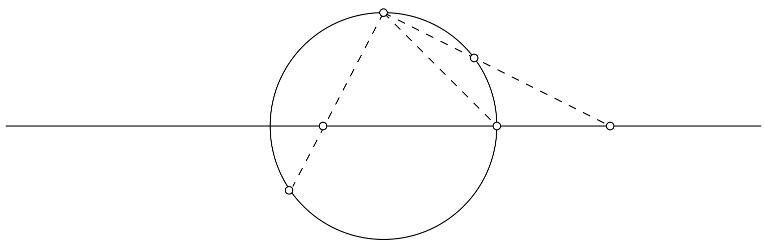
Se ha demostrado el resultado siguiente para aplicaciones sobre espacios pseudométricos.

Teorema 1.13 *Una aplicación es continua si y sólo si la preimagen de todo abierto es abierta.*■

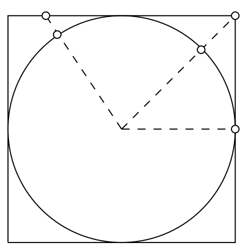
Una biyección continua que tiene inversa continua es un *homeomorfismo*, y claramente la inversa de un homeomorfismo es también un homeomorfismo. Se dice que los espacios X y Y son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo $f : X \to Y$. La relación de homeomorfismo es una relación de equivalencia en la colección de los espacios topológicos, y en Topología, dos espacios que son homeomorfos son considerados como "esencialmente" el mismo espacio.

Ejemplo 1.12 *La función exponencial* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, *dada por* $\exp(t) = e^t$ *es un homeomorfismo. La función tangente* $\tan : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ *es un homeomorfismo, entonces, todo intervalo abierto es homeomorfo con la recta.* □

Ejemplo 1.13 *La proyección estereográfica en una esfera de dimensión* n *es un homeomorfismo entre* $S^n - \{e_{n+1}\}$ *y* $\mathbb{R}^n$. □



Ejemplo 1.14 *La esfera* S^n *es homeomorfa con la frontera del* $(n+1)$*-cubo* $\partial(I^{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. *Los detalles de dejan como ejercicio.* □



1.6. Convergencia

Una *sucesión* en un conjunto X es una aplicación $s : \mathbb{N} \to X$ donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Denotamos usualmente $s = (x_n)$ y $s(n) = x_n$.

Se dice que la sucesión (x_n) *está eventualmente* en $A \subseteq X$ si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n > N$. Se dice que la sucesión (x_n) *está frecuentemente* en $A \subseteq X$ si para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n > N$ tal que $x_n \in A$.

Sean (X, d) un espacio pseudométrico, y (x_n) una sucesión en X. Se dice que (x_n) *converge* en X si existe $x \in X$ tal que (x_n) está eventualmente en cada vecindad de x. Se dice en tal caso que (x_n) *converge a* $x \in X$, ó equivalentemente que x es *un límite* para la sucesión (x_n).

Proposición 1.14 *Sea (X, d) un espacio pseudométrico (X, d), entonces (X, d) es un espacio métrico si y sólo si toda sucesión d-convergente en X tiene un límite único.*

Demostración. Que la pseudométrica d sea una métrica es la única forma de garantizar que para dos puntos distintos existen bolas ajenas que contienen a cada uno de ellos. Equivalentemente, la distancia entre dos puntos distintos es estrictamente positiva si y sólo si d es una métrica. ■

Nótese que en un espacio pseudométrico que no es métrico, es posible definir sucesiones convergentes con más de un límite. Si $d(x, y) = 0$ con $x \neq y$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) \neq \varnothing$. Tomando un punto $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap B_{\frac{1}{n}}(y)$ se obtiene una sucesión (x_n) tal que $x_n \to x$ y también $x_n \to y$.

Una sucesión (x_n) tiene una *subsucesión convergente* en X, si existe $x \in X$ tal que (x_n) está frecuentemente en cada vecindad de x.

La *convergencia* es un fenómeno íntimamente ligado con la continuidad, y de hecho pueden considerarse dos manifestaciones distintas del mismo fenómeno.

Teorema 1.15 *Dados dos espacios métricos X, Y, una aplicación f :*

$X \to Y$ es continua en $x \in X$, si y sólo si para toda sucesión (x_n) en X tal que $x_n \to x$ se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.

Demostración. Ejercicio. ■

Debido a propiedades que exploraremos próximamente, las sucesiones constituyen un modelo suficiente para la convergencia en espacios métricos.

1.7. El cubo de Hilbert

El cubo de Hilbert[8] es un ejemplo particularmente importante, dado que como veremos, es un modelo universal para los espacios métricos. Es claro que el producto de una cantidad finita de espacios métricos $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$, es de forma natural un espacio métrico mediante

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} d_k(x_k, y_k)^2},$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$. No obstante, no es claro que un producto arbitrario tenga estructura métrica.

Consideremos el producto

$$H = \prod_{k=0}^{\infty} \left[0, \frac{1}{2^n}\right],$$

y definamos sobre él la aplicación

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}.$$

Por el criterio de comparación es claro que d está bien definida, y mediante paso al límite, es claro también que es una métrica. El espacio métrico

[8]David Hilbert (1862 - 1943), matemático alemán.

(H, d) se conoce como el *cubo de Hilbert*, su universalidad proviene del hecho de que es un espacio compacto debido al Teorema de Tychonoff[9], cuyo enunciado es básicamente que un producto es compacto si y sólo si cada factor es compacto.

El teorema de Tychonoff es un resultado muy profundo de la Matemática Cantoriana, pues como demostró Kelley[10][34] en 1950, es equivalente con el axioma de elección. El cubo de Hilbert es un subespacio del *espacio de Hilbert* l^2, cuyos elementos son las sucesiones reales de cuadrado convergente.

1.8. Ejercicios

1. Demuestre que un subespacio pseudométrico es un espacio pseudométrico.

2. Demuestre que una bola relativa es una bola, es decir, que si (A, d) es un subespacio pseudométrico de (X, d), para $a \in A$ y $\varepsilon > 0$ se define

$$B_{\varepsilon,A}(a) = \{b \in A | d(a, b) < \varepsilon\},$$

entonces $B_{\varepsilon,A}(a) = B_{\varepsilon}(a) \cap A$.

3. Proporcione un ejemplo de un conjunto A y un punto $x \in A$ en un espacio pseudométrico (X, d), de forma que x no es ni punto de acumulación ni punto interior de A.

4. Demuestre que $\overline{A} = A^{\circ} \cup A'$ o proporcione un contraejemplo.

5. Demuestre que $\partial A \subseteq \overline{A}$.

6. Demuestre que para todo conjunto A en un espacio pseudométrico (X, d) se satisface que $\overline{(\partial A)^c} = X$.

[9] Andrey Nikolayevich Tychonoff (1906 - 1993), matemático ruso.
[10] John Leroy Kelley (1916 - 1999), matemático norteamericano.

7. Proporcione un ejemplo de un espacio pseudométrico (X, d) y una sucesión convergente en X que tenga más de un punto límite. Demuestre que esto no es posible en un espacio métrico.

8. Caracterice las bolas en cada uno de los ejemplos de espacios pseudométricos proporcionados en el texto.

9. Sea (X, δ) un espacio pseudométrico, y sobre él, considérese la relación de equivalencia dada por $x \sim y$ si y sólo si $\delta(x, y) = 0$. Demuestre que la aplicación dada por $d([x], [y]) = \delta(x, y)$ sobre $X/\sim$ está bien definida y es una métrica.

10. Demuestre que la colección $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$, donde

$$X_t = \left\{ \left(n, \frac{t}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}_+ \right\},$$

es una partición de $X = \mathbb{N}_+ \times \mathbb{R}$. Denotemos por $\sim$ la relación de equivalencia tal que $X/\sim = \{X_t | t \in \mathbb{R}\}$.

   a) Demuestre que la aplicación dada por $d(X_t, X_r) = \text{ínf}\{|x - y| : (x, y) \in X_t \times X_r\}$ es una pseudométrica sobre X, pero no es una métrica.

   b) Demuestre que la aplicación $\Phi : \mathbb{R} \to X/\sim$, dada por $\Phi(t) = X_t$, es una biyección continua.

   c) Demuestre que Φ no es un homeomorfismo.

11. Demuestre que el producto finito de espacios métricos es un espacio métrico. (*Sugerencia: use la desigualdad de Minkowski*).

12. Dos métricas d y δ sobre un mismo conjunto X son *equivalentes* si toda d-bola es unión de δ-bolas y viceversa. Demuestre que toda métrica d es equivalente con "su" métrica acotada $D = \frac{d}{1+d}$.

13. Sean (X, d) un espacio métrico y r un número real positivo, demuestre que $D_r = \frac{rd}{1+d}$ es una métrica acotada sobre X, y que es equivalente con d.

14. Sean $X \neq \varnothing$ un conjunto, (Y, d) un espacio pseudométrico y $f : X \to Y$ una aplicación, defínase sobre X: $\delta(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$. Demuestre que (X, δ) es un espacio pseudométrico. Se dice que δ es la *pseudométrica inicial* sobre X inducida por f.

15. Sea (Y, d) un espacio métrico. Demuestre que la pseudométrica inicial inducida por una aplicación $f : X \to Y$ no es necesariamente una métrica.

16. Sean (X, d) un espacio pseudométrico, $Y \neq \varnothing$ un conjunto, y $f : X \to Y$ una aplicación suprayectiva. Si se define sobre Y la función δ dada por $\delta(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$, determine bajo qué condiciones δ es una pseudométrica sobre Y.

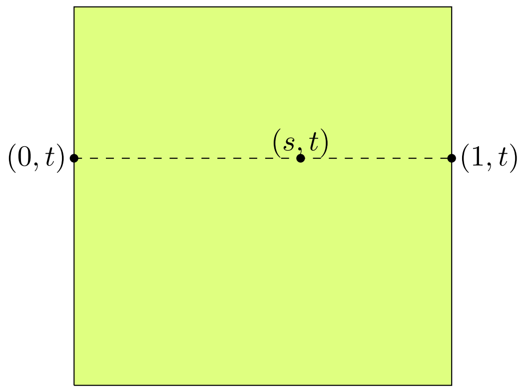
17. Demuestre que la equivalencia de pseudométricas es una relación de equivalencia entre pseudométricas.

18. Dos espacios pseudométricos (X, d) y (Y, δ) son equivalentes si existe un homeomorfismo $f : X \to Y$, tal que d es equivalente con la pseudométrica inicial inducida por f. Demuestre que la equivalencia de espacios pseudométricos es una relación de equivalencia entre espacios pseudométricos.

19. Demuestre que sobre el plano, la métrica euclidiana, la *métrica de la suma* $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ y la *métrica del máximo* $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ son todas equivalentes.

20. Demuestre que el producto numerable de espacios métricos es un espacio métrico, haciendo uso del hecho que toda métrica es equivalente con una métrica acotada. (*Sugerencia: use la desigualdad de Minkowski*).

21. Considérese, para $I = [0, 1]$, el espacio métrico $I \times I \subseteq \mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana, y sobre él la relación de equivalencia $(0, t) \sim (1, t)$, para todo $t \in I$. Si $C = I \times I / \sim$, determine una pseudométrica sobre $I \times I$, de manera que la proyección $p : I \times I \to C$ induzca una métrica sobre C.



Se obtiene así una métrica sobre el cilindro, a partir de una pseudométrica sobre el cuadrado.

Capítulo 2

Espacios Topológicos

Las ideas topológicas están presentes en prácticamente todas las disciplinas matemáticas contemporáneas, y en muchos casos, como por ejemplo en el Análisis, constituyen su columna vertebral. Sus orígenes pueden rastrearse hasta la antigua civilización griega, en la que se descubre el hecho de que en un poliedro regular se satisface $v - a + c = 2$, donde v es el número a vértices, a en número de aristas y c el de caras. Es un hallazgo de Poincaré[1] que la misma relación se cumple para un poliedro cualquiera, con independencia de si es o no regular. Se descubre así el primer invariante topológico.

La formulación del Cálculo por Cauchy[2], con la introducción del concepto de límite caracteriza como hechos topológicos la continuidad y la diferenciabilidad. La covergencia se revela como una de las formas en las que se manifiesta la continuidad.

Hacia 1865, Möbius[3] describe la llamada banda de Möbius, con lo que se pone de manifiesto que los espacios euclidianos no constituyen un modelo suficiente para los espacio topológicos, puesto que sus propiedades no son en todos los casos, hereditarias a subespacios. En los primeros años del siglo

[1]Henri Poicaré (1854 - 1912), matemático intuicionista francés, precursor de la Topología Algebraica.

[2]Agustin Louis Cauchy (1768 - 1857), matemático francés.

[3]August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), matemático alemán.

XX, Sierpiński[4] da a conocer el ejemplo de espacio topológico que lleva su nombre, evidenciando que la separación de puntos en un espacio es un asunto más delicado de lo que pudiera hacer parecer la exploración de los espacios euclidianos.

Se hace necesaria la construcción de una teoría que se encargue de este tipo de estudios, y se inicia la configuración del ahora omnipresente cuerpo de conocimientos, siendo el de Kuratowski[5][38] uno de los primeros textos de Topología, y que es prácticamente un compendio. En él incorporó lo que se conocería luego como los axiomas de cerradura de Kuratowski, una forma alternativa de definir una topología. El ahora clásico libro de Kuratowski se publica por vez primera en polaco hacia 1958.

Muchos años de investigación matemática condujeron a la formulación del concepto de espacio topológico, el cual es el centro de atención de este capítulo.

2.1. Espacios Topológicos

Para reunir todos los elementos necesarios que nos permitan tratar con espacios topológicos, deberemos demostrar algunos hechos básicos a propósito de conjuntos. Recordemos que dada una familia $\mathcal{F} = \{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ de subconjuntos de un conjunto dado X, la unión de la familia[6] $\mathcal{F}$ se define como la unión de los conjuntos que son elementos de $\mathcal{F}$, es decir:

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$$

y es el conjunto de todos los elementos de X que pertenecen al menos a un elemento de la familia $\mathcal{F}$.

De manera completamente análoga definimos la intersección de una fa-

[4] Wacław Franciszek Sierpiński (1882 - 1969), matemático polaco.

[5] Kazimierz Kuratowski (1896 - 1980), matemático polaco.

[6] Los términos *colección* y *familia* serán considerados como sinónimos de *conjunto* en el sentido cantoriano, es decir, sujetos a la axiomática de Zermelo-Fraenkel-Cantor.

milia de conjuntos $\mathcal{F}$ como

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha,$$

que es el conjunto de los elementos de X que pertenecen a todos los elementos de la familia X.

El caso en el que la $\mathcal{F} = \varnothing$ es de particular importancia.

Proposición 2.1 *La unión de una familia vacía es el conjunto vacío, es decir*

$$\bigcup \varnothing = \varnothing.$$

Demostración. Supongamos que $\cup\varnothing \neq \varnothing$ y sea $x \in \cup\varnothing$, entonces $x \in A$ para todo $A \in \varnothing$, pero dado que $A \notin \varnothing$ para todo conjunto A, entonces tal x no puede existir y en consecuencia queda demostrada la proposición. ∎

Como puede observarse, la veracidad de la proposición recién demostrada no tiene relación alguna con el conjunto de referencia X, de manera que se satisface en general. Contrariamente al caso recién considerado, la proposición que sigue, debido a la inexistencia del conjunto de todos los conjuntos, requiere de la participación de un conjunto de referencia.

Proposición 2.2 *La intersección de una familia vacía de subconjuntos de X es X, simbólicamente*

$$\bigcap \varnothing = X.$$

Demostración. Dada una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos, denotemos por $\widetilde{\mathcal{F}} = \{A^c | A \in \mathcal{F}\}$ la familia que contiene a los complementos de los elementos de $\mathcal{F}$. Tenemos entonces que $\widetilde{\varnothing} = \varnothing$ y aplicando las leyes de DeMorgan y la proposición anterior

$$\left(\bigcap \varnothing\right)^c = \bigcup \widetilde{\varnothing} = \bigcup \varnothing = \varnothing$$

de donde claramente $\cap\varnothing = \varnothing^c = X$. ∎

El resultado anterior puede ser obtenido gracias a que los conjuntos considerados se encuentran contenidos en un conjunto de referencia. Es debido a ello que se posibilita considerar el "complemento" que es una noción relativa. Es claro entonces, que la noción de intersección de una colección vacía es también una idea relativa.

Una *topología* sobre el conjunto X es una familia de subconjuntos $\tau \subseteq 2^X$ que satisface los dos axiomas siguientes:

1. La unión de una familia arbitraria de elementos de τ es un elemento de τ.

2. La intersección de una familia finita de elementos de τ es un elemento de τ.

Los elementos de una topología τ se dice que son *conjuntos abiertos* respecto de τ, o bien que son τ-abiertos. Con esta terminología los axiomas anteriores pueden reescribirse diciendo que la unión arbitraria de abiertos es abierta y que la intersección finita de abiertos es abierta.

Proposición 2.3 *Si τ es una topología para el conjunto X, entonces $\varnothing \in \tau$ y $X \in \tau$.*

Demostración. Basta tomar colecciones vacías de elementos de τ. ■

De acuerdo con el resultado previo, el vacío y el total son abiertos en cualquier topología, y de hecho la colección $\{\varnothing, X\}$ es una topología sobre el conjunto X, la mínima topología posible.

Un *espacio topológico* es un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una topología sobre X. Se dice que el conjunto X es el *conjunto subyacente* al espacio topológico (X, τ). Si no hay lugar a confusión acerca de la topología τ haremos referencia al espacio topológico X, prescindiendo de la referencia a la topología τ. Los elementos de un espacio topológico se llaman *puntos.*

Ejemplo 2.1 *La topología más grande que admite un conjunto X es su conjunto potencia 2^X que contiene a todos los subconjuntos de X, es decir,* *en esta topología todos los conjuntos son abiertos. Esta topología se llama la topología discreta en virtud de que cada punto del espacio tiene una vecindad quen no comparte con ningún otro punto. La topología discreta es la topología generada por la métrica discreta.*□

Ejemplo 2.2 *La topología más pequeña que admite un conjunto* X *es* $\tau = \{\varnothing, X\}$, *que recibe el nombre de topología indiscreta, debido a que en ella todos los puntos del espacio deben compartir la misma vecindad. La topología indiscreta es la topología generada por la pseudométrica indiscreta.*□

Ejemplo 2.3 *Dado el conjunto* $X = \{a, b\}$ *donde* $a \neq b$, *el conjunto* $\mathcal{S} = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ *es una topología para* X *en la que debe notarse que dos puntos distintos no admiten vecindades ajenas, más aún, dados dos puntos, no necesariamente existe una vecindad de cada uno de ellos que no contenga al otro. Esta topología se conoce como la topología de Sierpinski, luego de haber sido descubierta por el matemático polaco Wacław Sierpiński* (1882 - 1969) *y usada profusamente como contraejemplo.*□

Ejemplo 2.4 *Los abiertos de la recta real* $\mathbb{R}$ *son los subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *que pueden expresarse como unión de intervalos abiertos. La topología descrita por esta noción de conjunto abierto se conoce como la topología euclidiana.*□

Ejemplo 2.5 *Para un conjunto dado* X, *consideremos la familia* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de* X *que contiene a* $\varnothing$ *y a todo subconjunto* U *tal que su complemento* $U^c = X - U$ *es un conjunto finito. En el caso* $X = \mathbb{R}$, *los elementos de la familia descrita son rectas con una cantidad finita de puntos ausentes.*

La familia $\mathcal{C}$ *es una topología sobre* X *que recibe el nombre de topología cofinita. La figura anterior ilustra un abierto en la topología cofinita de la recta.* □

Ejemplo 2.6 *Sobre $X = \mathbb{R}$ podemos definir una variante interesante de la topología cofinita, consideremos como abiertos a todos los abiertos de la topología cofinita y además todos los conjuntos $U \subseteq X$ tales que $0 \notin U$.* $\square$

Ejemplo 2.7 *La topología conumerable se define de forma análoga a la topología cofinita, en ella los abiertos, además de $\varnothing$, son los conjuntos que tienen complemento numerable.* $\square$

Ejemplo 2.8 *Denotemos por $I = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^c$ el conjunto de los números irracionales. La recta real $X = \mathbb{R}$ dotada de la topología que tiene como abiertos, al vacío, y a los conjuntos de la forma $U \cup I$ donde los U es un abierto euclidiano. Este espacio topológico se conoce como la recta de Michael.* $\square$

Sea (X, τ) un espacio topológico, se dice que la colección de abiertos $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es una *base* para τ si todo abierto es unión de elementos de $\mathcal{B}$. Se dice que $\mathcal{S}$ es una *subbase* para τ si la familia $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base para τ. Claramente toda base es también una subbase, y toda topología es una base para sí misma. Dada una base $\mathcal{B}$ para una topología τ, decimos que todo elemento de τ es $\mathcal{B}$-abierto.

Dos bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ para la misma topología τ se dice que son *bases equivalentes*. Es decir, dos bases son equivalentes, si todo elemento de $\mathcal{B}_1$ es $\mathcal{B}_2$-abierto, y todo elemento de $\mathcal{B}_2$ es $\mathcal{B}_1$-abierto.

Ejemplo 2.9 *La colección de todos los intervalos abiertos de la recta real es una base para la topología euclidiana de $\mathbb{R}$. La colección de todos los intervalos abiertos de la forma (a, ∞) ó $(-\infty, b)$ es una subbase para la topología euclidiana de la recta.*$\square$

Ejemplo 2.10 *La familia de los conjuntos $U \subseteq X$, tales que U^c tiene cardinalidad 1, es una subbase para la topología cofinita de X.*$\square$

Ejemplo 2.11 *La colección de los intervalos de la forma $[a, b) \subset \mathbb{R}$ es base para una topología sobre $\mathbb{R}$, y la topología generada se conoce como la*

Topología del Límite Inferior, y la recta con esta topología, es llamada la Recta de Sorgenfrey[7]*. Nótese que todo abierto en la topología euclidiana es también abierto en la topología de Sorgenfrey.* □

Ejemplo 2.12 *Una base para la topología euclidiana de* $\mathbb{R}^n$ *es la familia de todas las bolas abiertas* $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : |x - y| < \varepsilon\}$ *y puede demostrarse con facil idad que esta familia es base para alguna topología. Igualmente, la familia de las cajas, es decir, de los productos de la forma* $I_1 \times \ldots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ *donde* $I_k = (a_k, b_k) \subseteq \mathbb{R}$ *es un intervalo abierto para* $k = 1, \ldots, n$ *es base para alguna topología. Un ejercicio interesante consiste en demostrar que toda bola es unión de cajas y toda caja es unión de bolas, con lo que tendremos que ambas bases son equivalentes.* □

Como veremos del siguiente resultado, no cualquier familia de subconjuntos es útil como base para una topología.

Teorema 2.4 *La familia* $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ *es base para alguna topología sobre el conjunto* X *si y sólo si:*

1. $\cup\mathcal{B} = X$.

2. *Toda intersección finita de elementos de* $\mathcal{B}$ *es unión de elementos de* $\mathcal{B}$.

Demostración. Supóngase que $\mathcal{B}$ es base para la topología τ sobre X, entonces $X \in \tau$ y en consecuencia X es unión de elementos de $\mathcal{B}$; por otra parte, si $U, V \in \mathcal{B}$ entonces $U, V \in \tau$ y $U \cap V \in \tau$ con lo que se satisface la segunda de las condiciones. Supongamos recíprocamente que $\mathcal{B}$ satisface las dos condiciones anteriores y denotemos por τ la familia de las uniones de elementos de $\mathcal{B}$, entonces cualquier unión de elementos de τ es una unión de elementos de $\mathcal{B}$, y además cualquier intersección finita de elementos de τ es la unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$, cada una de las cuales es por hipótesis una unión de elementos de $\mathcal{B}$. ■

[7] Robert Henry Sorgenfrey (1915 - 1996), matemático norteamericano.

Proposición 2.5 *La familia $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ es subbase para alguna topología sobre el conjunto X si y sólo si $\cup\mathcal{S} = X$.*

Demostración. Ejercicio. ■

Una relación de *orden parcial* "$\leq$" es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. La antisimetría significa que si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$. Un *conjunto parcialmente ordenado* ó *poset*[8] es un conjunto sobre el que se tiene definido un orden parcial. Un conjunto parcialmente ordenado se dice que es un *poset completo* si tiene un elemento máximo y un elemento mínimo. Un poset se dice que está *totalmente ordenado* si todo par de elementos es comparable, es decir, si dados dos elementos cualesquiera a y b se satisface que $a \leq b$ ó que $b \leq a$.

Este parece ser un momento oportuno establecer la diferencia entre el conjunto de los *ordinales finitos* $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ que es además el *primer ordinal numerable*, y el monoide[9] de los *números naturales* $\mathbb{N} = (\omega, +)$. Construyendo los ordinales recursivamente mediante $0 = \varnothing$ y $n + 1 = n \cup \{n\}$, la inclusión de conjuntos proporciona una estructura de Poset sobre ω.

El ordinal $\omega \cup \{\omega\}$ es un ordinal numerable estrictamente mayor que ω. El *primer ordinal no numerable* $\Omega = [0, \Omega)$ es el ordinal cuyos elementos son todos los ordinales finitos o numerables. El *cardinal* de ω es $\aleph_0$ y el cardinal de Ω es $\aleph_1$, por lo que con frecuencia denotamos $\omega = \omega_0$ y $\Omega = \omega_1$, además de $\#(\omega_0) = \aleph_0$ y $\#(\omega_1) = \aleph_1$.

Con la construcción descrita antes se tiene $\omega_0 = \aleph_0$ y $\omega_1 = \aleph_1$. Notemos además que $\#(\omega \cup \{\omega\}) = \aleph_0$, pero claramente $\omega \cup \{\omega\} \neq \aleph_0$. Como materiales de consulta para Teoría de los Conjuntos y Aritmética Ordinal se recomiendan los textos de Hernández [28], Amor Montaño [3, 4], el imprescindible Halmos[27] y el más elemental [52].

[8] Acrónimo de "partially ordered set".

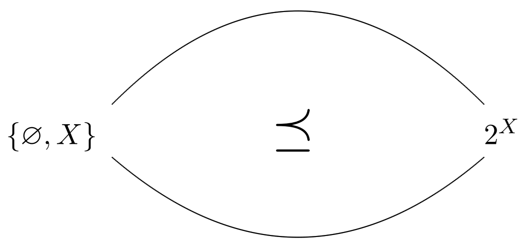
[9] Un *magma* es un par (M, μ) donde M es un conjunto no vacío y μ es una operación binaria sobre M. Un *monoide* es un magma asociativo con elemento identidad. En el capítulo 8 se presenta la noción de monoide desde la perspectiva de la Teoría de las Categorías.

Ejemplo 2.13 *Si* $(X, \leq)$ *es un poset, defínase* $a < b$ *sobre* X*, si* $a \leq b$ *y además* $a \neq b$*. La topología generada por los conjuntos de la forma* $\{x \in X | a < x < b\}$ *se conoce como la topología del orden.* $\square$

Consideremos un conjunto X y dos topologías τ_1 y τ_2 definidas sobre X, si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ decimos que τ_2 es *más fina* que τ_1 o bien que τ_1 es *más gruesa* que τ_2, lo que denotamos por $\tau_1 \preceq \tau_2$. Coloquialmente decimos que la topología más fina es la que tiene más abiertos.

Proposición 2.6 *Dado un conjunto* X*, la familia de las topologías definidas sobre* X *es un poset completo respecto de la relación* $\preceq$*.*

Demostración. La relación definida es claramente reflexiva antisimétrica y transitiva. La topología indiscreta es el elemento mínimo y la topología discreta es el elemento máximo. ■

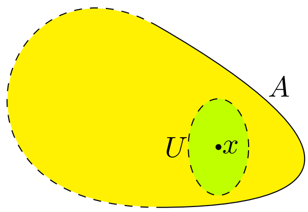


Proposición 2.7 *La intersección de topologías es una topología.*

Demostración. Ejercicio. ■

Los conjuntos abiertos son los subconjuntos de un espacio que definen su topología, notamos entonces que los abiertos son a la topología lo que las bolas son a la pseudométrica.

Una *vecindad* de un punto es un conjunto que contiene un abierto que contiene al punto, es decir, si $x \in A$ y existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq A$, decimos que A es una *vecindad* de $x \in X$. En ese caso también U es claramente una vecindad de x, se dice de hecho que es una *vecindad abierta*.



Dados un espacio topológico X y un punto $x \in X$, denotamos por $\mathcal{N}(x)$ la colección de todas las vecindades del punto x. Este conjunto $\mathcal{N}(x)$ es el *sistema de vecindades*[10] del punto $x \in X$.

Ejemplo 2.14 *Con la topología euclidiana,* $[0, 2) \subseteq \mathbb{R}$ *es una vecindad de* 1*, pero no lo es ni de* 0 *ni de* 2*.* $\square$

Ejemplo 2.15 *En la recta de Sorgenfrey,* $[0, 2] \subseteq \mathbb{R}$ *es una vecindad de* 0*, pero no lo es de* 2*.* $\square$

Teorema 2.8 *La familia de las colecciones de vecindades* $\{\mathcal{N}(x)|x \in X\}$ *tiene las propiedades siguientes:*

1. *Si* $B \in \mathcal{N}(x)$ *y* $B \subseteq A$*, entonces* $A \in \mathcal{N}(x)$*.*

2. *Toda unión de vecindades de* x *es una vecindad de* x*.*

3. *Toda intersección finita de elementos de* $\mathcal{N}(x)$ *es un elemento de* $\mathcal{N}(x)$*.*

[10] El conjunto $\mathcal{N}(x)$ se conoce también, y de hecho más propiamente, como *filtro de vecindades* de x. La razón para usar esta terminología será más clara en el capítulo 6.

4. *Si $A \in \mathcal{N}(x)$, entonces existe $B \in \mathcal{N}(x)$ tal que $A \in \mathcal{N}(y)$ para todo $y \in B$.*

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 2.9 *Un conjunto U es abierto si y sólo si $U \in \mathcal{N}(x)$ para todo $x \in U$.*

Demostración. Si U es abierto, entonces claramente U es vecindad de todos sus puntos. Recíprocamente, suponiendo que U es una vecindad de cada uno de sus puntos, para cada $x \in X$ elijamos un abierto $V_x \subseteq U$ tal que $x \in V_x$, claramente entonces

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x,$$

de donde U es unión de abiertos y en consecuencia es a su vez un conjunto abierto. Nótese que en el caso $U = \varnothing$, la proposición se satisface por vacuidad. ■

2.2. Conjuntos Cerrados

Dado un espacio topológico (X, τ), un conjunto $F \subseteq X$ se dice que es un *conjunto cerrado* si su complemento $X - F = F^c$ es abierto. La colección de los conjuntos cerrados será denotada por $\mathcal{F}$, queda definida mediante

$$\mathcal{F} = \{U^c | U \in \tau\},$$

y se dice que es el *sistema de cerrados* del espacio topológico (X, τ).

Teorema 2.10 *El sistema de cerrados $\mathcal{F}$ de un espacio topológico X, tiene las siguientes propiedades:*

1. *La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

2. *La unión de cualquier colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Además un conjunto es cerrado si y sólo si su complemento es abierto.

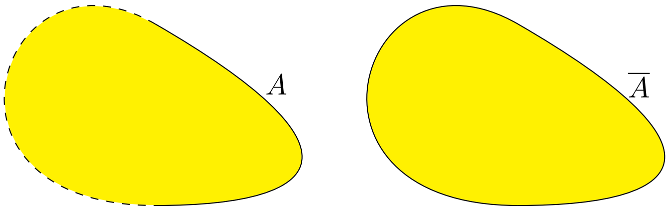
Demostración. Basta usar las leyes de De Morgan. ■

Se sigue inmediatamente que $\varnothing$ y X son conjuntos cerrados, de manera que estos dos conjuntos son simultáneamente abiertos y cerrados, el ejemplo de conjuntos como $[a, b) \subset \mathbb{R}$ muestra que en una topología puede haber conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados. Nos referiremos a $\varnothing$ y X como los *abiertos triviales* o bien los *cerrados triviales*.

Corolario 2.11 (*Sierpiński,* 1927) *La colección de los complementos de los elementos de una colección de conjuntos que satisfacen las condiciones del teorema anterior es una topología para el conjunto X.*

Demostración. Ejercicio. ■

La *cerradura* $\overline{A}$ de un conjunto A es la intersección de todos los cerrados que contienen a A. Por la discusión previa, la cerradura de un conjunto es un conjunto cerrado. De la definición se desprende que $A \subseteq \overline{A}$ y que $A = \overline{A}$ si y sólo si A es cerrado. Una consecuencia inmediata es que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. La cerradura suele también llamarse *clausura* ó *adherencia*. Los puntos en la cerradura de A se llaman entonces *puntos de adherencia* ó *puntos de clausura*.



Proposición 2.12 *Sea $\mathcal{A}$ una colección finita de conjuntos en un espacio topológico. La cerradura de la unión de $\mathcal{A}$ es la unión de las de las cerraduras de los elementos de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Para fijar ideas consideremos $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, si denotamos $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}\}$, lo que pretendemos demostrar es entonces que

$$\overline{\cup\mathcal{A}} = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k} = \cup\overline{\mathcal{A}}.$$

Cada cerrado que contiene a $\cup\mathcal{A}$ contiene a cada elemento de $\mathcal{A}$, de manera que $\cup\overline{\mathcal{A}} \subseteq \overline{\cup\mathcal{A}}$. Recíprocamente, un conjunto cerrado que contiene a cada elemento de $\mathcal{A}$ contiene a la unión, con lo que se obtiene $\overline{\cup\mathcal{A}} \subseteq \cup\overline{\mathcal{A}}$ quedando demostrada la afirmación. ■

Ejemplo 2.16 *La propiedad anterior no puede extenderse a uniones infinitas. Por ejemplo, si $A_n = [\frac{1}{n}, 2]$ para $n \in \mathbb{N}_+$, entonces A_n es cerrado, y puede verse como la cerradura de $B_n = (\frac{1}{n}, 2]$. Claramente*

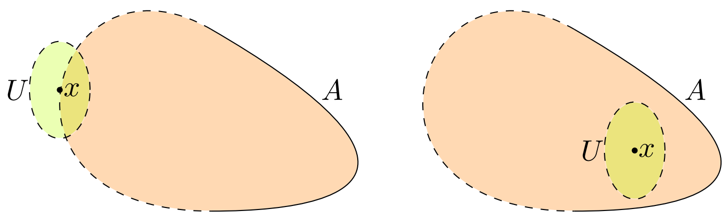
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} A_n = (0, 2].$$

El lector no tendrá dificultad en proporcionar otros ejemplos. □

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos que satisface las condiciones del teorema que caracteriza a los conjuntos cerrados, entonces, la colección de los complementos de los elementos de $\mathcal{F}$ es una topología. La siguiente es una caracterizacón de la cerradura en términos de vecindades.

Proposición 2.13 *Dados un espacio topológico X y $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ es tal que $x \in \overline{A}$ si y sólo si $U \cap A \neq \varnothing$ para toda $U \in \mathcal{N}(x)$.*

Demostración. Si $x \in \overline{A}$, entoces x es un elemento de cada cerrado que contenga al conjunto A, en particular, si U es un abierto y $x \in U$, entonces, $U \cap A \neq \varnothing$, ya que de lo contrario U^c es cerrado, $A \subseteq U^c$ y $x \notin U^c$, lo que contradice la hipótesis. Recíprocamente, sea $F \subseteq X$ un cerrado con $A \subseteq F$, si $x \notin F$, entonces F^c es una vecindad de x que no tiene elementos comunes con A, de forma que nuevamente encontramos una contradicción. ■



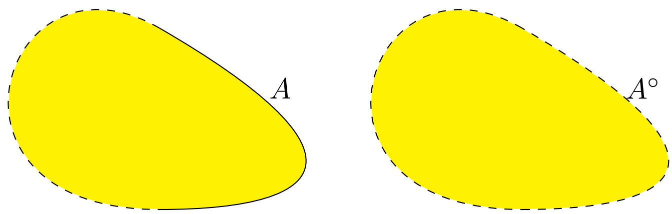
Proposición 2.14 *Para dos subconjuntos cualesquiera A y B de un espacio topológico X se satisfacen:*

1. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, *y*

2. $\overline{A} - \overline{B} \subseteq \overline{A - B}$.

Demostración. Ejercicio. ■

El *interior* de un conjunto A es la unión de todos los abiertos contenidos en A y se denota por A°. Claramente A° es un conjunto abierto.



Proposición 2.15 *El interior de A es el máximo abierto contenido en A.*

Demostración. Supongamos que U es un abierto tal que $A^\circ \subseteq U \subseteq A$, entonces, por definición de interior $U \subseteq A^\circ$, de manera que $A^\circ = U$ con lo que queda demostrada la proposición. ■

El *exterior* de A es la unión de todos los abiertos ajenos con A, es decir, la unión de todos los abiertos contenidos en A^c. En consecuencia, el exterior de A es el interior de A^c, o sea, el conjunto $(A^c)^\circ = \overline{A}^c$.

Proposición 2.16 *Un conjunto U es abierto si y sólo si para todo $x \in U$ existe un abierto V_x tal que $x \in V_x \subseteq U$.*

Demostración. Supongamos que U es abierto, entonces basta hacer $V_x = U$ para todo $x \in U$. Recíprocamente, dada la existencia de tales V_x abiertos, entonces claramente

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x,$$

de donde U es unión de abiertos y por consecuencia es abierto. ■

La siguiente es una útil caracterización del interior de un conjunto.

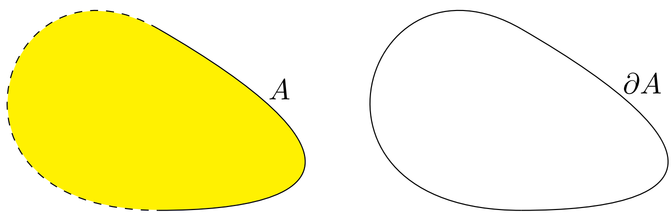
Proposición 2.17 *Dado un conjunto A se satisface que $A^\circ = \left(\overline{A^c}\right)^c$.*

Demostración. Dado que $A^c \subseteq \overline{A^c}$, entonces $\left(\overline{A^c}\right)^c \subseteq A$ y es abierto, de manera que $\left(\overline{A^c}\right)^c \subseteq A^\circ$. Recíprocamente, si $x \in \overline{A^c}$, entonces para toda

$U \in \mathcal{N}(x)$ se tiene que $U \cap A^c$, es decir, no hay ninguna vecindad de x contenida en A, por lo que $x \in (A^\circ)^c$; tenemos entonces que $\overline{A^c} \subseteq (A^\circ)^c$ de donde $A^\circ \subseteq \left(\overline{A^c}\right)^c$. ■

Está claro que el exterior $(A^c)^\circ$ y el interior A° de un conjunto dado A son abiertos ajenos, y los puntos que no son ni exteriores ni interiores son llamados *puntos frontera*. La *frontera* del conjunto A es el conjunto de sus puntos frontera, y la denotaremos[11] por ∂A.

El *interior* de un conjunto A es la unión de todos los abiertos contenidos en A y se denota por A°. Claramente A° es un conjunto abierto.



Proposición 2.18 *Para todo conjunto* $A \subseteq X$ *se satisface que* $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Demostración. Claramente $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ y $((A^c)^\circ)^c = \overline{A}$, de donde

$$\partial A = [A^\circ \cup (A^c)^\circ]^c = (A^\circ)^c \cap ((A^c)^\circ)^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

como se quería demostrar. ■

De las definiciones se desprende con claridad que $\varnothing^\circ = \overline{\varnothing} = \partial(\varnothing) = \varnothing$, además de que $X^\circ = \overline{X} = X$, pero $\partial X = \varnothing$. Por otra parte, los operadores interior y cerradura son *idempotentes*, es decir:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \text{y} \quad (A^\circ)^\circ = A^\circ.$$

[11]La notación más usual en la literatura castellana es $Fr(A)$, o bien $Bd(A)$ en la literatura sajona. En el último caso, se trata de una abreviación de "boundary".

Además, el operador frontera es también idempotente, en el sentido de que

$$\partial(\partial A) = \partial A.$$

Las demostraciones son inmediatas y se consideran ejercicio. Las siguientes son algunas propiedades interesantes del operador frontera, cuya demostración debiera estar al alcance del lector.

Proposición 2.19 *Para conjuntos cualesquiera A y B en un espacio topológico X se satisface:*

1. $\overline{A} = A \cup (\partial A)$,
2. $\partial A = \overline{A} - A^\circ$,
3. $(A \cup B) \cup \partial(A \cup B) = (A \cup \partial A) \cup (B \cup \partial B)$.

Demostración. Ejercicio. ■

Un punto $x \in X$ se dice que es un *punto de acumulación* de A si $(U - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$ para toda $U \in \mathcal{N}(x)$. El conjunto de los puntos de acumulación de un conjunto dado A se llama el *conjunto derivado* de A y se denota por A', de manera entonces que $x \in A'$ si y sólo si $x \in \overline{A - \{x\}}$

Proposición 2.20 *Todo punto de acumulación es un punto de adherencia*

Demostración. Ejercicio. ■

Como veremos en las proposiciones que siguen, el conjunto derivado goza de propiedades por demás interesantes.

Proposición 2.21 *Sean X un espacio topológico y $A_1, \ldots, A_n$ una colección finita de subconjuntos de X, entonces*

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)' = \bigcup_{k=1}^{n} A_k'.$$

Demostración. Ejercicio. ■

Ejemplo 2.17 *La propiedad anterior no se cumple para uniones infinitas. Tomemos por caso la sucesión de subconjuntos de la recta euclidiana* $A_n = \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$ *definidos para todo natural positivo. Mientras que*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} A_n = (-1,1)$$

tenemos $A_n' = A_n$ *para todo* n*, y en contraparte* $(-1,1)' = [-1,1]$. □

Proposición 2.22 *Sean* X *un espacio tgopológico y* $A \subseteq X$*. Entonces* $x \in A'$ *si y sólo si* $x \in (A - \{x\})'$*.*

Demostración. Basta notar que $(A - \{x\}) - \{x\} = A - \{x\}$. ■

Proposición 2.23 *Si* $A \subseteq B$*, entonces* $A' \subseteq B'$*.*

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 2.24 *Sean* X *un espacio topológico y un punto* $x \in X$*, entonces* $x \notin \{x\}'$*.*

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 2.25 *Para todo conjunto* A *en un espacio topológico* X *se satisface* $\overline{A} = A \cup A'$*.*

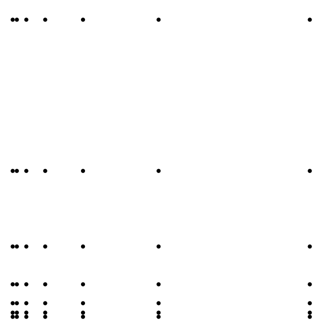
Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 2.26 *El derivado* A' *es un conjunto cerrado.*

Demostración. Supongamos que $x \notin A'$, y sea $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \cap (A - \{x\}) = \varnothing$. Si $y \in U$, entonces $y \notin \overline{A - \{x\}}$, en particular $y \notin (A - \{x\})' \subseteq A'$, de manera entonces que $U \cap A' = \varnothing$. ■

Corolario 2.27 *Para todo conjunto A en un espacio topológico X se satisface $A'' \subseteq A'$.*

Ejemplo 2.18 *Este es en realidad el mejor resultado posible, ya que es posible encontrar puntos en A' que no son puntos de A''. Tomemos por caso el conjunto $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) | m, n \in \mathbb{N}_+\} \subset \mathbb{R}^2$.* □



Mientras que $A' = \{(0, \frac{1}{m}) | m \in \mathbb{N}_+\} \cup \{(\frac{1}{n}, 0) | n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{(0,0)\}$ se tiene que $A'' = \{(0,0)\}$. □

Un conjunto A se dice que es *denso* en X si $\overline{A} = X$. Un espacio se dice *separable* si contiene un denso numerable.

Ejemplo 2.19 *El conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, de manera que $\mathbb{R}$ es un espacio separable. Todo conjunto infinito es denso es un espacio cofinito. Todo conjunto es denso en un espacio indiscreto. No hay conjuntos densos distintos del total en un espacio discreto.* □

Un punto $x \in X$ es un *punto aislado* de A si $x \in A - A'$, y el conjunto $A - A'$ se conoce como el conjunto de los puntos aislados de A. Un conjunto se dice que es un *conjunto aislado* si no tiene puntos de acumulación.

Ejemplo 2.20 *El punto $2 \in \mathbb{R}$ es aislado en el conjunto $[0,1] \cup \{2\}$. Todo conjunto finito y todo conjunto discreto son conjuntos aislados en $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana.* $\square$

Un conjunto A se dice *denso en sí mismo* si no tiene puntos aislados, es decir, si $A \subseteq A'$. Nótese que para un conjunto denso en sí mismo se satisface que $\overline{A} = A \cup A' = A'$.

Ejemplo 2.21 *Un intervalo semiabierto de la forma $[a,b)$ en la recta euclidiana es denso en sí mismo pero no es ni abierto ni cerrado. El subespacio $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y es además denso en sí mismo.* $\square$

Un conjunto es *perfecto* si es cerrado y denso en sí mismo.

Ejemplo 2.22 *Un intervalo cerrado en la recta euclidiana es perfecto.* $\square$

Ejemplo 2.23 *En la recta euclidiana, el intervalo $[0,1)$ no es un conjunto perfecto, porque no es cerrado, en tanto que el conjunto $[0,1] \cup \{2\}$ no es un conjunto perfecto, porque no es denso en sí mismo.* $\square$

2.3. Topología Relativa

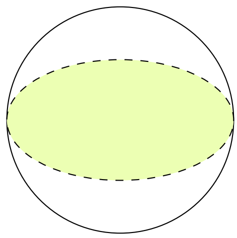
Dados un espacio topológico X y un subconjunto A, podemos definir una topología sobre A en la que los abiertos tienen la forma $A \cap U$ donde U es un abierto en X. Del hecho que

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (A \cap U_\alpha)$$

y

$$A \cap (U_1 \cap \ldots \cap U_n) = (A \cap U_1) \cap \ldots \cap (A \cap U_n),$$

queda claro que los conjuntos recién definidos determinan una topología sobre A que depende de la topología de X. Esta topología se conoce como la *topología relativa* ó *topología de subespacio*. Una vez que A se ha topologizado de la manera descrita, pasa de ser un subconjunto a ser un *subespacio* de X.



Ejemplo 2.24 *La topología de subespacio sobre* $\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^n$*, para* $k \leq n$ *es la topología euclidiana si la topología sobre* $\mathbb{R}^n$ *es la euclidiana. La figura anterior ilustra el k-disco* D^k *como subespacio del* n *disco* D^n*.* $\square$

Ejemplo 2.25 *La topología de subespacio en un espacio discreto es la discreta, en un indiscreto es la indiscreta y en un cofinito es la cofinita.* $\square$

Ejemplo 2.26 *La topología relativa de* $\mathbb{Z}$ *en* $\mathbb{R}$*, con la topología euclidiana, es la discreta.* $\square$

Proposición 2.28 *Sean* X *un espacio topológico y* $A \subseteq X$*. La topología sobre* A *es la topología de subespacio si y sólo si* $A \cap F$ *es cerrado en* A *para todo cerrado* F *en* X*.*

Demostración. Basta observar que los cerrados son los complementos de los abiertos y $A - (A \cap F) = A - F = A \cap F^c$. $\blacksquare$

Proposición 2.29 *Sean* X *un espacio topológico y* $A \subseteq X$ *un subespacio. Si* $\mathcal{B}$ *es una base para la topología de* X*, entonces* $\mathcal{B}_A = \{B \cap A | B \in \mathcal{B}\}$ *es una base para la topología de subespacio de* A*.*

Demostración. Ejercicio. $\blacksquare$

Proposición 2.30 *Sean* X *un espacio topológico y* $A \subseteq X$ *un subespacio. Si* $\mathcal{S}$ *es una subbase para la topología de* X*, entonces* $\mathcal{S}_A = \{S \cap A | S \in \mathcal{S}\}$ *es una subbase para la topología de subespacio de* A*.*

Demostración. Ejercicio. $\blacksquare$

2.4. Numerabilidad

La especificación de una base es una forma eficiente de definir una topología sobre un espacio dado, y la posibilidad de encontrar una base con los requisitos mínimos es siempre una situación deseable. Una base finita genera una topología finita, sin embargo una base numerable puede tener la capacidad de generar una topología de cardinalidad sensiblemente mayor.

Un espacio topológico que admite una base numerable se dice que es 2°-*numerable*[12], o que satisface el *segundo axioma de numerabilidad*.

Ejemplo 2.27 *El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable, ya que admite como base la colección de las bolas con radio racional y con centro en un punto con coordenadas racionales.* □

Una *base local*[13] en $x \in X$ es una colección $\mathcal{B}_x$ de abiertos que genera el sistema de vecindades de x, es decir, tal que para toda $N \in \mathcal{N}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq N$. Un espacio X se dice que es 1°-*numerable*[14] si admite una base local numerable en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 2.28 *La recta de Sorgenfrey es 1°-numerable, dado que, por ejemplo, los intervalos de la forma $\left[0, \frac{1}{n}\right)$ constituyen una base local en 0.* □

Ejemplo 2.29 *Todo espacio métrico es 1°-numerable.* □

Ejemplo 2.30 *La recta con la topología cofinita no es ni 1°-numerable ni 2°-numerable. Lo mismo ocurre con la topología conumerable.* □

Proposición 2.31 *Todo espacio 2°-numerable es 1°-numerable.*

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 2.32 *Todo espacio 2°-numerable es separable.*

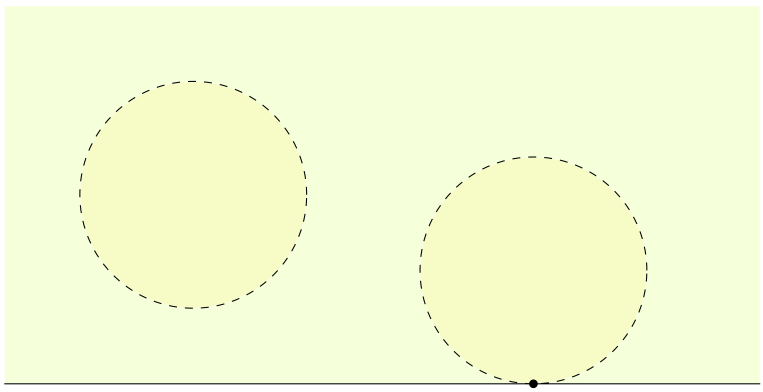
[12] En algunos textos se usa como sinónimo el término *completamente separable.*

[13] Equivalentemente: *sistema fundamental de vencidades.*

[14] Se usa también como sinónimo el término *débilmente separable.*

Demostración. Sean X es espacio 2°-numerable y $\mathcal{B}$ una base numerable. Sean ahora $\varphi : \mathcal{B} \to X$ una aplicación[15] tal que $\varphi(U) = x_U \in U$ y D la imagen de φ, entonces claramente D es denso y a lo sumo numerable. ■

Ejemplo 2.31 *El Plano de Moore es uncaso de espacio* $1°$*-numerable que no es* $2°$*-numerable. Se define como* $X = \mathbb{R} \times [0, \infty)$*, cuya topología tiene como base las bolas euclidianas* $B_\varepsilon(x, y)$ *con* $\varepsilon \leq |(x, y)|$ *para las vecindades de los puntos* $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$*, y de la forma* $B_y(x, y) \cup \{(x, 0)\}$ *con* $y > 0$ *para las vecindades de los puntos* $(x,0) \in X$*.*



Los detalles son considerados ejercicio. □

2.5. Continuidad

Sean X , Y dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es *continua* si para todo $U \subseteq Y$ abierto se tiene que $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto. En términos locales, supóngase que $f(x) = y$, la aplicación f es *continua en* $x \in X$ si y sólo si $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x)$ para toda $U \in \mathcal{N}(y)$.

Ejemplo 2.32 *Toda aplicación constante* $c : X \to Y$ *es continua, ya que las preimágenes posibles son* $\varnothing$ *y* X*.* □

[15]Este es un ejemplo de función de elección.

Ejemplo 2.33 *Toda aplicación identidad* $1 : X \to X$ *es continua, siempre que la topología sobre el dominio es más fina que la topología sobre el codominio.* □

Ejemplo 2.34 *La función escalón de Heaviside* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *no es continua en cero con la topología euclidiana. No obstante, es continua en cada uno de sus puntos si el dominio es la recta de Sorgenfrey.* □

Ejemplo 2.35 *La función de Dirichlet* $\Delta : I \to \{0, 1\}$ *no es continua con la topología euclidiana, pero es continua si el intervalo* I *tiene la topología discreta. Incluso, para la topología* $\tau = \{I, I \cap \mathbb{Q}, I \cap \mathbb{Q}^c, \varnothing\}$, *la función* Δ *es continua.* □

Ejemplo 2.36 *Toda aplicación definida sobre un dominio discreto es continua. Toda aplicación con codominio indiscreto es continua.* □

Proposición 2.33 *Una aplicación* $f : X \to Y$ *es continua si y sólo si para todo* $x \in X$ *y toda* $U \in \mathcal{N}(f(x))$ *se tiene que* $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x)$.

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 2.34 *La composición de aplicaciones continuas es una aplicación continua.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas, y sea $U \subseteq Z$ abierto, entonces $g^{-1}(U) \subseteq Y$ es abierto por la continuidad de g y

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X$$

es abierto por la continuidad de f. ■

El resultado anterior es ciertamente elemental, pero su importancia no es menor, dado que permite incorporar estructuras algebraicas sobre los espacios de funciones, al igual que el próximo.

Proposición 2.35 *La restricción de una continua es continua.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ una aplicación continua y A un subespacio de X, entonces, para $U \subseteq Y$ abierto, claramente $(f|_A)^{-1}(U) = f^{-1}(A) \cap A$ que es abierto en A. ■

Es siempre útil tener caracterizaciones distintas de un fenómeno, y en este caso de la continuidad, de manera que pueda ser reconocible bajo circunstancias diversas.

Teorema 2.36 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *La aplicación $f : X \to Y$ es continua,*

2. *$f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ para todo $B \subseteq Y$,*

3. *$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$,*

4. *La preimagen de cerrados es cerrada.*

Demostración. Procederemos de forma circular $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$:

$(1 \Rightarrow 2)$. Basta notar que por continuidad $f^{-1}(B^\circ)$ es abierto, y que como $B^\circ \subseteq B$, entonces $f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)$.

$(2 \Rightarrow 3)$. Sean $y \in f(\overline{A})$, $x \in \overline{A}$ tal que $y = f(x)$ y $U \subseteq Y$ una vecindad abierta de $y \in Y$, entonces $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U)^\circ$. Si $a \in f^{-1}(U)^\circ \cap A$, entonces $f(a) \in U \cap f(A)$, de manera que $U \cap f(A) \neq \varnothing$, y en consecuencia $y \in \overline{f(A)}$.

$(3 \Rightarrow 4)$. Sean $F \subseteq Y$ cerrado y $E = f^{-1}(F) \subseteq X$. Entonces $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)} = \overline{F} = F$, de manera que $\overline{E} \subseteq f^{-1}(F) = E$, de donde $\overline{E} = E$.

$(4 \Rightarrow 1)$. Sea $U \subseteq Y$ abierto y $F = U^c$, entonces $f^{-1}(F) = f^{-1}(U^c) = f^{-1}(U)^c \subseteq X$ es cerrado, y por tanto $f^{-1}(U)$ es abierto.

Con ello quedan demostradas las equivalencias. ■

Los abiertos de un espacio topológico no son siempre tan accesibles como los elementos de una base o una subbase, tal es el caso de los espacios de funciones o los espacios producto. Es por ello necesario contar con herramientas de verificación de la continuidad en básicos y subbásicos.

Proposición 2.37 *La aplicación $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la preimagen de todo básico de Y es abierto en X.*

Demostración. Si f es continua la conclusión es obvia. Recíprocamente, supóngase que la preimagen de todo básico es un abierto, y sea $U \subseteq Y$ un abierto arbitrario, escribamos U como unión de básicos

$$U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha,$$

dado que, entonces

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} f^{-1}(B_\alpha),$$

es claro que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. ■

Corolario 2.38 *La aplicación $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la preimagen de todo subbásico de Y es abierto en X.*

Demostración. Nuevamente, si f es continua la conclusión es obvia. Supóngase ahora que las preimágenes de subbásicos son abiertas y sea $B \subseteq Y$ un básico arbitrario, escribamos B como intersección finita de subbásicos

$$B = S_1 \cap \ldots \cap S_n,$$

y puesto que, entonces

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(S_n),$$

es claro que $f^{-1}(B)$ es abierto en X, de manera la conclusión se sigue del resultado previo. ■

Los dos resultados siguientes son útiles en la construcción de aplicaciones continuas, dada la continuidad de algunas de sus restricciones a subespacios cerrados o abiertos.

Proposición 2.39 (Lema de pegadura para cerrados) *Sean $A, B \subseteq X$ subespacios cerrados tales que $A \cup B = X$, y $f : X \to Y$ una aplicación. Si tanto $f|_A$ como $f|_B$ son continuas, entonces f es continua.*

Demostración. Sea $F \subseteq Y$ cerrado, entonces, por continuidad, tanto $f|_A^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap A$ como $f|_B^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap B$ son cerrados en X, y dado que además

$$f^{-1}(F) = f|_A^{-1}(F) \cup f|_B^{-1}(F),$$

se sigue que $f^{-1}(F)$ es cerrado en X. ∎

El nombre de estos resultados, aludiendo a la pegadura[16], proviene del hecho de que permiten "pegar continuamente" aplicaciones continuas; una notación alegórica que se usa con frecuencia es $f = f|_A \cup f|_B$. El resultado análogo para abiertos es más generoso.

Proposición 2.40 (Lema de pegadura para abiertos) *Sean*

$$\mathfrak{A} = \{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$$

una colección de abiertos de X tales que $\cup\mathfrak{A} = X$, y $f : X \to Y$ una aplicación. Si $f_\alpha = f|_{A_\alpha}$ es continua para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces f es continua.

Demostración. Basta notar que, para $U \subseteq Y$ abierto, $f_\alpha^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A_\alpha$ es abierto en A_α, y en consecuencia es abierto en X. Por otra parte, es claro que

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha^{-1}(U),$$

de donde $f^{-1}(U)$ es abierto en X. ∎

[16]En inglés los resultados son conocidos como "glueing lemmas", y en castellano se conocen también como los "lemas del engrudo" o los "lemas de pegadura" .

2.6. Homeomorfismos

Los espacios topológicos se clasifican módulo homeomorfismo, de manera que dos espacios se consideran esencialmente el mismo si son homeomorfos. Decimos en este caso que uno y otro son dos modelos distintos del mismo espacio topológico. Antes tratar con el concepto de homeomorfismo, necesitamos transitar por dos conceptos complemetarios con el de continuidad.

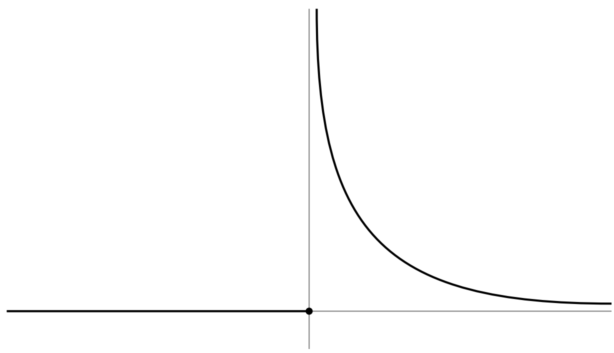
Una aplicación $f : X \to Y$ se dice que es una *aplicación abierta* si la imagen de todo abierto es abierta, y análogamente, se dice que es una *aplicación cerrada* si la imagen de todo cerrado es cerrada.

Ejemplo 2.37 *La función escalón de Heaviside* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es cerrada, dado que todas las imágenes posibles son cerradas en la recta, pero claramente no es abierta.* □

Ejemplo 2.38 *La función de Dirichlet* $\Delta : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ *es abierta y cerrada, si la topología sobre el codominio es la discreta.* □

Ejemplo 2.39 *Considérese la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada como sigue.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$



Esta función es cerrada, pero no es abierta, para convencerse basta considerar las imágenes de los intervalos $(-1, 1)$ *y* $[-1, 1]$. □

Ejemplo 2.40 *Considérese la proyección $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sobre el primer factor, es decir, dada por $p_1(x, y) = x$, la cual es claramente continua. El conjunto $A = \{(x, \frac{1}{x}) | x \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es cerrado, y dado que $p_1(A) = \mathbb{R} - \{0\}$, es claro que p_1 no es cerrada. Las proyecciones no son, en general, cerradas, aunque si son abiertas.* $\square$

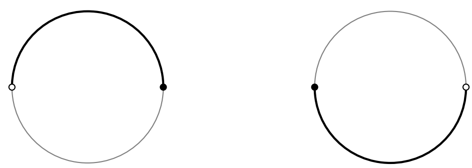
Un *homeomorfismo* es una aplicación biyectiva y bicontinua, es decir, es una biyección continua con inversa continua. Si la aplicación $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, se dice que los espacios X y Y son *espacios homeomorfos*. Claramente, dado que la composición de aplicaciones es una aplicación continua, se sigue que la relación de homeomorfismo es una relación de equivalencia sobre la colección de los espacios topológicos. La veracidad de la proposición siguiente, es consecuencia inmediata de las definiciones. La aplicación $f : X \to Y$ es un *encaje*, si la restricción $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.

Proposición 2.41 *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una biyección continua. Las proposiciones siguientes son equivalentes:*

1. *f es un homeomorfismo,*
2. *f es abierta,*
3. *f es cerrada.*

Demostración. Ejercicio. $\blacksquare$

Ejemplo 2.41 *La exponencial $E : [0, 1) \to S^1$ dada por $E(t) = e^{i2\pi t}$ es claramente una biyección continua. No obstante, no es un homeomorfismo, dado que no es abierta, la imagen del abierto $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ no es abierto en S^1.*



Puede verse también que no es cerrada, observando que la imagen del cerrado $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ *no es cerrada en* S^1. □

Un homeomorfismo de un espacio en sí mismo es un *automorfismo*, y es claro que la identidad $1_X : X \to X$ es obviamente un automorfismo, además de que la inversa de un automorfismo es un automorfismo. La composición de homeomorfismos es un tercer homeomorfismo, de manera entonces que la composición de automorfismos es también un automorfismo. En consecuencia, la colección de automomorfismo de un espacio topológico dado X, denotado por $Aut(X)$, tiene estructura de grupo respecto de la composición de aplicaciones, es decir, el par $(Aut(X), \circ)$ es un grupo.

Ejemplo 2.42 *Toda transformación afín, es decir, de la forma* $f(x) = ax + b$ *para* $a \in \mathbb{R}$ *y* $b \in \mathbb{R}^n$, *es un automorfismo de* $\mathbb{R}^n$. □

2.7. Ejercicios

1. Sea X un espacio pseudométrico, demuestre que la colección de bolas con radio positivo es una base para su topología. Demuestre que la colección de bolas con radio de la forma $\frac{1}{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$, es también una base.

2. Demuestre que que si $\mathcal{S}$ es una subbase para una topología dada τ, la colección de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base para la misma topología.

3. Demuestre que los intervalos abiertos en la topología euclidiana constituyen una base para su topología. Determine una subbase.

4. Demuestre que la intersecciónde una colección de topologías sobre un conjunto X es una topología sobre X.

5. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos. Demuestre que la función definida como $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ es una métrica, y que genera la topología producto sobre $X_1 \times X_2$.

6. Sean $f_1 : X_1 \to Y_1$ y $f_2 : X_2 \to Y_2$ son aplicaciones abiertas (resp. cerradas), demuestre que

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$$

es una aplicación abierta (resp. cerrada).

7. Sean X un espacio topológico y A un subespacio. Demuestre que:

   a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

   b) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

   c) $\partial(\partial A) = \partial A$

8. Demuestre que $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$, y encuentre un contraejemplo para la igualdad.

9. Demuestre que, en general, $A' \subseteq \partial A$.

10. Proporcione un ejemplo de un conjunto A y un punto $x \in A' - A''$.

11. Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$ un punto. Demuestre que:

    a) $\{x\}$ es un conjunto cerrado, y

    b) $\bigcap \mathcal{N}(x) = \{x\}$.

    Note que estas propiedades no se cumplen en espacios como el de Sierpiński.

12. Encuentre todas las topologías de un conjunto de tres elementos y clasifíquelas por homeomorfismo.

13. Encuentre todas las topologías de un conjunto de cuatro elementos y clasifíquelas por homeomorfismo.

14. Caracterice la frontera de un espacio discreto.

15. Demuestre que ∂A es un conjunto cerrado.

16. Sean (X, d) un espacio métrico y $x_0 \in X$ un punto fijo. Demuestre que la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$ es continua.

17. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es *convexo* si para cualesquiera $a, b \in A$ y todo $t \in I$, se tiene que $(1 - t)a + tb \in A$. Demuestre que si A es convexo, cerrado, acotado y tiene interior no vacío, entonces A es homeomorfo con D^n.

18. Denotemos por R_S a la recta de Sorgenfrey, además de $\mathbb{R}_S^2 = \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$. Demuestre que $A = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}_S\}$ es un subespacio discreto de $\mathbb{R}_S^2$.

19. Denotemos por $\mathbb{R}_c$ a la recta considerada como conjunto, y sea $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_S$ la aplicación dada por $f(x) = -x$. Determine la topología inducida por f sobre $\mathbb{R}_c$.

20. Discuta la continuidad de las funciones siguientes:

    a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

    b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$.

    c) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$.

    d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$.

    e) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$.

    f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

21. Sean (X, τ_1) y (X, τ_2) espacios topológico con el mismo conjunto subyacente, y sea $1_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ la aplicación identidad. Discuta las condiciones que han de imponerse a:

    a) τ_1 con independencia de τ_2,

    b) τ_2 con independencia de τ_1,

    para asegurar la continuidad de 1_X.

22. Demuestre que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la preimagen de cada básico de Y es abierto en X. Una base para la topología de un espacio es una colección de subconjuntos tal que todo abierto es unión de elementos de la base. Note que cada básico es abierto.

23. Considere el subespacio $X = (-\infty, 0) \times \{0\} \cup [0, \infty) \times \{1\}$ y la proyección $p : X \to \mathbb{R}$ dada por $p(x, y) = x$. Demuestre que es una biyección continua, pero no un homeomorfismo. Use cada una de las equivalencias de continuidad para demostrar que p^{-1} no es continua. ¿Existe una topología sobre X que haga de p un homeomorfismo?

24. Demuestre que $E : [0, 1) \to S^1$ dada por $E(t) = e^{i2\pi t}$ es una biyección continua que no es un homeomorfismo. ¿Existe una topología sobre $[0, 1)$ que haga de p un homeomorfismo?

25. Determine la mínima topología sobre $\mathbb{R}$ tal que la función parte entera $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ sea continua donde $\mathbb{Q}$ tiene la topología euclidiana. Recuerde que $g(x) = [x] \in \mathbb{Z}$, y satisface $x - [x] \in [0, 1)$.

26. Sea $f : X \to Y$ una aplicación.

    a) Si Y es un conjunto y X es un espacio topológico, determine la máxima topología sobre Y que hace continua a f. Note que f es continua si Y es un espacio indiscreto.

    b) Si Y es un espacio topológico y X es un conjunto, determine la mínima topología sobre X que hace continua a f. Note que f es continua si X es un espacio discreto.

27. Considere el espacio de funciones $\mathbb{R}^2$ cuyos elementos son aplicaciones de la forma $f : 2 \to \mathbb{R}$ donde $2 = \{0, 1\}$ tiene la topología discreta y $\mathbb{R}$ la topología euclidiana.

    a) Para $A \subseteq 2$ y $U \subset \mathbb{R}$ abierto describa los conjuntos de la forma $\mathcal{U}(A, U) = \{f \in \mathbb{R}^2 | f(A) \subseteq U\}$.

    b) Considerando la biyección $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $\Phi(f) = (f(0), f(1))$, escriba las cajas de la forma $(a, b) \times (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como intersecciones de conjuntos de la forma $\mathcal{U}(A, U)$ en $\mathbb{R}^2$.

c) Determine una topología sobre $\mathbb{R}^2$ que haga de Φ un homeomorfismo.

28. Considere el espacio de funciones $\mathbb{R}^2$ cuyos elementos son aplicaciones de la forma $f : 2 \to \mathbb{R}$ donde $2 = \{0, 1\}$ tiene la topología de Sierpiński $\mathcal{S} = \{\varnothing, 1, 2\}$.

    a) Para $A \in \mathcal{S}$ y $U \subset \mathbb{R}$ abierto describa los conjuntos de la forma $\mathcal{U}(A, U) = \{f \in \mathbb{R}^2 | f(A) \subseteq U\}$.

    b) Considerando la biyección $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $\Phi(f) = (f(0), f(1))$, describa las imágenes en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de los conjuntos de la forma $\mathcal{U}(A, U) \subseteq \mathbb{R}^2$, y de sus intersecciones finitas.

    c) Determine una topología sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que haga de Φ un homeomorfismo.

29. Determine:

    a) Si el ordinal 2 tiene la topología discreta, la mínima topología sobre $\mathbb{R}$ tal que la función de Dirichlet $\Delta : \mathbb{R} \to 2$ es continua.

    b) Si el ordinal 2 tiene la topología de Sierpiński, describa la mínima topología sobre $\mathbb{R}$ tal que la función de Dirichlet $\Delta : \mathbb{R} \to 2$ es continua.

    c) Condiciones sobre la topología del dominio para que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(0) = 0$ sea continua.

    d) Condiciones sobre la topología del dominio para que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(0) = 0$ sea continua.

    e) Condiciones para que la función anterior sea un homeomorfismo.

30. Considere $M_2(\mathbb{R})$ como $\mathbb{R}^4$ con la topología euclidiana, demuestre que la función determinante $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua para $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana.

31. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el dominio es la recta de Sorgenfrey y el codominio la recta euclidiana, demuestre que f es continua si y sólo si es superiormente semicontinua.

32. Demuestre que $x \in A'$ si y sólo si $x \in \overline{A - \{x\}}$.

33. Demuestre que una aplicación es continua si y sólo si es continua en cada uno de los puntos de su dominio.

34. Si X es cofinito, demuestre que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f^{-1}(K)$ es finito ó es X para todo cerrado $K \subseteq Y$.

35. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es cerrada pero no es abierta.

36. Caracterice las funciones continuas y no suprayectivas $f : \mathbb{R}_C \to \mathbb{R}_E$, donde $\mathbb{R}_C$ es la recta cofinita y $\mathbb{R}_E$ es la recta euclidiana.

Capítulo 3

Topologías Generadas

En el terreno de la divulgación matemática, suele decirse que la Topología es una “geometría de goma”, y es también frecuente que como alegoría de la Topología se use la expresión según la cual un topólogo es un matemático incapaz de distinguir entre una dona y una taza. Sea hace así referencia a que el método topológico de clasificar los objetos centra su atención en el homeomorfismo, lo que puede describirse coloquialmente como una “deformación” continua que es “continuamente reversible”.

Por cuanto hace a la divulgación las frases anteriores son válidas, pero en lo que se refiere al tratamientoformal, esas nociones imprecisas requieren, para ser verdaderamente útiles, de la formalización propia de las diversas disciplinas matemáticas. Como ya se ha observado, los fenómenos de la continuidad y la convergencia son los objetos de estudio de la Topología. El coloquial acto de “pegar” significa, con más contenido matemático “pegar continuamente”, lo que tiene que ver con la elección adecuada de aplicaciones, mismas que generan topologías respecto de las cuales se mide la continuidad.

El presente capítulo se nutre de una generosa colección de ejemplos en los cuales las aplicaciones “inducen” topologías. Observamos así que la continuidad no es una propiedad intrínseca, sino que puede ser moldeada de acuerdo con las necesidades que se presenten. La última sección, dedicada a los espacios de adjunción, ejemplifica la manera formal y rigurosa en la que los espacios se "pegan" unos con otros, formando espacios nuevos.

3.1. La topología inicial

Consideremos un conjunto X, un espacio topológico Y, y una aplicación $f : X \to Y$; si τ es una topología sobre X tal que f es continua, y si además $\tau \subseteq \widetilde{\tau}$ entonces también $\widetilde{\tau}$ hace continua la aplicación f. Nos interesa optimizar, es decir, determinar la mínima topología sobre X para la cual f es continua.

Proposición 3.1 *Dados un conjunto X, un espacio topológico (Y, τ) y una aplicación $f : X \to Y$, la colección*

$$\tau_f = \{f^{-1}(U)|U \in \tau\}$$

es una topología sobre X, y es la mínima topología respecto de la cual f es continua.

Demostración. El hecho de que τ_f es una topología se sigue de que la preimagen preserva uniones e intersecciones, por otra parte, si $\mathcal{T}$ es la colección de todas las topologías sobre X que hacen continua a f, es claro que $\tau_f \in \mathcal{T}$, y además, si $\tau \in \mathcal{T}$, ocurre que $\tau_f \subseteq \tau$. ■

Como sabemos, la intersección de una colección de topologías sobre un conjunto X es una topología sobre X, y se dice que la intersección es el *ínfimo* de tal colección de topologías. Entonces, con la notación del resultado previo

$$\tau_f = \operatorname{ínf}(\mathcal{T}).$$

En general, si $\mathcal{T}$ es una colección de topologías sobre un conjunto dado X, entonces

$$\operatorname{ínf} \mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}$$

es la máxima topología que está contenida en cada una de las topologías que son elementos de la colección $\mathcal{T}$.

Se dice que τ_f es la *topología inducida* por $f : X \to Y$ sobre X, se dice también que τ_f es la *topología inicial* de X respecto de f, o bien que es la *topología débil* de X respecto de f. El término topología inicial se debe a que la continuidad de f "inicia" en τ_f, dentro del poset de las topologías sobre X. Recordemos que una topología dada es *más fuerte* que otra si la contiene. Entonces τ_f es la topología más fuerte que está contenida en todas las topologías respecto de las cuales f es continua. La topología inicial es también conocida como *topología débil*, dado que es la más débil sobre X, respecto de la cual f es continua.

Ejemplo 3.1 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. La aplicación inclusión $i : A \to X$ induce la topología de subespacio sobre A, dado que $i^{-1}(U) = U \cap A$.* $\square$

Ejemplo 3.2 *Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función escalón de Heaviside, donde el codominio tiene la topología euclidiana. La topología inicial sobre el dominio inducida por h, es $\tau_h = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, \infty)\}$.* $\square$

Ejemplo 3.3 *Sea $D : I \to I$ la función de Dirichlet, donde el codominio tiene la topología euclidiana. La topología inicial sobre el dominio inducida por D, es $\tau_D = \{\varnothing, I, \mathbb{Q} \cap I, \mathbb{Q}^c \cap I\}$.* $\square$

Ejemplo 3.4 *Considere al función exponencial* $\exp : [0, 2\pi) \to S^1$, *dada por* e^{it}, *donde el círculo tiene la topología de subespacio del plano euclidiano, entonces $[0, \pi) \notin \tau_{\exp}$, dado que no es preimagen de ningún abierto del círculo.* $\square$

La topología inducida por una aplicación resuelve un problema particular de continuidad, y es posible que la situación involucre más de una aplicación, en cuyo caso, se hace necesario modificar ligeramente el concepto de topología inicial. Consideremos ahora un conjunto X, una colección de espacios topológicos $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$, y una colección de aplicaciones $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$. Una *fuente de aplicaciones* es una colección $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ donde cada Y_α es un espacio topológico y X es un conjunto.

Estamos interesados en definir de forma óptima una topología sobre X, respecto de la cual, cada f_α sea continua. Para tal efecto, los elementos de la colección

$$S_{\mathcal{A}} = \{f_\alpha^{-1}(U)|U \in \tau_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$$

deben ser abiertos en X, pero no hay garantía alguna de que $S_{\mathcal{A}}$ sea una topología sobre X. No obstante, si es claro que $\bigcup S_{\mathcal{A}} = X$, por lo que $S_{\mathcal{A}}$ es subbase para una topología $\tau_{\mathcal{A}}$.

La topología $\tau_{\mathcal{A}}$ se dice que es la *topología inicial* de X respecto de la colección $\mathcal{F}$. Al igual que en el caso en el que la colección $\mathcal{F}$ tiene cardinalidad 1, esta topología recibe también el nombre de *topología débil* ó *topología inducida* por la colección $\mathcal{F}$. Se dice también que la topología $\tau_{\mathcal{A}}$ es la topología inicial respecto de la fuente definida por la colección $\mathcal{F}$.

3.2. La topología producto

Un caso particularmente interesante de topología inducida por una colección de aplicaciones es la topología producto. Sea $\mathcal{X} = \{(X_\alpha, \tau_\alpha)|\alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de espacios topológicos, y designemos por X el producto cartesiano

$$X = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha.$$

La α-ésima *proyección* es la aplicación $p_\alpha : X \to X_\alpha$ pada por $p_\alpha(x) = x_\alpha$ donde $x = (x_\alpha|\alpha \in \mathcal{A})$.

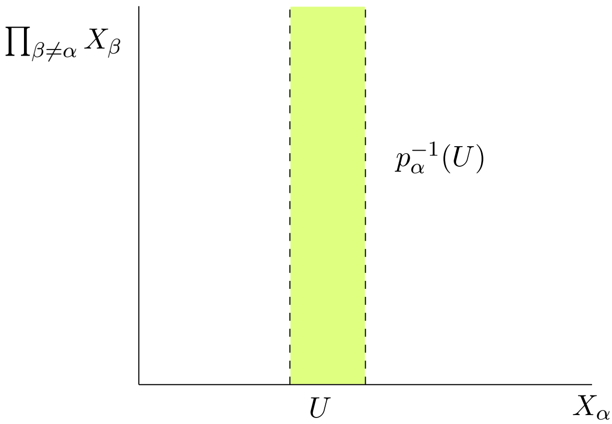
Ejemplo 3.5 *En el caso de un producto finito $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, la proyección $p_k : X \to X_k$ está dada por $p_k(x) = x_k$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$. Nótese que implícitamente se usa en hecho de que el segmento inicial $\{1, \ldots, n\}$ es un conjunto ordenado, lo que obviamente no ocurre necesariamente con un conjunto arbitrario de índices $\mathcal{A}$.* $\square$

La *topología producto* se define como la topología inicial inducida por las proyecciones p_α, es decir, es la topología que tiene como subbase a las preimágenes de la forma $p_\alpha^{-1}(U)$ para $U \subseteq X_\alpha$ abierto.

Los básicos de la topología producto tienen entonces la forma

$$p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}),$$

donde $U_{\alpha_k} \subseteq X_{\alpha_k}$ es abierto para $k = 1, \ldots, n$ y además $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$.



Otra forma de ver el básico anterior es la expresión

$$\left(\prod_{\beta \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}} X_\beta \right) \times U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_n}.$$

Ejemplo 3.6 *El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ tiene claramente la topología producto, si se considera como el producto de n copias de la recta. Consideremos el conjunto de funciones $\mathbb{R}^{\{0,1,\ldots,n-1\}}$, existe claramente una biyección*

$$\Phi : \mathbb{R}^{\{0,1,\ldots,n-1\}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dada por $\Phi(f) = (f(0), \ldots, f(n-1))$. La topología inicial sobre el dominio hace del espacio de funciones dado un espacio homeomorfo con $\mathbb{R}^n$. Este ejemplo nos permite vislumbrar un método para topologizar un espacio de funciones con dominio finito. Notemos que, si $p_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la k-ésima proyección, entonces

$$\Phi^{-1}(p_k^{-1}(U)) = \{f \in \mathbb{R}^{\{0,1,\ldots,n-1\}} | f(k-1) \in U\},$$

con lo que obtenemos una subbase para la topología de $\mathbb{R}^{\{0,1,\ldots,n-1\}}$. □

La *topología de las cajas*[1] sobre un producto de espacios topológicos, se define como aquella que es generada por los productos de abiertos. Como se puede observar, los abiertos de la topología producto son también abiertos en la topología de las cajas, pero la contención recíproca no se satisface si el producto tiene una cantidad infinita de factores.

Proposición 3.2 *La topología de las cajas es más fina que la topología producto.*

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 3.3 *La topología de las cajas coincide la topología producto, para un producto finito.*

Demostración. Ejercicio. ■

3.3. La topología final

En la presente sección examinaremos la forma de topologizar el codominio de una aplicación, dada una topología sobre su dominio. Sean entonces (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una aplicación. La *topología final* τ_f sobre Y, inducida por f, se define como la máxima topología respecto de la cual f es continua. La topología final se conoce también como *topología fuerte*, dado que es la más fuerte sobre X, respecto de la cual f es continua.

Proposición 3.4 *Dada* $f : X \to Y$ *una aplicación,* $U \subseteq Y$ *es abierto en la topología final si y sólo si* $f^{-1}(U)$ *es abierto en* X*.*

Demostración. Dado que $U \subseteq Y$ es abierto en la topología final, entonces, por la continuidad de f se tiene que $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto. Si tenemos

[1] Box topology.

ahora que $f^{-1}(U) \subseteq X$, entonces U es abierto en alguna topología para la cual f es continua. Ahora bien, dado que τ_f contiene a todas las topologías que hacen a f continua, tenemos que $U \in \tau_f$. ■

La topología final puede también describirse como sigue: el conjunto $U \subseteq Y$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto.

Ejemplo 3.7 *Consideremos por ejemplo la aplicación exponencial*

$$\exp : [0, 2\pi) \to S^1.$$

La topología de S^1 como subespacio del plano no es la topología final determinada por exp*, dado que, por ejemplo, en tal topología, la imagen de* $[0, \pi)$ *es abierto, pero no es abierto en la topología euclidiana del círculo.* □

Ejemplo 3.8 *Consideremos ahora la aplicación exponencial*

$$\exp : [0, 2\pi] \to S^1.$$

La topología de S^1 como subespacio del plano coincide en este caso con la topología final determinada por exp*, dado que, la preimagen de toda vecindad de $1 \in S^1$, suficientemente pequeña tiene la forma*

$$[0, \varepsilon) \cup (2\pi - \varepsilon, 2\pi],$$

que si es un conjunto abierto en $[0, 2\pi]$*. Notemos que, por ejemplo,*

$$[0, \pi) \cup \{2\pi\}$$

no es abierto en $[0, 2\pi]$*, luego, la imagen de* $[0, \pi)$ *no es abierto en S^1 con la topología final.* □

Un *pozo de aplicaciones* es una colección $\mathcal{P} = \{f_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$, donde cada X_α es un espacio topológico, en tanto que Y es un conjunto. La *topología final* sobre Y inducida por el pozo $\mathcal{P}$, es la máxima topología respecto de la cual cada f_α es continua. Una forma equivalente de describir la topología fuerte es la siguiente: el conjunto $U \subseteq Y$ es abierto, si y sólo si, $f_\alpha^{-1}(U) \subseteq X_\alpha$ es abierto para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.

Como vimos antes, la topología producto es un caso paradigmático de topología inicial. La unión ajena juega el papel análogo para la topología final.

3.4. La topología cociente

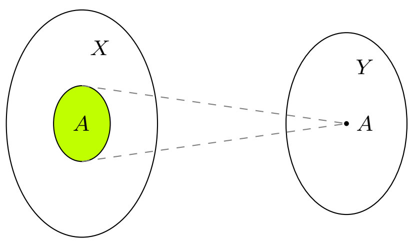
Un caso especial de la topología final es la *topología cociente*. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio, en el que se supone adicionalmente que $A \notin X$. Consideremos el conjunto

$$Y = (X - A) \cup \{A\},$$

en el que el subespacio A ha sido "colapsado" en un punto, particularmente, $A \in Y$.

Consideremos ahora la aplicación $q : X \to Y$ dada por

$$q(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x & \text{si} & x \in X - A \\ A & \text{si} & x \in A \end{array} \right. .$$



La topología final sobre el conjunto Y inducida por f se dice que es la *topología cociente*. El espacio resultante se dice que es el *espacio cociente* de X módulo A, y se denota mediante X/A. Se dice que la aplicación q es la *proyección* o bien, la *aplicación cociente*.

No debe caerse en la tentación de creer que una aplicación cociente es necesariamente abierta, como lo muestra el ejemplo que sigue.

Ejemplo 3.9 *Supongamos que* $A^\circ \neq \varnothing$ *como subespacio de* X*. Si* A *es cerrado y no es abierto en* X*, entonces* $q(A^\circ) = \{A\} \subset X/A$ *que no es abierto.*

Ejemplo 3.10 *Consideremos* $A = \{0, 1\}$ *como subespacio del intervalo* $I = [0, 1]$ *con la topología euclidiana. Si* $q : I \to I/A$ *es la aplicación cociente y* $f : I \to S^1$ *es la exponencial dada por* $f(t) = e^{i2\pi t}$*, definamos* h *por la conmutatividad del siguiente diagrama.*

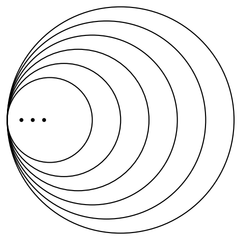
$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & I/A \arrow[d, "h"] \\
& S^1
\end{tikzcd}$$

Claramente h *es una biyección. Si* $U \subseteq S^1$ *es abierto, entonces* $f^{-1}(U) \subseteq I$ *es un abierto ajeno con* A *o que contiene a* A*, luego* $h^{-1}(U) = q(f^{-1}(U)) \subseteq I/A$ *es abierto, de modo que* h *es continua, y dado que por un argumento similar puede verse que también es abierta, entonces* h *es un homeomorfismo.* $\square$

Ejemplo 3.11 *Generalizando el ejemplo anterior, consideremos la esfera* S^{n-1} *como subespacio del disco* D^n*. La proyección estereográfica muestra que* $D^n - S^{n-1}$ *es homeomorfo con* $S^{n-1} - \{e_n\}$*, dado que este último es homeomorfo con* $\mathbb{R}^n$*. Entonces, puede verse con facilidad que* S^n *y* D^n/S^{n-1} *son homeomorfos.* $\square$

Ejemplo 3.12 (El arete hawaiano) *Considerando a* $\mathbb{Z}$ *como subespacio de la recta euclidiana* $\mathbb{R}$*, el cociente topológico* $R/\mathbb{Z}$ *tiene un subespacio homeomorfo con el círculo por cada intervalo de la forma* $[n, n+1]$*, y "colapsa" a los enteros en un punto. El arete hawaiano es un ramillete*[2] *numerable de* 1*-esferas.* $\square$

[2] El concepto de *ramillete* será formalizado más adelante, en este mismo capítulo.



Ejemplo 3.13 (La recta indiscreta) *Considerando a $\mathbb{Q}$ como subespacio de la recta euclidiana $\mathbb{R}$, el cociente topológico $R/\mathbb{Q}$ tiene propiedades de interés, poseyendo la misma cardinalidad que la recta misma. Sea $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ la proyección, si $U \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es abierto, entonces $q^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}$ es un abierto ajeno con los racionales o bien que los contiene, es entonces el vacío o el total, de manera pues que $U = \varnothing$ ó $U = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.* $\square$

3.5. La topología de identificación

Sean X un espacio topológico '$\sim$' una relación de equivalencia sobre X, la *topología de identificación* sobre el conjunto cociente $X/\sim$ se define como la topología final inducida por la aplicación cociente $q : X \to X/\sim$, es decir, $U \subseteq X/\sim$ es abierto si y sólo si $q^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto.

Una *identificación* es una aplicación $f : X \to Y$ continua, suprayectiva, y tal que $U \subseteq Y$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto. La proyección $q : X \to X/\sim$ es claramente entonces una identificación. Se dice también, que el espacio $X/\sim$ es un *espacio de identificación*.

La topología cociente es un caso particular de la topología de identificación, en la que la relación de equivalencia tiene a cada punto que no está en el subespacio A como una clase de equivalencia, y donde A es la clase restante.

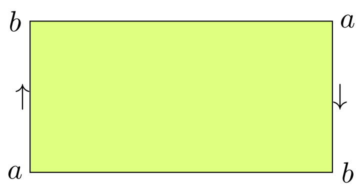
Consideremos una aplicación $f : X \to Y$, donde Y es un conjunto y X tiene estructura de espacio topológico, y supongamos adicionalmente que f es suprayectiva, y definamos la relación de equivalencia sobre X, dada por $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$, entonces, como el lector puede verificar por sus medios, el espacio Y con la topología final inducida por

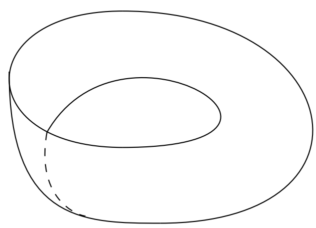
f, es homeomorfo con el espacio cociente $X/\sim$, además de que f misma induce un homeomorfismo $\tilde{f}$, dado por $\tilde{f}[x] = f(x)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"] & Y \\
X/\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

El lector puede verificar también que la topología de identificación sobre $X/\sim$ coincide con la topología inicial inducida por $\tilde{f}$, si primero se topologiza a Y.

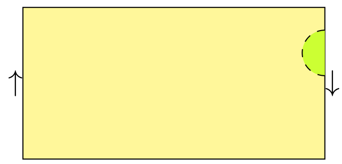
Ejemplo 3.14 (La banda de Möbius) [3] *Sobre el rectángulo $I \times I$, consideremos la relación de equivalencia $(x, y) \sim (x, y)$ para $(x, y) \in (0, 1) \times I$ y $(0, x) \sim (1, 1 - x)$. El espacio de identificaci'on se conoce como la banda de Möbius. Intuitivamente, la banda de Möbius se obtiene identificando dos lados opuestos de un rectángulo, con orientaciones opuestas.* □





[3]August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), matemático alemán.

Es importante hacer notar que una identificación no es necesariamente cerrada o abierta. En el ejemplo anterior, notamos que la imagen del abierto del rectángulo que muestra la figura que sigue, no es abierta en la banda de Möbius, respecto de la aplicación de identificación correspondiente.



Dados un conjunto X y una relación de equivalencia $\sim$ sobre X, una *sección* de la aplicación cociente $q : X \to X/\sim$, es una aplicación

$$s : (X/\sim) \longrightarrow X$$

tal que $q \circ s = 1_{X/\sim}$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "q"] \\ X/\sim \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "1_{X/\sim}"] & X/\sim \end{tikzcd}$$

En términos coloquiales, a través de una sección se elige un "representante" de cada clase de equivalencia. Una *sección* de una aplicación suprayectiva $f : X \to Y$ es una aplicación $s : Y \to X$ tal que $f \circ s = 1_Y$. Elegimos así un representante por cada punto en la imagen.

Proposición 3.5 *Una aplicación continua $f : X \to Y$ es una identificación si admite una sección continua $s : Y \to X$*

Demostración. Si $s : Y \to X$ es una sección continua, basta demostrar que si $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto, entonces $U \subseteq Y$ es abierto, para ello es suficiente observar que

$$U = (f \circ s)^{-1}(U) = s^{-1}(f^{-1}(U))$$

y usar la continuidad de s. ∎

El lector puede caer en la tentación de creer que toda aplicación suprayectiva $f : X \to Y$ es una identificación, lo que es cierto sólo en el caso en el que X tenga la topología inicial inducida por f, o Y tenga la topología final inducida por f. Si la topología sobre X es más fina que la inicial, f es una aplicación continua y suprayectiva, pero no es una identificación. Análogamente, si la topología sobre Y es más gruesa que la final, entonces f es una aplicación continua y suprayectiva, pero no es una identificación.

El resultado que sigue caracteriza las identificaciones de entre las aplicaciones continuas y suprayectivas. Tengamos presente que $f : X \to Y$ es una identificación si y sólo si $Y = X/\sim$ para $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$.

Proposición 3.6 *Sea $q : X \to Y$ una identificación. Entonces $f : Y \to Z$ es continua si y sólo si $f \circ q : X \to Z$ es continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f\circ q"] & \\ Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Si q es una identificación y f es continua, $f \circ q$ es continua por ser composición de continuas. Si $f \circ q$ es continua y $U \subseteq Z$ abierto, entonces $V = (f \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}(f^{-1}(U)) \subseteq X$ es abierto, de manera que $f^{-1}(U) \subseteq Y$ es abierto, por definición de identificación. ∎

Nótese que el argumento final en la demostración anterior, no afirma que q sea una aplicación abierta, puesto que V no es un abierto arbitrario de X. Un caso particularmente interesante de identificaciones ocurre cuando se tiene una acción de un grupo sobre un espacio.

Sea G es un *grupo topológico*, es decir, un grupo que tiene una estructura de espacio topológico, respecto de la cual la aplicación $G \times G \to G$, dada por $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ es continua. Una *acción* de G sobre un espacio topológico X es un homomorfismo de grupos

$$\mu : G \longrightarrow Homeo(X),$$

en el que por economía notacional escribimos gx en lugar de $\mu(g)(x)$. La*órbita* de x es el conjunto

$$G(x) = \{gx | g \in G\},$$

y el espacio de órbitas, que se denota por X/G, puede verse como un espacio de identificación en el que las clases de equivalencia son las órbitas.

Ejemplo 3.15 *Considere el espacio $X = S^1 \times [-1,1]$ y el grupo cíclico de orden 2, denotado por C_2, con generador r. La banda de Möbius puede verse como el espacio de órbitas de la acción antipodal de C_2 sobre X, definida mediante $r(x,t) = (-x,-t)$.* □

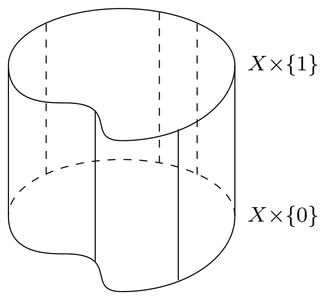
Ejemplo 3.16 (El espacio proyectivo real) *El grupo cíclico de orden 2, C_2, visto como subgrupo multipilicativo de $\mathbb{C} - \{0\}$, tiene la topología discreta como subespacio del plano. Consideremos la acción "antipodal" de C_2 sobre S^n. El espacio proyectivo real de dimensión n es el espacio de órbitas $\mathbb{R}P^n = S^n/C_2$.* □

Ejemplo 3.17 (El espacio proyectivo complejo) *El grupo $\mathbb{T}$ es el subgrupo multipilicativo de $\mathbb{C} - \{0\}$, cuyo conjunto subyacente es S^1, con la topología de subespacio del plano. El grupo $\mathbb{T}$ actúa de forma natural sobre la esfera $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^n$ por "rotación", es decir, por restricción de la multiplicación compleja. El espacio proyectivo complejo de dimensión n es el espacio de órbitas $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/\mathbb{T}$.* □

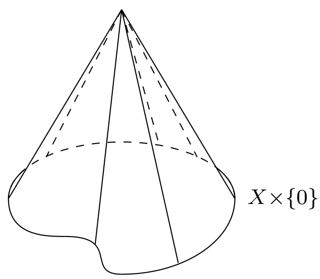
3.6. Construcciones

Muchos de los espacios topológicos que son de utilidad pueden ser construidos a partir de algunos espacios "elementales". La presente sección se compone básicamente de una colección de ejemplos, en los que se ilustran algunas de las construcciones más útiles.

La más sencilla de las construcciones que ya es no trivial es el *cilindro* de un espacio topológico X, que se define simplemente como el producto $X \times I$.



El *cono* de X se denota como CX y se define como el espacio cociente $X \times I/X \times \{1\}$.

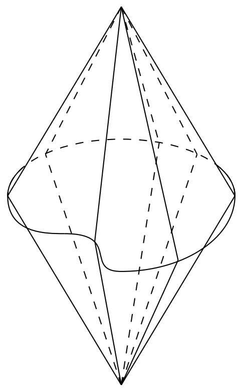


La *suspensión*[4] de un espacio puede pensarse como el cociente

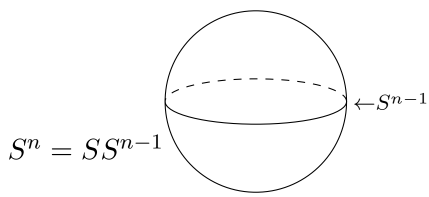
$$\frac{CX}{X \times \{0\}}.$$

La suspensión del espacio X se denota por SX.

[4]Suspensión **no** reducida.



Ejemplo 3.18 *La esfera de dimensión cero S^0 es el subespacio $S^0 = \{\pm 1\}$ de la recta euclidiana. La esfera de dimensión 1, denotada por S^1, es homeomorfa con la suspensión de S^0, es decir $S^1 = SS^0$. Análogamente, la esfera de dimensión 2 es es homeomorfa con la suspensión de S^1, o sea que $S^2 = SS^1 = S^2S^0$. En general $S^{n+1} = SS^{n-1} = S^{n-1}S^1 = S^nS^0$.*



La suspensión de la $(n-1)$-esfera es la n-esfera para todo entero $n \geq 1$. □

En *teoría de homotopía* nos interesan los espacios con un punto distinguido al que llamaremos *punto base*. Un espacio X con un punto base x_0 se llama *espacio punteado*, y se denota como el *par topológico*[5] (X, x_0).

Las construcciones topológicas adquieren características propias de los fenómenos homotópicos. El *ramillete*, también llamado *suma cuña*[6] de dos

[5]Un par topológico es un par de espacios (X, A) en el que A es un subespacio de X. Por economía notacional denotamos el par topológico $(X, \{x_0\})$ mediante (X, x_0).

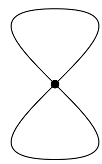
[6]En inglés *wedge sum*.

espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0) se denota como $X \vee Y$ y se define como el espacio

$$X \vee Y = \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\} \subset X \times Y,$$

en el que el punto base $*$ es (x_0, y_0), haciendo así del par topológico $(X \vee Y, *)$ un espacio punteado.

Ejemplo 3.19 *El ramillete $S^1 \vee S^1$ es la figura "ocho".* $\square$



El ramillete se extiende de forma natural a una colección arbitraria de espacios punteados, por ejemplo, el arete hawaiano puede describirse de forma alternativa como el ramillete

$$\bigvee_{k \in \mathbb{N}} S^1.$$

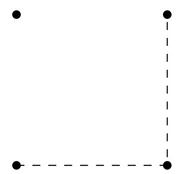
El *producto reducido*[7], también conocido como *producto cuña*, de dos espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0) se define como el espacio cociente

$$X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \vee Y}.$$

El producto reducido es entonces un espacio punteado $(X \wedge Y, *)$ en el que el punto base $*$ es la imagen del ramillete bajo la proyección cociente.

Ejemplo 3.20 *Consideremos la 0-esfera y elíjase un punto base en ella. por ejemplo, el punto $1 \in S^0 \subseteq \mathbb{R}$. El ramillete $S^0 \vee S^0$ es un espacio discreto de tres puntos, uno de los cuales es punto base. Entonces, el producto reducido $S^0 \wedge S^0 = \Sigma^0 S^0$ es nuevamente un espacio homeomorfo con S^0.*

[7] El inglés *smash product* obien *wedge product.*



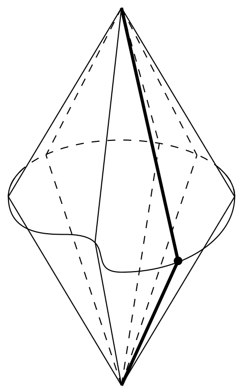
En general, para todo espacio punteado X se satisface que $S^0 \wedge X = \Sigma^0 X = X$. $\square$

La *suspensión reducida* ΣX de un espacio punteado (X, x_0) se define como el producto reducido $S^1 \wedge X$, donde S^1 es considerado como espacio punteado $(S^1, 1)$. En virtud del ejemplo anterior $\Sigma S^0 = S^1$. Con un poco de esfuerzo puede demostrarse que $\Sigma S^1 = S^2$, y en general $\Sigma S^n = S^{n+1}$.

Ejemplo 3.21 *Puede verse con facilidad que $S^1 \times S^n - S^1 \vee S^n$ es un espacio homeomorfo con $(D^1 - S^0) \times (D^n - S^{n-1})$, que es a su vez homeomorfo con $D^{n+1} - S^n$. Usando este homeomorfismo se ve con claridad que $\Sigma S^n = S^{n+1}$.* $\square$

Adicionalmente, $\Sigma^{n+1} S^0 = \Sigma^n S^1 = \Sigma S^n = S^{n+1}$. Por otra parte, de la discusión se sigue que la suspensión SS^n, y la suspensión reducida ΣS^n, son homeomorfas, con la diferencia de que la última, de forma natural y por construcción, es un espacio punteado.

Una forma alternativa y más intuitiva de ver la suspensión reducida es considerarla como el espacio cociente de la suspensión colapsando en un punto "todos" los puntos base.



Una aplicación continua induce aplicaciones continuas entre las suspensiones respectivas. Más precisamente, dada $f : X \to Y$ en la categoría **Top** de los espacios topológicos, la aplicación $Sf : SX \to SY$ dada por $Sf[x,t] = [f(x),t]$ es claramente una aplicación continua, por lo que la suspensión puede interpretarse como un functor $S : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$.

Análogamente, dados dos espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0), la aplicación continua $f : X \to Y$ en la categoría[8] $\mathbf{Top}_*$ de los espacios topológicos punteados, induce $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ mediante $\Sigma[x,z] = [f(x),z]$, en la misma categoría. La suspensión reducida es entonces un functor $\Sigma f : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$.

3.7. Espacios de Adjunción

La topología de una *unión ajena* $X \sqcup Y$ se define como la topología final inducida por las inclusiones $i_X : X \to X \sqcup Y$ además de $i_Y : Y \to X \sqcup Y$. En la próxima sección tendremos la oportunidad de generalizar este concepto.

Para usos homotópicos, algunas veces es necesario sustituir un espacio por otro "más grande" que tenga el mismo tipo de homotopía, es decir, intuitivamente, que tenga las mismas propiedades de "deformación". Dos

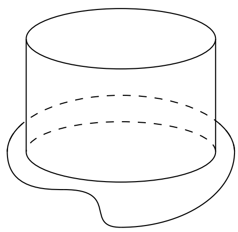
[8] La sección 8.5 contiene una brevísima introducción a la terminología de las categorías y los functores. La referencia clásica para el tema es Mac Lane [42].

de estas construcciones son el *cilindo de una aplicación*[9] y el *cono de una aplicación*[10] En esta sección describimos ambas construcciones, además de otros *espacios de adjunción*, que informalmente, nos proporcionan herramientas para "pegar" espacios.

Dada una aplicación continua $f : X \to Y$, el *cilindro* de f se define como el espacio de identificación

$$M_f = \frac{(X \times I) \sqcup Y}{\sim},$$

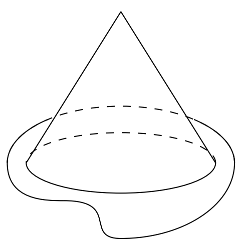
donde $\sim$ identifica $(x, 0) \sim f(x)$ y deja el resto de los puntos fijos.



De forma similar, dada una aplicación continua $f : X \to Y$, el *cono* de f se define como el espacio de identificación

$$C_f = \frac{CX \sqcup Y}{\sim},$$

donde nuevamente $\sim$ identifica $(x, 0) \sim f(x)$ y deja el resto de los puntos fijos.



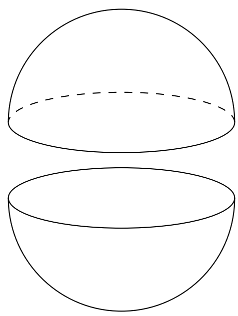
[9] Mapping cylinder.
[10] Mapping cone.

Si $f : A \to Y$ es una aplicación y $A \subseteq X$, definimos el *espacio de adjunción* de X con Y a través de f mediante

$$X \cup_f Y = \frac{X \sqcup Y}{\sim},$$

donde $a \sim f(a)$ para $a \in A$, manteniendo el resto de los puntos fijos. Se dice entonces que f es la *aplicación de pegadura*[11]. Si A es un espacio común a X y a Y, y además la aplicación de pegadura es la identidad en A, el espacio de adjunción correspondiente se denota como $X \cup_A Y$.

Ejemplo 3.22 (La esfera) *Consideremos la inclusión $g : S^k \to D^{k+1}$. La esfera de dimensión $k+1$ puede obtenerse como el espacio de adjunción de dos copias del $(k+1)$-disco, teniendo como función de pegadura a la inclusión g. Entonces $S^{k+1} = D^{k+1} \cup_g D^{k+1}$. Como por otra parte la k-esfera puede considerarse como subespacio común de dos $(k+1)$-discos, podemos también escribir $S^{k+1} = D^{k+1} \cup_{S^k} D^{k+1}$.* $\square$



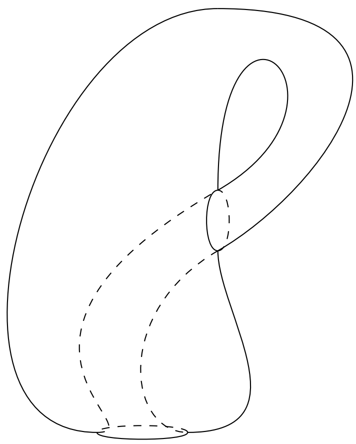
Ejemplo 3.23 (El plano proyectivo) *La frontera*[12] *de la banda de Möbius M es un espacio homeomorfo con S^1. Sea $f : S^1 \to M$ un homeomorfismo de sobre la frontera de M, el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ puede describirse como $D^2 \cup_f M$, o bien como $D^2 \cup_{S^1} M$.* $\square$

[11] Glueing map.

[12] Nos referimos aquí no a la frontera topológica, sino a la frontera como variedad, es decir, el conjunto de puntos que tienen una vecindad homeomorfa con una abierto de $H^2 = \{(x_1, x_2) | x_2 \geq 0\}$.

En los dos casos previos, el espacio de adjunción obtenido es justamente el cono de la función de pegadura. No es el caso del ejemplo que sigue.

Ejemplo 3.24 (La botella de Klein) [13] *Consideremos dos copias de la banda de Möbius M, y la frontera común S^1. Dada la inclusión $i : S^1 \to M$ sobre la frontera, la botella de Klein K puede describirse como el espacio de adjunción $M \cup_i M$ o bien $M \cup_{S^1} M$.* $\square$



3.8. Ejercicios

1. Determine la topología inicial sobre $\mathbb{R}$, inducida por la aplicación parte entera $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_E$, donde $\mathbb{R}_E$ es la recta euclidiana.

2. Determine la topología inicial sobre $\mathbb{R}$, inducida por la aplicación parte entera $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_S$, donde $\mathbb{R}_S$ es la recta de Sorgenfrey.

3. Determine la topología inicial sobre $\mathbb{R}$, inducida por la función escalón de Heaviside $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_S$, donde $\mathbb{R}_S$ es la recta de Sorgenfrey.

[13] Felix Klein (1849 - 1925), matemático alemán, a quien se debe la demostración de que las geometrías métricas son casos particulares de la geometría proyectiva.

4. Determine la topología inicial sobre $I = [0, 1]$, inducida por la función de Dirichlet $f : I \to I_S$, donde I_S es el intervalo considerado como subespacio de la recta de Sorgenfrey.

5. Considere $\mathbb{R}_E$ la recta euclidiana, R_S la recta de Sorgenfrey, y R_F la recta cofinita. Describa la topología producto sobre los siguientes productos:

   a) X^2, donde X es el espacio de Sierpinski.

   b) $\mathbb{R}_E \times X$, donde X es el espacio de Sierpinski.

   c) $\mathbb{R}_E \times \mathbb{R}_S$.

   d) $\mathbb{R}_E \times \mathbb{R}_F$.

   e) $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

   f) $\mathbb{R}_F \times \mathbb{R}_F$. ¿Se trata del plano cofinito?.

   g) $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_F$.

6. Determine la topología final sobre $\mathbb{R}$, inducida por la aplicación parte entera $p : \mathbb{R}_E \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_E$ es la recta euclidiana.

7. Determine la topología final sobre $\mathbb{R}$, inducida por la aplicación parte entera $p : \mathbb{R}_S \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_S$ es la recta de Sorgenfrey.

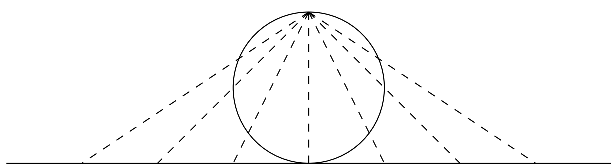
8. Determine la topología final sobre $\mathbb{R}$, inducida por la función escalón de Heaviside $h : \mathbb{R}_S \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_S$ es la recta de Sorgenfrey.

9. Determine la topología final sobre $I = [0, 1]$, inducida por la función de Dirichlet $f : I_S \to I$, donde I_S es el intervalo considerado como subespacio de la recta de Sorgenfrey.

10. Demuestre que el producto de dos espacios discretos es un espacio discreto. ¿Se satisface para productos infinitos?

11. Demuestre que el producto de dos espacios indiscretos es un espacio indiscreto. ¿Se satisface para productos infinitos?

12. Demuestre que el espacio cociente $I/\{0,1\}$ es homeomorfo con el círculo S^1.
13. Describa el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.
14. Demuestre que el espacio cociente $I/\{0,\frac{1}{2},1\}$ es homeomorfo con el ramillete $S^1 \vee S^1$.
15. Construya paso por paso SS^0 y ΣS^0.
16. Construya paso por paso SS^1 y ΣS^1.
17. Construya la suspensión no reducida del espacio de Sierpiński, y su suspensión reducida, donde el punto base es el punto cerrado.
18. Construya la suspensión reducida y la no reducida de un espacio discreto con tres puntos.
19. Demuestre que el espacio cociente $D^2/\partial S^1$ es homeomorfo con S^2.
20. Considere el espacio producto $I \times I$, y sobre él la relación dada por $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ si $(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Demuestre que esta relación es una relación de equivalencia, y que el espacio $(I \times I)/\sim$ el homeomorfo con el toro T^2.
21. Demuestre que el proyectivo de dimensión 1, $\mathbb{R}P^1$ es homeomorfo con las 1-esfera S^1.
22. Demuestre que $[1,2)$ es homeomorfo con $(-1,0]$.
23. Considere la proyección estereográfica $S^1 \to \mathbb{R}$ dada por
$$(x,y) \mapsto \frac{2x}{1-y}.$$



Encuentre una ecuación para la proyección estereográfica $S^2 \to \mathbb{R}^2$.

24. Demuestre que $J \times J \times J$ es homeomorfo con $I \times I \times I$, para $J = [-1, 1]$, encontrando un homeomorfismo explícito.

25. Demuestre que $I \times I \times I$ es homeomorfo con el 3-disco D^3.

26. Demuestre que la unión ajena $[0, 2] \sqcup [3, 2]$ es homeomorfa con $S^0 \times I$.

Capítulo 4

Compacidad

De entre las propiedades de las que puede gozar un espacio topológico encontramos en un lugar muy especial la conexidad y la compacidad. En este capítulo estudiaremos la compacidad, una de las propiedades topológicas más significativas. Abordamos la conexidad en el capítulo siguiente.

La compacidad es una característica de los espacios topológicos que tiene profundo significado, por tanto que, al igual que la conexidad, se peserva bajo aplicaciones continuas. El hecho de que la compacidad se conserve en productos es garantizado por el célebre Teorema de Tychonoff[1] ([58], 1930), que es además equivalente con el axioma de elección de acuerdo con un resultado de Kelley[2] ([34], 1950), por lo que puede pensarse como un teorema carcaterístico de la matemática cantoriana.

Para obtener resultados interesantes expondremos, de inicio, algunos de los axiomas de separación, electos en particular, de entre los que se refieren a la separación de puntos. En las secciones siguientes se exponen las propiedades de compacidad local y paracompacidad. Se revisa a continuación el resultado más importante del capítulo, el teorema de Tychonoff. El capítulo concluye con la exposición del proceso de compactificación de Alexandroff[3]

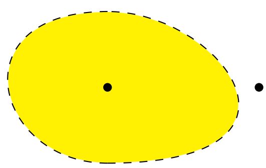
[1] Andrey Nikolayevich Tychonoff (1906 - 1993), matemático ruso.
[2] John Leroy Kelley (1916 - 1999), matemático norteamericano.
[3] Pavel Sergeyevich Alexandroff (1896 - 1982), matemático ruso.

([2], 1924), que permite hacer un espacio compacto de uno que no lo es, mediante la simple operación de "agregar" un punto, por lo que se conoce también como la compactificación en un punto.

4.1. Axiomas de Separación

Sea X un espacio topológico, se dice que dos puntos $x, y \in X$ son *topológicamente distinguibles* si existe una vecindad de alguno de ellos que no contiene al otro. Nótese que dos puntos que son distinguibles son automáticamente distintos. Dos puntos distinguibles $x, y \in X$ constituyen un *par distinguible* (x, y), si existe una vecindad de x que no contiene a y.

Un espacio topológico X es un *espacio de Kolmogoroff*[4] o un espacio T_0, si toda pareja[5] de puntos $x, y \in X$ es topológicamente distinguible. Nótese que un espacio es T_0, equivalentemente, si al menos uno de los pares (x, y) ó (y, x) es distinguible. Una pareja $\{x, y\}$ es distinguible, si ambos pares (x, y) y (y, x) son distinguibles.



Ejemplo 4.1 *Un espacio indiscreto con más de un punto no es T_0.* □

Ejemplo 4.2 *La recta de Michael tiene como conjunto subyacente los puntos de la recta real, y sus abiertos son de la forma $U \cup \mathbb{Q}^c$, donde $U \subseteq \mathbb{R}$ es un abierto euclidiano. La recta de Michael no es T_0, ya que, en ella, ningún par de irracionales es distinguible.* □

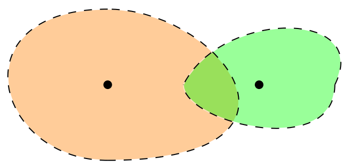
Proposición 4.1 *Un espacio es T_0 si y sólo si dos puntos distintos tienen cerraduras distintas.*

[4]Andrey Nikolayevich Kolmogoroff (1903 - 1987), matemático ruso.

[5]Una *pareja* de puntos es un conjunto de dos elementos que los contiene. Un *par* de puntos es un conjunto ordenado de dos elementos que los contiene.

Demostración. Supóngase que X es T_0, claramente, si (x, y) es un par distinguible, entonces $x \notin \overline{\{y\}}$, y en consecuencia $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Recíprocamente, si $z \in \overline{\{x\}} - \overline{\{y\}}$, entonces toda vecindad de z contiene a x, pero alguna vecindad de z no contiene a y, es decir, (x, y) es un par distinguible, de manera que X es T_0. ∎

Un espacio topológico X es un *espacio de Fréchet*[6] o un espacio T_1, si todo par de puntos en X es distinguible. Es decir, un espacio es T_1, si para dos puntos cualesquiera $x, y \in X$, la pareja $\{x, y\}$ es distinguible, es decir, tanto el par (x, y) como el par (y, x) son distinguibles. Equivalentemente, dados dos puntos, existe una vecindad de cada uno que no contiene al otro.



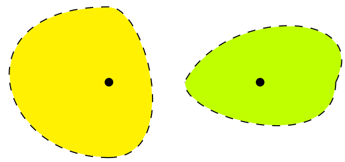
Ejemplo 4.3 *El espacio de Sierpinski es T_0, pero no es T_1.* □

Proposición 4.2 *Un espacio es T_1 si y sólo si en él los puntos son cerrados.*

Demostración. Sean X un espacio T_1 y $x \in X$, entonces, para todo $y \in X - \{x\}$ existe entonces $U \in \mathcal{N}(y)$ tal que $x \notin U$, de manera que $\{x\}^c$ es abierto. Supóngase ahora que los puntos son cerrados y sean $x, y \in X$ dos puntos distintos arbitrarios, entonces $y \notin \overline{\{x\}}$, es decir, existe $U \in \mathcal{N}(y)$ tal que $x \notin U$. Como estos son puntos arbitrarios, entonces X es T_1. ∎

Un espacio topológico X es un *espacio de Hausdorff*[7] o un espacio T_2, si dos puntos cualesquiera tienen vecindades ajenas. Más precisamente, si para cualesquiera $x, y \in X$ existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$ tales que $U \cap V = \varnothing$. Coloquialmente, un espacio es T_2 si separa puntos por abiertos.

[6] Maurice René Fréchet (1878 - 1973), matemático francés.
[7] Felix Hausdorff (1868 - 1942), matemático alemán.



Ejemplo 4.4 *La recta cofinita es T_1, pero no es T_2.* $\square$

Proposición 4.3 *Las propiedades de separación T_0, T_1 y T_2 son hereditarias a subespacios.*

Demostración. Ejercicio. $\blacksquare$

Proposición 4.4 *Todo espacio T_2 es T_1 y todo espacio T_1 es T_0.*

$$T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$$

Demostración. Ejercicio. $\blacksquare$

Ejemplo 4.5 *Todo espacio métrico es T_2, pero un espacio pseudométrico no es necesariamente T_0, como caso tomemos un espacio indiscreto con más de un punto.* $\square$

Proposición 4.5 *Un espacio X es de Hausdorff si y sólo si la diagonal*

$$\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$$

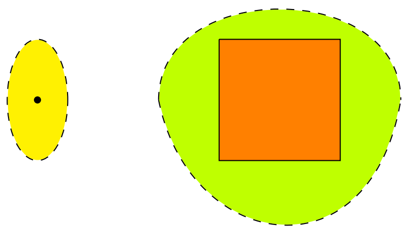
es cerrado en $X \times X$.

Demostración. Ejercicio. $\blacksquare$

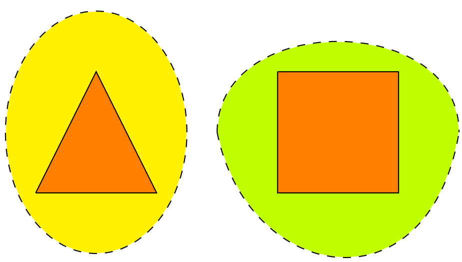
Proposición 4.6 *Un espacio pseudométrico es métrico si y sólo si es T_0.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio pseudométrico, y sean $x, y \in X$ distintos. Supongamos que X es T_0, y que (x, y) es distinguible, entonces, para algún $\varepsilon > 0$, existe $B_\varepsilon(x)$ tal que $y \notin B_\varepsilon(x)$, luego $d(x, y) > 0$, con lo que (X, d) es un espacio métrico. Recíprocamente, si (X, d) es métrico, entonces es T_2 y en consecuencia es T_0. ■

Un espacio topológico X es *regular* si dados un cerrado $F \subseteq X$ y un punto $x \notin F$, existen abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$. Un espacio se dice que es T_3 si es regular y T_1.



Un espacio topológico X es *normal* si dados dos cerrados ajenos $E, F \subseteq X$, existen abiertos ajenos U y V tales que $E \subseteq U$ y $F \subseteq V$. Un espacio se dice que es T_4 si es normal y T_1.



$$\begin{tikzcd}
T_4 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & T_3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & T_2 \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \arrow[r, Rightarrow] & T_0 \\
\text{Normal} & \text{Regular}
\end{tikzcd}$$

4.2. Espacios compactos

Una colección de conjuntos $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una *cubierta* del conjunto A si

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha,$$

y se dice que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ es una *subcubierta* de $\mathcal{U}$ si también es una cubierta para A.

Si X es un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $U_\alpha \subseteq X$ es es abierto para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, decimos que $\mathcal{U}$ es una *cubierta abierta* para A.

Se dice que $A \subseteq X$ es un *espacio compacto* si toda cubierta abierta para A admite una subcubierta finita.

Ejemplo 4.6 *Todo subespacio finito de un espacio topológico es un espacio compacto.* □

Ejemplo 4.7 *Todo espacio cofinito es compacto.* □

Ejemplo 4.8 *La recta euclidiana no es una espacio compacto. Si consideramos por ejemplo la cubierta abierta consistente de los intervalos de la forma $(n-1, n+1)$para $n \in \mathbb{Z}$, observamos que no es posible elegir una subcubierta finita. La demostración detallada queda como ejercicio. Entonces, un intervalo abierto no es compacto. El lector podrá demostrar sin dificultad, que los intervalos de la forma $[a, b)$ y $(a, b]$ no son compactos.* □

Ejemplo 4.9 *Un espacio numerable y discreto no es compacto. Los detalles contituyen un sano ejercicio.* □

Ejemplo 4.10 *En la recta euclidiana, el conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_+\right\}$ no es compacto, pero $A \cup \{0\}$ si lo es. Los detalles se dejan como ejercicio para el lector.* □

Ejemplo 4.11 *Por el teorema de Heine[8]-Borel[9], en espacios euclidianos cerrado y acotado es equivalente a compacto. Volveremos posteriormente sobre los detalles.* □

---

[8]Heinrich Eduard Heine (1821 - 1881), matemático alemán.

[9]Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 - 1956), matemático y político francés.

Ejemplo 4.12 *Considere la recta real con la topología en la que cada abierto básico es complemento de un intervalo cerrado. Posterior a demostrar que esta es en efecto una topología sobre $\mathbb{R}$, invitamos al lector a demostrar que con esta topología, la recta es un espacio compacto.* $\square$

Una colección de conjuntos $\{C_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ tiene la *propiedad de intersección finita* (PIF), si toda subcolección finita tiene intersección no vacía.

Teorema 4.7 *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si toda familia de cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.*

Demostración. Supóngase que X es compacto y sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de cerrados de X con la propiedad de intersección finita. Si $\cap\mathcal{F} = \varnothing$, entonces $\mathcal{U} = \{F_\alpha^c | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una cubierta abierta de X, la que admite por hipótesis una subcubierta finita, digamos $\{F_1^c, \ldots, F_n^c\}$. Tenemos entonces que $X = F_1^c \cup \ldots \cup F_n^c$, de donde $F_1 \cup \ldots \cup F_n = \varnothing$, en contradicción con la hipótesis según la cual $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita. Recíprocamente, supóngase ahora que toda familia de cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía, y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta abierta de X. Si no existe una subcolección finita de $\mathcal{U}$ que sea cubierta de X, entonces $\mathcal{F} = \{U_\alpha^c | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita que por hipótesis debe tener intersección no vacía, contrariamente a la elección de $\mathcal{U}$ como una cubierta abierta de X. $\blacksquare$

La compacidad es hereditaria a subespacios cerrados.

Proposición 4.8 *Un cerrado en un compacto es compacto.*

Demostración. Sean $F \subseteq X$ cerrado y X compacto. Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una cubierta abierta para A, entonces $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{F^c\}$ es una cubierta abierta para X. Elíjase por compacidad una subcubierta finita $\mathcal{V}_0$, entonces $\mathcal{V}_0 - \{F^c\} \subseteq \mathcal{U}$ es una subcubierta finita para A. $\blacksquare$

La compacidad es una propiedad topológica, en el sentido de que se preserva bajo continuidad.

Proposición 4.9 *La imagen continua de un compacto es compacta.*

Demostración. Sea X un espacio compacto, bastará demostrar que Y es compacto si $f : X \to Y$ es continua y suprayectiva. Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una cubierta abierta para Y, entonces $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$, por continuidad, es una cubierta abierta para X. Si $\mathcal{V}_0 = \{f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)\} \subseteq \mathcal{V}$ es una subcubierta finita para X, entonces $\mathcal{U}_0 = \{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$ es una subcubierta finita para Y. ■

Los espacios de Hausdorff son particularmente generosos con la compacidad.

Proposición 4.10 *Un compacto en un Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Sean $K \subseteq X$ compacto y X Hausdorff. Si $K = X$ no hay nada que demostrar, en caso contrario, elíjase $x \in K^c$, y para cada $y \in K$, un par de abiertos $U_y \in \mathcal{N}(x)$ y $V_y \in \mathcal{N}(y)$ tales que $U_y \cap V_y = \varnothing$. Entonces $\{V_y | y \in K$ es una cubierta abierta para Y, de la que elegimos una subcubierta finita $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\}$, de manera que si $V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$, entonces $K \subseteq V$, y si $U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$, y en consecuencia $U \in \mathcal{N}(x)$ y $U \cap V = \varnothing$, de manera que $U \cap K = \varnothing$. ■

La compacidad es fácilmente caracterizable en espacios métricos.

Ejemplo 4.13 *Por el teorema de Heine-Borel, en espacios euclidianos, un subespacio es cerrado y acotado si y sólo si es compacto. Un subespacio de un espacio métrico se dice que es totalmente acotado si está contenido en la unión de una colección finita de bolas de una radio dado. En espacios métricos, el teorema de Heine-Borel garantiza que un subespacio es compacto si y sólo si es cerrado y completamente acotado.* □

Proposición 4.11 *Una biyección continua de un compacto en un Hausdorff es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean X compacto, Y Hausdorff y $f : X \to Y$ una biyección continua. Si $A \subseteq X$ es cerrado, entonces es compacto, y por continuidad, $F(A) \subseteq Y$ es también compacto. Ahora bien, como Y es Hausdorff, entonces $f(A) \subseteq Y$ es cerrado. Entonces f es cerrada, y en consecuencia f^{-1} es continua. ■

Este resultado, a pesar de su aparente sencillez, debe tomarse con precaución, como puede observarse de los dos ejemplos que siguen.

Ejemplo 4.14 *La exponencial $f : [0, 2\pi) \to S^1$, dada por $f(t) = e^{it}$ no es un homeomorfismo, aunque es una biyección continua y S^1 escompacto y Hausdorff, dado que $[0, 2\pi)$ no es compacto. La inversa $f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$ no es un homeomorfismo, a pesar de que f^{-1} es una biyección, S^1 es compacto y $[0, 2\pi)$ es Hausdorff, puesto que f^{-1} no es continua.* □

Ejemplo 4.15 *Considere el intervalo $[0, 1]$ con la topología euclidiana $[0, 1]_E$ y con la topología de Sorgenfrey $[0, 1]_S$. La aplicación identidad $[0, 1]_E \to [0, 1]_S$ no es un homeomorfismo, a pesar de que $[0, 1]_E$ es compacto y $[0, 1]_S$ es Hausdorff, porque no es continua. La aplicación identidad $[0, 1]_S \to [0, 1]_E$ es una biyección continua sobre un Hausdorff, pero no es un homeomorfismo, de manera que $[0, 1]_S$ no es compacto, a pesar de que es cerrado y acotado.* □

El resultado más importante de esta sección es el teorema de Tychonoff.

Teorema 4.12 (de Tychonoff,1930) [10] *Un producto es compacto si y sólo si cada uno de los factores es compacto.*

Demostración. Sean $\{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de espacios topológicos, y X su producto. Si X es compacto, dado que la proyección $p_\alpha : X \to X_\alpha$

[10] Andrey NIcolayevich Tychonoff (1906 - 1993), matemático ruso. El 1930 Tychonoff publicó la demostraciuón de su teorema para el caso de Productos del intervalo $I = [0, 1]$, y en 1935 la observación de que el caso general se demostraba de forma análoga. La primera demostración publicada completa se apareció en el artículo de 1937 *Les groupes de Betti d'un complexe infini* del matemático checo Eduard Cěch (1893 - 1930).

es contiua y suprayectiva, entonces X_α es compacto. Recíprocamente, Sea $\mathcal{F} = \{F_i | i \in \mathcal{I}\}$ una familia de cerrados de X con la PIF, la que puede suponerse maximal, en el sentido de que si $F_i, F_j \in \mathcal{F}$, entonces $F_i \cap F_j \in \mathcal{F}$, ya que si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, necesariamente $\cap\mathcal{G} \subseteq \cap\mathcal{F}$. Por consiguiente, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, la colección $\mathcal{F}_\alpha = \{\overline{p_\alpha(F_i)} | i \in \mathcal{I}\}$ tiene la PIF, de manera que por la compacidad de X_α, ocurre que $\cap\mathcal{F}_\alpha \neq \varnothing$. Elíjase[11] $x_\alpha \in \cap\mathcal{F}_\alpha$, y sea $x = (x_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}) \in X$, que claramente satisface que $p_\alpha(x) = x_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Sea

$$S = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

un básico de la topología producto para X, tal que $x \in S$, entonces $p_\alpha(S)$ es un abierto de X_α que contiene a x_α, y en consecuencia $p_\alpha(S) \cap p_\alpha(F_i) \neq \varnothing$ para todo α y para todo i, de manera que $p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) \cap F_i \neq \varnothing$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ y todo $i \in \mathcal{I}$. Sea $y_{\alpha_k} \in p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) \cap F_i$ para $i \in \mathcal{I}$ fijo, y tómese un punto $y \in F_i$ tal que $p_{\alpha_k}(y) = y_{\alpha_k}$, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, que claramente satisface que $y \in S \cap F_i$, con lo que $S \cap F_i \neq \varnothing$. Se sigue de aquí que $S \cap F_i \neq \varnothing$, para todo $i \in \mathcal{I}$. Entonces $x \in \overline{F_i} = F_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$, con lo que, entonces $x \in \cap\mathcal{F}$. ■

En la demostración del teorema anterior juega un papel central el axioma de elección, y es un hallazgo de Kelley[34], publicado en 1950, que este resultado también implica el axioma de elección.

Teorema 4.13 (Kelley, 1950) *El axioma de elección es equivalente con el Teorema de Tychonoff.*

Demostración. Una de las implicaciones ha quedado demostrada en el resultado previo, supongamos entonces válido en teorema de Tychonoff, supóngase que $\mathcal{Y} = \{Y_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una colección no vacía de conjuntos no vacíos, y sea

$$y \notin \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha.$$

[11] Nótese que aquí se hace uso del axioma de elección.

Nótese que tal punto en verdad existe, por ejemplo, si

$$y = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha.$$

Denotemos $X_\alpha = Y_\alpha \cup \{y\}$, y dótese a este conjunto de la topología $\tau_\alpha = \{X_\alpha, \{y\}, \varnothing\}$, respecto de la cual es claramente compacto, y por hipótesis, el producto

$$X = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$$

es compacto. Claramente Y_α es cerrado en X_α, de manera que por continuidad $p_\alpha^{-1}(Y_\alpha)$ es cerrado en X y es no vacío. Para toda subcolección finita $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{A}$ se satisface que

$$x \in p_{\alpha_1}^{-1}(Y_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(Y_{\alpha_n})$$

donde $x_\alpha = y$ para $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y se elige $x_{\alpha_k} \in Y_{\alpha_k}$ para $k \in \{1, \ldots, n\}$ dado que cada Y_α es no vacío[12]. Tenemos entonces que $\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una colección de cerrados de X con la PIF, de manera que por compacidad, tiene intersección no vacía, y dado que

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha,$$

se ha completado la demostración. ■

4.3. La topología compacto-abierta

Como hemos visto antes, un elemento $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ puede verse como una aplicación

$$f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow X$$

[12]Nótese que aquí no es necesario el uso del axioma de elección, dado que se trata de una colección finita; la existencia de cada x_{α_k} está garantizada por el axioma de los pares, en la axiomática de Zermelo-Fraenkel.

tal que $f(k) = x_k$. De igual manera, dado $U \subseteq X$ abierto, el conjunto $p_k^{-1}(U) \subseteq X^n$, donde $p_k : X^n \to X$ es la k-ésima proyección, se identifica con el conjunto de las aplicaciones $f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow X$ tales que $f(k) \in U$.

Si denotamos este conjunto de aplicaciones mediante $\mathcal{U}(k, U)$, podemos considerar a la colección como subbase para una topología sobre $X^{\{1,\ldots,n\}}$, y para ello basta observar que si τ es la topología sobre X, entonces

$$\bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{U \in \tau} \mathcal{U}(k, U) = X^{\{1,\ldots,n\}}.$$

En efecto, si $f \in X^{\{1,\ldots,n\}}$ y $U \subseteq X$ es un abierto tal que $f(k) \in U$, entonces $f \in \mathcal{U}(k, U)$. Además, por las observaciones anteriores, con esta topología, el espacio producto X^n y el espacio de funciones $X^{\{1,\ldots,n\}}$ son homeomorfos[13].

Consideremos, dados dos espacios topológicos X, Y, el conjunto Y^X cuyos elementos son las aplicaciones $f : X \to Y$. Este conjunto puede ser topologizado como un espacio producto, dado que cada elemento $f \in Y^X$ puede verse como un punto $(p(x)|x \in X)$ en el producto

$$\prod_{x \in X} Y,$$

mediante la asignación $f \mapsto (f(x)|x \in X)$. La topología inicial inducida por esta biyección es la topología producto sobre Y^X.

Si denotamos $\mathcal{U}(A, B) = \{f \in Y^X | f(A) \subseteq B\}$ para$A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, notamos que $\mathcal{U}(k, U) \cap \mathcal{U}(k, V) = \mathcal{U}(k, U \cap V)$ y $\mathcal{U}(k, U) \cap \mathcal{U}(m, U) = \mathcal{U}(\{k, m\}, U)$ en $X^{\{1,\ldots,n\}}$.

Proposición 4.14 *Dados $A, A_1, A_2 \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$, entonces, sobre Y^X se satisfacen:*

1. $\mathcal{U}(A, B_1) \cap \mathcal{U}(A, B_2) = \mathcal{U}(A, B_1 \cap B_2)$, y

[13]Considerando al natural n como el ordinal $n = \{0, \ldots, n-1\}$, tenemos que X^n y $X^{\{0,\ldots,n-1\}}$ son en realidad el mismo conjunto.

2. $\mathcal{U}(A_1, B) \cap \mathcal{U}(A_2, B) = \mathcal{U}(A_1 \cup A_2, B)$.

Demostración. Ejercicio. ■

El resultado siguiente nos proporciona una forma alternativa y muy útil de topologizar un espacio de aplicaciones.

Proposición 4.15 *La colección de los conjuntos de la forma $\mathcal{U}(K, U)$ para $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq Y$ abierto es subbase para una topología sobre Y^X.*

Demostración. Dada $f \in Y^X$, claramente $f \in \mathcal{U}(x, U)$ para $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}(f(x))$ abierta. ■

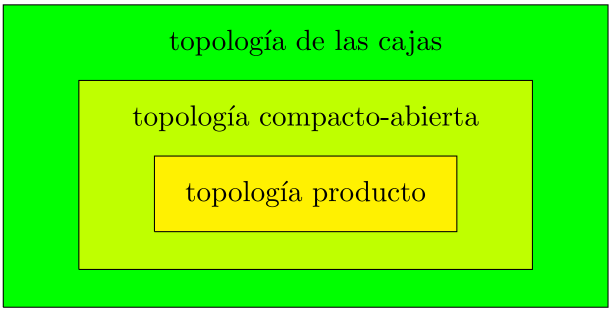
La topología generada por esta subbase es la *topología compacto-abierta* sobre Y^X.

Proposición 4.16 *La topología compacto-abierta es más fina que la topología producto.*

Demostración. Un subbásico de la topología producto es un subbásico de la compacto abierta $\mathcal{U}(A, U)$, donde A es un conjunto finito, consecuentemente, todo abierto de la topología producto es abierto en la topología compacto abierta. ■

Como recordamos, la topología de las cajas es más fina que la topología producto, y coincide con ella para productos finitos. Entonces, para productos finitos, la topología producto es precisamente la compacto-abierta. En el caso general, la topología compacto-abierta es una topología intermedia entre la producto[14] y la de las cajas.

[14]La topología producto, en analogía, podría ser llamada la “topología finito-abierta”.



Un conjunto de la forma $\mathcal{U}(A, U)$, donde $A \subseteq X$ es arbitrario y $U \subseteq Y$ es abierto, es abierto en la topología de las cajas para Y^X, con lo que se observa que la topología compacto-abierta está contenida en la de las cajas.

Por otra parte, notemos que para $K \subseteq X$ y $U \subseteq Y$, se satisface que

$$\mathcal{U}(K, U) = \bigcap_{x \in K} \mathcal{U}(x, V),$$

de manera que, en particular, si $x \in K$, entonces $\mathcal{U}(K, U) \subseteq \mathcal{U}(x, U)$.

Lema 4.17 *Todo abierto de Y^X, con la topología compacto-abierta, está contenido en un abierto de la forma $\mathcal{U}(x, U)$.*

Demostración. Si $x_i \in K_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $U = U_1 \cup \ldots \cup U_n$, entonces

$$\mathcal{U}(K_1, U_1) \cap \ldots \cap \mathcal{U}(K_n, U_n) \subseteq \mathcal{U}(x_1, U_1) \cap \ldots \cap \mathcal{U}(x_n, U_n) \subseteq \mathcal{U}(x_i, U),$$

con lo que se obtiene el resultado. ■

Las aplicaciones constantes revisten una importancia particular, puesto que, entre otras cosas, ellas constituyen un subespacio de Y^X homeomorfo con Y.

Lema 4.18 *Toda vecindad de una aplicación constante c en Y^X contiene una vecindad de c de la forma $\mathcal{U}(K, U)$*

Demostración. Un abierto que contiene a $f \in Y^X$ tiene la forma

$$\mathcal{W} = \mathcal{U}(K_1, U_1) \cap \ldots \cap \mathcal{U}(K_n, U_n),$$

y claramente, si $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$, y $\mathcal{W}$ contiene una aplicación constante c, entonces $U \neq \varnothing$. Si además denotamos $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$, entonces $\mathcal{U}(K, U) \subseteq \mathcal{W}$ y $c \in \mathcal{U}(K, U)$. ■

Una buena noticia es que las propiedades de separación del codominio, se preservan en el espacio de aplicaciones.

Proposición 4.19 *Sean X, Y espacios topológicos. Entonces, Y^X es Hausdorff si y sólo si Y es Hausdorff.*

Demostración. Supóngase primero que Y es T_2, y sean $f, g \in Y^X$ distintas. Sea $x \in X$ tal que $f(x) \neq f(y)$, y sean $U, V \subseteq Y$ abiertos ajenos tales que $f(x) \in U$ y $f(y) \in V$, entonces $f \in \mathcal{U}(x, U)$, $g \in \mathcal{U}(x, V)$ y además $\mathcal{U}(x, U) \cap \mathcal{U}(x, V) = \varnothing$. Si se supone recíprocamente que Y^X es T_2, dados dos puntos distintos $y_1, y_2 \in Y$, consideremos dos las aplicaciones constantes $c_1, c_2 : X \to Y$ con valores y_1 y y_2 respectivamente, y sean $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ vecindades ajenas de c_1 y c_2 respectivamente. Tomemos $K_1, K_2 \subseteq X$ compactos y $U_1, U_2 \subseteq Y$ abiertos, tales que $c_1 \in \mathcal{U}(K_1, U_1) \subseteq \mathcal{W}_1$ y $c_2 \in \mathcal{U}(K_2, U_2) \subseteq \mathcal{W}_2$. Escribiendo ahora $K = K_1 \cup K_2$, tenemos que $\mathcal{U}(K, U_1)$ y $\mathcal{U}(K, U_2)$ son vecindades ajenas de c_1 y c_2 respectivamente. Si $z \in U_1 \cap U_2$, y c es la aplicación constante con valor z, tenemos que $c \in \mathcal{U}(K, U_1) \cap \mathcal{U}(K, U_2)$, lo que es claramente contradictorio. ■

Ejemplo 4.16 *Dado un espacio con un único punto $\{*\}$, el espacio compacto abierto $X^{\{*\}}$ es homeomorfo con X. La demostración queda como ejercicio.* □

Ejemplo 4.17 *Si X es el espacio producto de la colección $\{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$, dado que*

$$p_\alpha^{-1}(U) \cap p_\alpha^{-1}(V) = p_\alpha^{-1}(U \cap V)$$

el espacio X es T_0, T_1 ó T_2 siempre que cada factor lo sea. Ahora bien, como la topología compacto-abierta es más fina que la producto, entonces Y^X es T_0, T_1 ó T_2 siempre que Y lo sea. $\square$

Se concluye la sección con un par de ejercicios cuyo contenido será de utilidad en breve.

Proposición 4.20 *Todo espacio compacto y Hausdorff es regular.*

Demostración. Ejercicio. $\blacksquare$

Proposición 4.21 *Todo espacio compacto y Hausdorff es normal.*

Demostración. Ejercicio. $\blacksquare$

4.4. Compacidad local

Una espacio topológico X se dice que es *localmente compacto en* $x \in X$ si existe un compacto $K \subseteq X$ tal que $K \in \mathcal{N}(x)$. El espacio topológico X se dice que es *localmente compacto* si es localmente compacto en cada punto.

Ejemplo 4.18 *Los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ son localmente compactos. En la recta, dados $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ podemos hacer $K = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ y claramente $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, de manera que $K \in \mathcal{N}(x)$.* $\square$

Ejemplo 4.19 *Todo compacto es localmente compacto. En efecto, si X es compacto y $x \in X$, para todo $U \in \mathcal{N}(x)$ se tiene que $\overline{U}$ es una vecindad compacta de x.* $\square$

Ejemplo 4.20 *El subespacio $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ no es localmente compacto, en tanto que subespacio de la recta euclidiana, dado que todo compacto tiene interior vacío.* $\square$

Ejemplo 4.21 *La recta real con la topología del límite inferior, es decir, la recta de Sorgenfrey, no es un espacio localmente compacto, y por tanto no es compacto. La recta de Sorgenfrey es claramente Hausdorff, de manera que todo compacto es cerrado. El intervalo* $(0,1]$ *no es compacto, ya que la cubierta de los conjuntos de la forma* $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ *junto con* $[1,2)$ *no admite una subcubierta finita. El intervalo* $[0,1]$ *no es compacto, puesto que la cubierta de los intervalos de la forma*

$$\left[\frac{2^k-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\right)$$

para $k \in \mathbb{N}$, *junto con* $[1,2)$ *no admite una subcubierta finita.* $\square$

Un conjunto $A \subseteq X$ se dice *relativamente compacto* en X si $\overline{A}$ es un conjunto compacto.

Proposición 4.22 *Un espacio de Hausdorff* X *es localmente compacto si y sólo si cada punto de* X *tiene una vecindad relativamente compacta.*

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff. Supóngase que X es localmente compacto y sea $x \in X$. Tomemos un compacto K y un abierto U tales que $x \in U \subseteq K$, dado que K es cerrado en X, entonces $\overline{U} \subseteq K$ que es cerrado en un compacto y es por consiguiente compacto. El recíproco es inmediato. $\blacksquare$

Corolario 4.23 *Sea* X *un espacio de Hausdorff. El espacio* X *es localmente compacto si y sólo si* X *admite una base de conjuntos relativamente compactos.*

Lema 4.24 *Si* X *es localmente compacto y Hausdorff, entonces para todo* $x \in X$ *y toda* $U \in \mathcal{N}(x)$ *existe un abierto* V *tal que* $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, *y tal que* $\overline{V}$ *es compacto.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto arbitrario y U una vecindad de x, tómese una vecindad abierta $W \subseteq U$ de x relativamente compacta. Entonces $F = W^c \cap \overline{W}$ es cerrado y $x \notin F$. Dado que $\overline{W}$ es compacto y

T_2, entonces es regular. Elijamos abiertos ajenos V_0 y U_0 de $\overline{W}$ tales que $x \in V_0$ y $F \subseteq U_0$, de manera entonces que $x \in V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq U_0^c \subseteq W \subseteq U$. Ahora bien, $V = V_0 \cap W$ es abierto en X y satisface $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, como se propuso. Además $\overline{V}$ es compacto porque $\overline{W}$ es compacto y $\overline{V} \subseteq \overline{W}$. ■

La composición de aplicaciones define una aplicación

$$\Phi : Z^Y \times Y^X \to Z^X,$$

mediante $\Phi(g, f) = g \circ f$, a la que llamaremos también la *composición*. Denotamos por $C(X, Y)$ el subespacio de Y^X que consta de las aplicaciones continuas.

Proposición 4.25 *Si Y es localmente compacto y Hausdorff, la composición*

$$\Phi : C(Y, Z) \times C(X, Y) \to C(X, Z)$$

es una aplicación continua, con la topología compacto-abierta.

Demostración. Basta demostrar que para todo subbásico $\mathcal{U}(K, U)$ del espacio $C(X, Z)$, la preimagen $\Phi^{-1}\mathcal{U}(K, U) \subseteq C(Y, Z) \times C(X, Y)$ es abierto. Si $(g, f) \in \Phi^{-1}\mathcal{U}(K, U)$, $z = g \circ f(x) \in U$ para todo $x \in K$. Por la continuidad de g, tenemos que $W = g^{-1}(U) \subseteq Y$ es abierto, tómese entonces un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W$, con $\overline{V}$ compacto y además $y = f(x) \in V$. Entonces claramente $(g, f) \in \mathcal{U}(\overline{V}, U) \times \mathcal{U}(\{x\}, V)$. ■

4.5. Compactificación de Alexandroff

Si un espacio topológico X que no es compacto puede ser considerado como subespacio de un espacio compacto Y, puede por ello ser estudiado con más facilidad. Conviene entonces encontrar el mínimo posible de los espacios compactos que contienen un subespacio homeomorfo con el espacio dado. El nuevo espacio Y se dice que es una *compactificación*[15] de

[15] El término “compactificación” no existe en idioma castellano, por lo que el término correcto es “compactación”, no obstante, continuaremos con la tradición terminológica.

X. Estudiaremos una compactificación particularmente útil para espacios localmente compactos, conocida como la *compactificación en un punto* o bien *compactificación de Alexandroff*, llamada así porque su descubridor fue justamente Pavel Alexandroff[16].

Si X es un espacio localmente compacto y Hausdorff, consideremos el conjunto $Y = X \cup \{\infty\}$ con la topología en la que los abiertos se definen como sigue:

1. Si U es abierto en X, entonces U es abierto en Y.

2. Si K es compacto en X, entonces $U = Y - K = K^c$ es abierto en Y.

Para verificar que lo anterior define en efecto una topología, consideremos las siguientes posibilidades:

1. Dada una familia $\mathcal{K} = \{K_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ de compactos de X, claramente
$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha^c = \left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha\right)^c$$
es abierto en Y, dado que la intersección es un cerrado contenido en un compacto.

2. Dada una familia finita $\{K_1, \ldots, K_n\}$ de compactos de X, se tiene que
$$\bigcap_{i=1}^{n} K_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right)^c$$
es abierto en Y, dado que la unión finita de compactos es compacta.

3. Si U es un abierto de X y $K \subseteq X$ es compacto, entonces $U \cup K^c$ es abierto en Y, puesto que
$$(U \cup K^c)^c = U^c \cap K$$
es un compacto en X.

[16]Pavel Sergeyevich Alexandroff(1896 - 1982), matemático ruso, que fuera profesor de Kurosh, Pontryagin y Tychonoff.

4. Si U es un abierto de X y $K \subseteq X$ es compacto, entonces $U \cap K^c$ es abierto en Y, puesto que
$$(U \cap K^c)^c = U^c \cup K$$
es unión de dos cerrados de Y.

Teorema 4.26 *La compactificación en un punto de un espacio localmente compacto y Hausdorff X es un espacio compacto y Hausdorff.*

Demostración. Si $x \in X$ y $K \subset X$ es una vecindad compacta de x, entonces K° y K^c son vecindades ajenas de x y de ∞ respectivamente. Por otra parte, si $\{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una cubierta abierta de $Y = X \cup \{\infty\}$, supongamos que $\infty \in U_{\alpha_0}$. Sin perder generalidad puede suponerse que $U_{\alpha_0} = Y - K$ para algún compacto K en Y. Tomemos entonces una subcubierta finita $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ de K, de manera que $\{U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita para Y. ■

Ejemplo 4.22 *La compactificación en un punto de la recta $\mathbb{R}$ es la 1-esfera S^1. La compactificación en un punto del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es la n-esfera S^n. La compactificación en un punto del plano complejo $\mathbb{C}$ es la esfera de Riemann S^2.* □

Ejemplo 4.23 *La compactificación en un punto del espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ es un espacio*
$$\bigvee_{n \in \omega} S^1$$
conocido como el "arete hawaiano". Este espacio es homeomorfo con la compactificación en un punto de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. □

Ejemplo 4.24 *La compactificación en un punto del espacio $\mathbb{R} - \{0\}$ es un espacio conocido conocido como la "figura 8", que es también homeomorfo con S^1/S^0. En general, la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es S^n/S^0, como el lector podrá demostrar con facilidad.* □

Es común en la literatura denotar la compactificación de Alexandroff de un espacio X como $\widehat{X}$. Una propiedad interesante de la compactificación de Alexandroff es su unicidad, la demostración de lo cual se sugiere como ejercicio para el lector. Debe demostrarse que si Y y Z son dos compactificaciones de Alexandroff del mismo espacio X, entonces Y y Z son homeomorfos.

Proposición 4.27 *Si X y Y son espacios homeomorfos, entonces $\widehat{X}$ y $\widehat{Y}$ son espacios homeomorfos.*

Demostración. Ejercicio. ■

Ejemplo 4.25 *La suspensión reducida $S^1 \wedge S^n$ es la compactificación en un punto de $S^1 \times S^n - S^1 \vee S^n$ que es homeomorfo con D^n.* □

4.6. Espacios de Lindelöf

Se concluye el presente capítulo estudiando propiedades que guardan analogías interesantes con la compacidad, y que, en los hechos, constituyen generalizaciones de ésta.

Un espacio topológico X se dice *numerablemente compacto* si toda cubierta abierta y numerable para X admite una subcubierta finita.

Proposición 4.28 *Todo espacio compacto es numerablemente compacto.*

Demostración. Una cubierta numerable es una cubierta. ■

Como muestra el siguiente ejemplo, no todo espacio numerablemente compacto es compacto.

Ejemplo 4.26 *El primer ordinal no numerable*[17] $\Omega = [0, \Omega)$ *es numerablemente compacto con la topología del orden, pues dada una cubierta numerable y abierta, alguno de los abiertos debe ser no numerable, de manera*

[17] El primer ordinal no numerable es el conjunto cuyos elementos son todos los ordinales finitos o numerables.

que debe ser justamente Ω. Por otra parte, no es compacto porque es discreto. Claramente Ω es 1°-numerable, pero por el resultado que sigue no es 2°-numerable. $\square$

Proposición 4.29 *Todo espacio 2°-numerable y numerablemente compacto es compacto.*

Demostración. Ejercicio. $\blacksquare$

Un espacio topológico X se dice *secuencialmente compacto* si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente. Como se muestra en los dos ejemplos que siguen, las propiedades de compacidad secuencial y compacidad numerable son independientes.

Ejemplo 4.27 *El producto de una cantidad numerable de copias de $I = [0,1]$ es compacto por el teorema de Tychonoff, de manera que es numerablemente compacto. Este espacio, no obstante, no es secuencialmente compacto, dado que la sucesión de los vectores unitarios (e_n) no tiene subsucesiones convergentes.* $\square$

Proposición 4.30 *Sea X un espacio topológico T_1 y 1°-numerable. Entonces X es numerablemente compacto si y sólo si es secuencialmente compacto.*

Demostración. Supongamos primero que X es numerablemente compacto, y sea (x_n) una sucesión en X. Si (x_n) no tiene subsucesiones convergentes, entonces, cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U_x que contiene a lo sumo una cantidad finita de términos de la sucesión. Eligiendo un U_x para cada punto y usando la hipótesis 1°-numerable, encontramos una cubierta numerable y abierta que no puede reducirse a una finita. Supongamos recíprocamente que X es secuencialmente compacto, y sea $\mathcal{U} = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta abierta que no admite una subcubierta finita. Elíjase un punto $x_n \notin U_1 \cup \ldots \cup U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y sea x un punto en la cerradura de $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, que existe por hipótesis. Si $x \in U_k$, entonces $x_n \notin U_k$ para todo $n \geq k$, lo que constituye una contradicción. ■

Un espacio topológico X es *de Lindelöf* si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta numerable. Claramente, todo espacio 2°-numerable es de Lindelöf[18]. Volveremos sobre esta clase de espacios en la sección 7.6.

Ejemplo 4.28 *La recta real y, en general, todo espacio euclidiano es de Lindelöf. La recta de Sorgenfrey y la recta de Michael son espacios de Lindelöf.* □

Ejemplo 4.29 *El primer ordinal no numerable* $\Omega = [0, \Omega)$ *no es un espacio de Lindelöf, puesto que es no numerable y discreto.* □

Proposición 4.31 *Sea* X *un espacio* 2°*-numerable. Entonces* X *es compacto si y sólo si es secuencialmente compacto.* □

Demostración. Supóngase que X es compacto, y sea (x_n) una sucesión en X sin puntos de acumulación. Para cada $x \in X$, elíjase una vecindad abierta U_x que contiene a lo sumo una cantidad finita de términos de la sucesión. Entonces $\{U_x | x \in X\}$ es una cubierta abierta que no admite subcubierta finita. Supóngase, recíprocamente, que X es secuencialmente compacto, y sea $\mathcal{B} = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para la topología de X, que es, en particular, una cubierta abierta. Por hipótesis, toda cubierta abierta admite una subcubierta numerable. Elíjase $x_n \notin U_1 \cup \ldots \cup U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Nuevamente, esta es una sucesión sin puntos de adherencia. ■

Proposición 4.32 *Todo espacio compacto y* 1°*-numerable es secuencialmente compacto.*

Demostración. Si X es finito no hay nada que demostrar, supóngase entonces que X es infinito. Considérese una sucesión en X con imagen infinita. Para cada $x \in X$, elíjase un conjunto abierto U_x tal que contiene a lo sumo una cantidad finita de términos de la sucesión. Es posible encontrar

[18] Ernst Leonard Lindelöf (1870 - 1946), matemático finlandés.

el abierto U_x con las propiedades propuestas por la hipótesis T_1, y por la suposición de que (x_n) no tiene puntos de adherencia. Entonces, la colección $\{U_x | x \in X\}$ es una cubierta abierta que no admite subcubierta finita. ■

$$
\begin{tikzcd}
\textbf{Lindelöf} & & \textbf{paracompacto} \\
\textbf{compacto} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[urr, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \textbf{localmente compacto} \\
\textbf{numerablemente compacto} & & \\
\textbf{secuencialmente compacto} \arrow[u, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}
$$

4.7. Paracompacidad

Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta abierta para X. Se dice que una cubierta $\mathcal{V} = \{V_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{U}$ si para cada $\beta \in \mathcal{B}$ existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $V_\beta \subseteq U_\alpha$. Un refinamiento que consta de abiertos se dice que es un *refinamiento abierto*, en lo que sigue refinamiento y refinamiento abierto se usarán como sinónimos.

Una familia $\mathcal{V}$ de conjuntos de un espacio topológico X se dice *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe una vecindad $U \in \mathcal{N}(x)$ que intersecta a lo sumo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{V}$. Un espacio topológico se dice *paracompacto* si toda cubierta abierta de X admite un refinamiento localmente finito.

Ejemplo 4.30 *Los espacios euclidianos son el paradigma básico de la paracompacidad. En particular, la recta rela $\mathbb{R}$ es paracompacta, ya que si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para $\mathbb{R}$, entonces el compacto $[n-1, n+1]$ se cubre con una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$, de manera que las intersecciones* *de los elementos de* $\mathcal{U}$ *con los intervalos de la forma* $(n-2, n)$, $(n-1, n+1)$ *y* $(n, n+2)$ *constituyen un refinamiento localmente finito.* □

La paracompacidad es la generalización natural de la compacidad.

Proposición 4.33 *Un espacio* X *es compacto si y sólo si toda cubierta abierta admite un refinamiento abierto localmente finito.*

Demostración. Toda subcubierta es un refinamiento. El recíproco se obtiene tomando un abierto U de la cubierta original por cada abierto V del refinamiento finito tal que $V \subseteq U$. ■

Proposición 4.34 *Todo compacto es paracompacto.*

Demostración. Nuevamente el argumento es que toda subcubierta es un refinamiento. ■

Claramente toda subcubierta es un refinamiento pero no recíprocamente, existen entonces espacios como los euclidianos que son paracompactos pero no compactos.

Proposición 4.35 *Todo paracompacto y Hausdorff* X *es* T_3.

Demostración. Basta demostrar que es regular, dado que T_3 es regular y T_1. Tomemos entonces un punto $x \in X$ y un cerrado $B \subset X$ tal que $x \notin B$. Para cada $y \in B$ sea $V_y \in \mathcal{N}(y)$ un abierto tal que $x \notin \overline{V_y}$. Si

$$V = \bigcup_{y \in B} V_y,$$

como

$$\overline{V} \subseteq \bigcup_{y \in B} \overline{V_y},$$

entonces $B \subseteq V$ y $x \notin \overline{V}$. ■

Proposición 4.36 *Todo paracompacto y Hausdorff X es T_4.*

Demostración. Basta demostrar que es normal, dado que T_4 es normal y T_1. Tomemos entonces dos cerrados ajenos $A, B \subset X$. Para cada $x \in A$ sea $U_x \in \mathcal{N}(x)$ un abierto tal que $B \cap \overline{U_x} = \varnothing$. Si

$$U = \bigcup_{x \in A} U_x,$$

como

$$\overline{U} \subseteq \bigcup_{x \in A} \overline{U_x},$$

entonces $A \subseteq U$ y $B \cap \overline{U} = \varnothing$. ■

Proposición 4.37 *Todo cerrado en un paracompacto Hausdorff es paracompacto.*

Demostración. Sean X paracompacto, $F \subseteq X$ cerrado y $\mathcal{U}_0 = \{U_\alpha \cap F | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta de F por abiertos relativos, entonces $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{F^c\}$ es una cubierta abierta de X. Usando la paracompacidad de X, tomemos un refinamiento $\mathcal{V} = \{V_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$ localmente finito de $\mathcal{U}$, entonces, $\mathcal{V}_0 = \{V_\beta \cap F | \beta \in \mathcal{B}\}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{V}$. ■

Teorema 4.38 *Todo espacio paracompacto, T_1 y 2°-numerable es metrizable.*

Demostración. Tenemos que todo espacio paracompacto es regular, entonces, por el teorema de metrización de Urysohn, siendo además T_1 y 2°-numerable, es metrizable. ■

4.8. Particiones de la Unidad

Una de las características más importante de un espacio paracompacto es que admite la existencia de particiones de la unidad. Las particiones de la unidad a su vez adquieren importancia, dado que permiten, a partir de funciones continuas definidas localmente sobre un espacio dado, construir una función con dominio en todo el espacio, coincidiendo localmente con las funciones dadas, conservando además propiedades como la continuidad, ó la diferenciabilidad.

Lema 4.39 *Si X es paracompacto y Hausdorff, toda cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ admite un refinamiento abierto y localmente finito $\mathcal{V} = \{V_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$ tal que para todo $\beta \in \mathcal{B}$ existe $\alpha \in \mathcal{A}$ que satisface $\overline{V_\beta} \subseteq U_\alpha$.*

Demostración. Sea $\mathcal{W} = \{W_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$ un refinamiento abierto y localmente finito de $\mathcal{U}$. Definamos

$$F_{\beta_0} = \left(\bigcup_{\beta \in \mathcal{B} - \{\beta_0\}} W_\beta \right)^c$$

para cada $\beta_0 \in \mathcal{B}$. Claramente F_β es cerrado y $F_\beta \subseteq W_\beta$. Por normalidad existe entonces un abierto V_β tal que existe α con la propiedad de que

$$F_\beta \subseteq V_\beta \subseteq \overline{V_\beta} \subseteq W_\beta \subseteq V_\alpha.$$

La colección $\mathcal{V} = \{V_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$ es claramente una cubierta de X y es localmente finita. ■

Denotemos como usualmente $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Una *partición de la unidad* definida sobre un espacio X es una colección de funciones continuas

$$\rho_\alpha : X \longrightarrow I$$

para $\alpha \in \mathcal{A}$, siendo $\mathcal{A}$ un conjunto de índices, de tal manera que se satisface que para todo $x \in X$:

1. $\rho_\alpha(x) = 0$ para "casi todo"[19] $\alpha \in \mathcal{A}$.
2. $\sum \rho_\alpha(x) = 1$.

Si dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X ocurre que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$\text{supp } (\rho_\alpha) \subseteq U$$

se dice que la partición de la unidad $\{\rho_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ está *subordinada a la cubierta* $\mathcal{U}$.

Ejemplo 4.31 *Definamos* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mediante*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Esta función es claramente continua, dado que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. *Por otra parte, la función* $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida como* $g_n(x) = f(x-n+1)f(-x+n+1)$ *es continua y tiene su soporte en* $U_n = (n-1, n+1)$. *La función* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$G(x) = \sum_{n\in\omega} g_n(x)$$

es una suma finita en cada punto, es continua, definida positiva y no nula, de manera que, $\{\rho_n | n \in \mathbb{Z}\}$ *donde*

$$\rho_n(x) = \frac{g_n(x)}{G(x)}$$

es una partición de la unidad sobre $\mathbb{R}$ *subordinada a la cubierta* $\{U_n | n \in \mathbb{Z}\}$.
$\square$

Teorema 4.40 *Si* X *es un espacio paracompacto, Hausdorff, y*

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$$

es una cubierta abierta de X*, existe una partición de la unidad subordinada a la cubierta* $\mathcal{U}$.

[19] Todos excepto una cantidad finita.

Demostración. Sin perder generalidad, podemos suponer que la cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es localmente finita. Sean $\mathcal{W} = \{W_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta abierta tal que $\overline{W_\alpha} \subseteq U\alpha$ y $\mathcal{V} = \{V_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta abierta tal que $\overline{V_\alpha} \subseteq W\alpha$. Tenemos entonces

$$V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq W\alpha \subseteq \overline{W_\alpha} \subseteq U\alpha$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, de manera que $\overline{V_\alpha}$ y W_α^c son cerrados ajenos en el espacio normal X. Sea $\phi_\alpha : X \to [0, 1]$ una función de Urysohn que es 1 en $\overline{V_\alpha}$ y 0 en W_α^c, entonces

$$\text{supp } (\phi_\alpha) \subseteq \overline{W_\alpha} \subseteq U\alpha,$$

y además

$$\Phi(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \phi_\alpha(x)$$

es una suma finita y positiva, porque $\mathcal{U}$ es una cubierta y es localmente finita. Basta entonces definir

$$\rho_\alpha(x) = \frac{\phi_\alpha(x)}{\Phi(x)}$$

para obtener la partición de la unidad cuya existencia ha sido propuesta. ■

Una *variedad* es un espacio topológico de localmente euclidiano, 2°-numerable y paracompacto. Las particiones de la unidad son la clave para la introducción del cálculo en la categoría de las variedades diferenciables. La integral, por ejemplo, se define con facilidad sobre vecindades coordenadas, ya que son homeomorfas con abiertos euclidianos. La integral se define entonces localmente. La integral se construye globalmente usando las particiones de la unidad. El cálculo en variedades, es entonces posible, gracias a las particiones de la unidad.

4.9. Ejercicios

1. Sea X un espacio topológico, y defínase $x \sim y$ si y sólo si $\{x, y\}$ no es distinguible. Demuestre que $X/\sim$ es T_0.

2. Demuestre que el conjunto ternario de Cantor es compacto.
3. Demuestre que dado un espacio con un único punto $\{*\}$, el espacio compacto abierto $X^{\{*\}}$ es homeomorfo con X.
4. Demuestre que dados dos espacio topológicos (X, τ_1) y (X, τ_2), para los cuales $\tau_1 \subseteq \tau_2$, demuestre que si (X, τ_2) es compacto, entonces (X, τ_1) es compacto.
5. Demuestre que toda unión finita de espacios compactos es un espacio compacto.
6. Demuestre que la imagen continua y abierta de un conjunto localmente compacto es localmente compacto, si el codominio es T_2.
7. Demuestre que en un espacio compacto X, toda sucesión (A_n) de conjuntos cerrados anidados no vacíos, es decir, tales que $A_{n+1} \subseteq A_n$, entonces $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$. Demuestre adicionalmente que si d es un amétrica sobre X y $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces la intersección tiene exactamente un punto.
8. Proporcione un ejemplo de una sucesión de conjuntos anidados con intersección vacía.
9. Proporcione un ejemplo de una sucesión de conjuntos anidados tales que $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que tiene intersección vacía.
10. Demuestre la imagen continua de un espacio secuencialmente compacto es secuencialmente compacto.
11. Sea (X, d) un espacio métrico secuencialmente compacto. Sea $f : X \to X$ una aplicación contractiva, es decir, tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.
    a) Demuestre que la aplicación $g : X \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, f(x))$ es continua.
    b) Demuestre que f admite un único punto fijo.

12. Sean (X, d) un espacio m´etrico. Defínase el espacio métrico (X, δ) dada por $\delta(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}$. Demuestre que todo compacto en (X, δ) es compacto en (X, d).

13. Demuestre que, con la topología euclidiana, el conjunto
$$A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$
es un subespacio compacto de la recta.

14. Deuestre que $(0, 1)$ no es compacto en la recta euclidiana.

15. Determine si $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ es compacto en la recta euclidiana.

16. Considere $X = [0, 1) \cup [2, 3]$ como subespacio de $\mathbb{R}_E$. Demuestre que $A = [0, 1)$, como subespacio de X, es cerrado, acotado y no es compacto.

17. Demuestre o proporcione un contraejemplo:

    a) La unión numerable de compactos es compacto.
    b) La compacidad es hereditaria a subespacios.
    c) La preimagen, bajo una aplicación continua, de un compacto es compacta.
    d) Todo espacio topológico compacto tiene a lo sumo una cantidad finita de puntos aislados.
    e) Todo espacio cociente X/A de un espacio compacto X es compacto.

18. Considere $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ con la topología telescópica, es decir, la generada por los intevalos de la forma (x, ∞).

    a) Suponga que $0 \leq a < b$. Demuestre que $[a, b)$ es compacto, y determine si $(a, b]$ es o no compacto.
    b) Demuestre que A es compacto si y sólo si $\text{ínf}(A) \in A$.

   c) Encuentre dos compactos con interesección no compacta.

19. Demuestre que la intersección de compactos es compacta en un espacio topológico de Hausdorff.

20. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ compacto y no vacío.

   a) Demuestre que para cada $x \in X$ existe $a_x \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a_x)$.
   b) Demuestre que existen $a, b \in A$ tales que $\text{diám}(A) = d(a, b)$.

21. Considere la proyección exponencial $\exp : \mathbb{R}_S \to S^1$, donde $\mathbb{R}_S$ es la recta de Sorgenfrey, y describa los abiertos de la topología final sobre S^1, inducida por la exponencial.

22. Considere S^1 con la topología cofinita, y describa los abiertos de la recta con la topología inicial inducida por la exponencial.

23. Demuestre que $(0, 1]$ no es compacto en la recta de Sorgenfrey.

24. Demuestre que un espacio topológico (X, τ) es compacto si, y sólo si, para toda colección de cerrados $\mathcal{F} = \{F_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ tal que

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = \varnothing,$$

existe una subcolección finita $\{F_1, \ldots, F_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que

$$F_1 \cap \ldots \cap F_n = \varnothing.$$

25. Determine las compactificaciones de Alexandroff de los intervalos euclidianos $(0, 1)$, $[0, 1)$ y$[0, 1]$.

26. Demuestre que si Y es T_0, entonces Y^X es T_0 con la topología compacto-abierta, para todo espacio X.

27. Demuestre que si Y es T_1, entonces Y^X es T_1 con la topología compacto-abierta, para todo espacio X.

28. Demuestre que si Y es T_2, entonces Y^X es T_2 con la topología compacto-abierta, para todo espacio X.

29. Sean X, Y espacios topológicos, donde X es compacto y Hausdorff, demuestre que la evaluación

$$e : C(X,Y) \times X \longrightarrow Y,$$

dada por $e(f,x) = f(x)$ es continua. Una posibilidad es ver a la evaluación como un caso particular de composición.

Capítulo 5

Conexidad

La conexidad es una propiedad topológica de fundamental importancia en el desarrollo de las diversas ramas de esta disciplina. Los espacio topológicos admiten muy diversas formas de conexidad, la gran mayoría de las cuales son materia de estudio de la Topología Algebraica. Como veremos, la conexidad se conserva bajo continuidad y en productos. En este capítulo estudiaremos la conexidad como propiedad general, además de la 0-conexidad, esbozando además la n-conexidad.

La conexidad, en sus diversas variantes, es una característica de los espacios topológicos que tiene profundo significado, puesto que se preserva bajo aplicaciones continuas. La conexidad es pues, al igual que la compacidad, una de las propiedades llamadas topológicas que son además absolutas, pues son independientes de si el espacio se ve por sí mismo, o si se le ve como subespacio de un espacio más grande.

5.1. Espacios conexos

Si A y B son dos abiertos ajenos no vacíos del espacio topológico X tales que $A \cup B = X$, se dice que el par (A, B) es una *separación* de X. Un espacio X se dice *conexo* si no admite una separación, es decir, si no es unión de dos abiertos ajenos no vacíos. Una separación es entonces, una

2-partición por abiertos.

Caracterizaremos a continuación la conexidad. Una *separación por cerrados* de un espacio X es un par (A, B) tal que A y B son dos cerrados ajenos no vacíos de X tales que $A \cup B = X$. Llamaremos simplemente separación a una separación por abiertos.

Proposición 5.1 *Las proposiciones siguientes son equivalentes:*

1. *X no es conexo.*
2. *X admite una separación por cerrados.*
3. *X tiene un subespacio no trivial que es abierto y cerrado.*

Demostración. Si (A, B) es una separación, entonces $A = B^c$ y $B = A^c$, de manera que (A, B) es una separación por cerrados. Si (A, B) es una separación por cerrados, como $A = B^c$, entonces A es abierto y cerrado. Finalmente, si A es abierto y cerrado, entonces A^c es abierto y cerrado, por lo que (A, A^c) es una separación. ∎

Lo primero que debe presentarse con posterioridad a una definición es la muestra de que tal definición tiene objetos a los cuales puede aplicarse.

Ejemplo 5.1 *El espacio se Sierpiński es conexo.* □

Ejemplo 5.2 *Todo espacio indiscreto es conexo.* □

Ejemplo 5.3 *La recta cofinita es conexa, dado que la unión de dos cerrados ajenos y no vacíos cualesquiera es finita.* □

Ejemplo 5.4 *Un espacio discreto con más de un punto no es conexo.* □

Sea (X, Y) un *par topológico*, es decir, X es un espacio topológico y Y es un subespacio de X. Una *separación* de Y es un par (A, B) de subespacios de X tales que:

1. A y B son abiertos en X.

2. $A \cap Y \neq \varnothing$ y $B \cap Y \neq \varnothing$.

3. $(A \cap B) \cap Y = \varnothing$

4. $Y \subseteq A \cup B$.

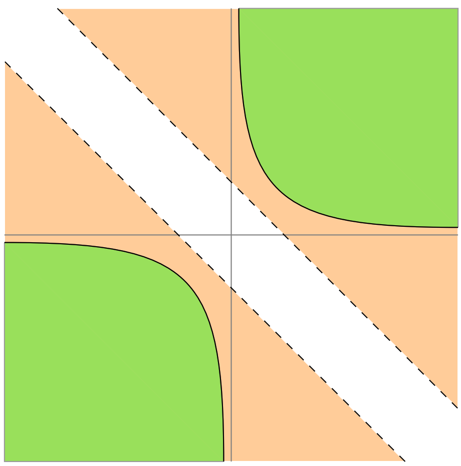
Un subespacio Y de X es *conexo*, si no admite una separación por abiertos de X.

Proposición 5.2 *Un subespacio es conexo si y sólo si es conexo como subespacio.*

Demostración. Basta notar que si (A, B) es una separación de Y por abiertos de X, entonces $(A \cap Y, B \cap Y)$ es una separación de Y por abiertos de Y. ■

La conexidad es entonces una *propiedad absoluta.*

Ejemplo 5.5 *El subespacio de* $\mathbb{R}^2$ *definido como* $X = \{(x, y)|xy \geq 1\}$ *no es conexo, dado que los conjuntos* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x + y \geq 1\}$ *y* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x + y \leq -1\}$ *son tales que* $(A \cap X, B \cap X)$ *es una separación de* X.



Lema 5.3 *Si (A, B) es una separación de X y $C \subseteq X$ es conexo, entonces $C \subseteq A$ ó $C \subseteq B$.*

Demostración. Si suponemos que $A \cap C \neq \varnothing$ y $B \cap C \neq \varnothing$, entonces claramente $(A \cap C, B \cap C)$ es una separación de C. ■

Proposición 5.4 *Si $\mathcal{X} = \{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una colección de espacios conexos tales que $X_\alpha \cap X_\beta \neq \varnothing$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, entonces $X = \cup\mathcal{X}$ es un espacio conexo.*

Demostración. Supóngase que (A, B) es una separación de X, y consideremos los conjuntos de índices $\mathcal{A}_A = \{\alpha \in \mathcal{A} | X_\alpha \subseteq A\}$ y $\mathcal{A}_B = \{\alpha \in \mathcal{A} | X_\alpha \subseteq B\}$, entonces, en virtud del lema anterior $\mathcal{A}_A \cup \mathcal{A}_B = \mathcal{A}$, además de que ninguno de ellos es vacío. Si $\alpha \in \mathcal{A}_A$ y $\beta \in \mathcal{A}_B$, entonces $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$, lo que contradice la hipótesis inicial. ■

Corolario 5.5 *Sea $\mathcal{X} = \{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de espacios conexos tales que $\cap\mathcal{X} \neq \varnothing$, entonces $X = \cup\mathcal{X}$ es un espacio conexo.* □

Corolario 5.6 *Sea $\mathcal{X} = \{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de espacios conexos que tienen un punto en común, entonces $X = \cup\mathcal{X}$ es un espacio conexo.* □

Corolario 5.7 *Si X, Y son conexos y $X \cap Y \neq \varnothing$, entonces $X \cup Y$ es conexo.* □

Corolario 5.8 *Si C es conexo no vacío, y para algún conjunto $A \neq \varnothing$ se tiene que $C \cap A \neq \varnothing$ y $C \cap A^c \neq \varnothing$, entonces $C \cap \partial A \neq \varnothing$.*

Demostración. Si $C \cap \partial A = \varnothing$, entonces $\left(C \cap A^\circ, C \cap \overline{A}^c\right)$ es una separación de C. ■

Nótese que el resultado anterior implica, en particular, que si un conexo C intersecta tanto al interior como al exterior de A, entonces A tiene frontera no vacía.

Ejemplo 5.6 *El conjunto* $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *dotado de la topología*

$$\tau = \{X, \varnothing, \{0\}, \{2, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

no es conexo, puesto que $(\{0\}, \{1, 2, 3, 4\})$ *es una separación de* X. $\square$

Iniciamos ahora la recuperación de las propiedades topológicas de conexidad de los subsespacios euclidianos, en un contexto más general. La primera de ellas, el hecho de que la imagen continua de un conexo es conexa.

Teorema 5.9 *Sea* X *conexo. Si* $f : X \to Y$ *es continua y suprayectiva, entonces* Y *es conexo.*

Demostración. Si (A, B) es una sepatación de Y, entonces, por continuidad $\left(f^{-1}(A), f^{-1}(B)\right)$ es una separación de X. $\blacksquare$

Proposición 5.10 *Si* C *es conexo y* $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$*, entonces* D *es conexo.*

Demostración. Sea (A, B) una separación de D, supongamos que $C \subseteq A$ usando la conexidad de C. Si $x \in B \cap D$, entonces $x \in \overline{C}$ y $B \in \mathcal{N}(x)$, de manera que $\varnothing \neq C \cap B \subseteq A \cap B$, contradiciendo la hipótesis inicial. $\blacksquare$

Los intervalos representan, intuitivamente, el arquetipo de la conexidad, hecho que ahora verificamos.

Lema 5.11 *El intervalo* $I = [0, 1]$ *es conexo.*

Demostración. Consideremos el intervalo cerrado $I = [0, 1]$ y supongamos que (A, B) es una separación de I tal que $0 \in A$. Dado que B es abierto, entonces $\text{ínf}(B) \notin B$ y como es cerrado, entonces $\text{ínf}(B) \in B$ de donde $B = \varnothing$ y $A = I$. $\blacksquare$

Proposición 5.12 *Los intervalos cerrados de la recta euclidiana son conexos.*

Demostración. Basta observar que todo intervalo cerrado es homeomorfo con I. ■

Proposición 5.13 *La recta euclidiana es conexa.*

Demostración. Si (A, B) es una separación de $\mathbb{R}$, supongamos que $a \in A$, $b \in B$ y $a < b$. Como $[a, b]$ es conexo, entonces $[a, b] \subseteq A$ ó $[a, b] \subseteq B$, contradiciendo nuestra hipótesis inicial. ■

En realidad hemos recuperado con el resultado anterior el hecho de que los únicos subconjuntos de la recta que son tanto abiertos como cerrados son $\varnothing$ y el propio $\mathbb{R}$, hecho que es tan conocido como oscuro.

Corolario 5.14 *Todo intervalo abierto de la recta euclidiana es conexo.*

Demostración. Todo intervalo abierto es homeomorfo con la recta. ■

Lema 5.15 *Los intervalos de la recta euclidiana son conexos.*

Demostración. Basta notar que $(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$, que $(a, b) \subset [a, b) \subset [a, b]$, y que $\overline{(a, b)} = [a, b]$. ■

Proposición 5.16 *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es conexo entonces es un intervalo.*

Demostración. Basta demostrar que si $a, b \in A$ y $a < b$, entonces $[a, b] \subseteq A$. Supongamos lo contrario y sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$ y $a \in A$, entonces los conjuntos $(-\infty, x) \cap A$ y $(x, \infty) \cap A$ constituyen una separación de A. ■

Los resultados anteriores nos conducen a la conclusión de que, en la recta real con la topología euclidiana, los únicos conjuntos conexos son los intervalos.

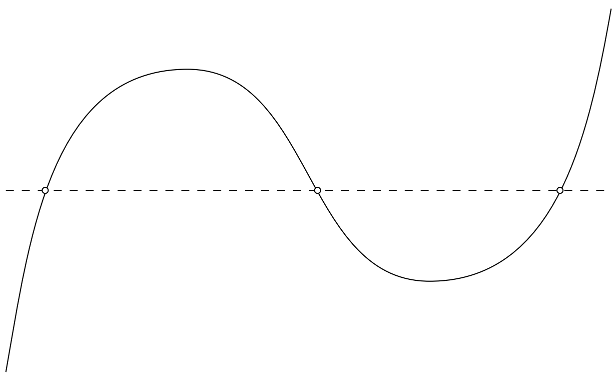
Corolario 5.17 *Un subespacio de la resta euclidiana es conexo si y sólo si es un intervalo.* ■

Como consecuencia adicional, dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la imagen bajo f de todo intervalo es también un intervalo.

Corolario 5.18 *Sean X conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < f(b)$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ con $f(a) \leq t \leq f(b)$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = t$.* ■

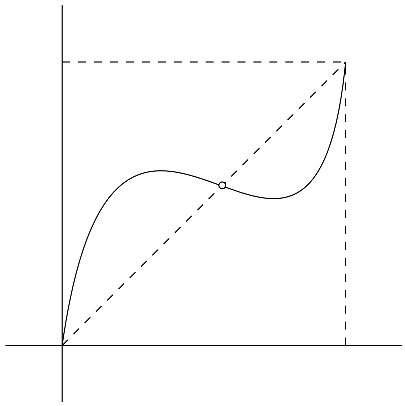
Un resultado clásico en Cálculo es el siguiente, que se muestra ahora con su verdadera naturaleza topológica, al igual que una bella consecuencia de él: el teorema de punto fijo de Brouwer[1].

Corolario 5.19 (Teorema del valor intermedio) *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 0$.* ■



Ejemplo 5.7 *Una aplicación interesante es el teorema de punto fijo, cuya versión más general se debe a Brouwer. Dado $I = [0, 1]$ consideremos una función continua $f : I \to I$. Si suponemos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in I$, entonces los conjuntos $A = \{x \in I | f(x) < x\}$ y $b = \{x \in I | f(x) > x\}$ constituyen una partición de I.* □

[1]Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 - 1966), matemático holandés.



5.2. Productos

En esta sección nos proponemos demostrar el resultado análogo al Teorema de Tychonoff para conexidad, resultado al que identificaremos como el *teorema de los productos conexos.*

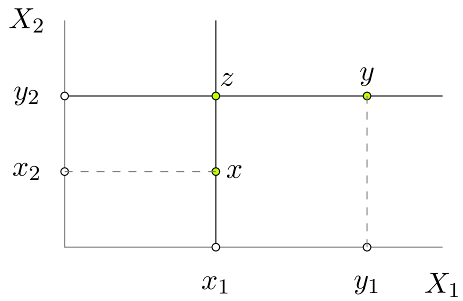
Proposición 5.20 *Si cada par de puntos de un espacio X están contenidos en un conjunto conexo, entonces X es conexo.*

Demostración. Si (A, B) es una separación de X, tomemos dos puntos $x \in A$, $y \in B$ y un conexo $C \subseteq X$ con $x, y \in C$, entonces $(A \cap C, B \cap C)$ es una separación de C. ■

Este resultado nos permitirá demostrar la conexidad un producto finito de conexos.

Lema 5.21 *El producto cartesiano de una familia finita de espacios topológicos es un espacio conexo si y sólo si cada factor es un espacio conexo.*

Demostración. Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios topológicos y X su producto. Si X es conexo, entonces cada factor es conexo por la continuidad de las proyecciones. Demostraremos ahora que si cada factor es conexo, entonces el producto es conexo, iniciando con el producto de dos espacios. Sean X_1, X_2 espacios topológicos conexos, y consideremos dos puntos $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X = X_1 \times X_2$. Basta demostrar que existe un conexo $C \subseteq X$ tal que $x, y \in C$. Si $x_1 = y_1$, entonces basta hacer $C = \{(x_1, z)|z \in X_2\}$, que es conexo porque es homeomorfo con X_2. Si $x_2 = y_2$, entonces basta hacer $C = \{(z, x_2)|z \in X_1\}$, que es conexo porque es homeomorfo con X_1.



Si los puntos tienen ambas coordenadas distintas, tomemos $z = (x_1, y_2)$, entonces, haciendo

$$C = \{(x_1, z)|z \in X_2\} \cup \{(z, y_2)|z \in X_1\}$$

obtenemos el subespacio conexo deseado, puesto que es la unión de dos conexos con un punto común. Por el primer resultado de la sección $X_1 \times X_2$ es conexo. El resultado se cumple para un producto finito arbitrario por inducción sobre el número de factores. ■

Consideremos ahora un producto arbitrario de espacios topológicos conexos. Sean $\mathcal{X} = \{X_\alpha|\alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de espacios topológicos y X su producto. Dados dos puntos $x, y \in X$ definimos $\mathcal{A}_{x,y} = \{\alpha \in \mathcal{A}|p_\alpha(x) \neq p_\alpha(y)\}$. Decimos que x, y son *casi iguales*, si $\mathcal{A}_{x,y}$ es finito, lo que denotamos mediante $x \approx y$. Dos puntos entonces son casi iguales si difieren en una cantidad finita de coordenadas, de manera que todos los puntos de un producto finito son casi iguales. Notemos por otra parte que:

1. $\mathcal{A}_{x,y} = \mathcal{A}_{y,x}$
2. si $x = y$, entonces $x \approx y$
3. $\mathcal{A}_{x,x} = \varnothing$

Para $a \in X$ arbitrario pero fijo, consideremos el subespacio

$$X_a = \{x \in X | x \approx a\},$$

para demostrar que X es conexo, es suficiente demostrar que X_a es conexo y denso en X.

Demostraremos primero que X_a es denso en X. Sea $U \subseteq X$ un abierto básico para la topología producto sobre X, entonces U tiene la forma

$$U = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}),$$

donde $U_{\alpha_k} \subseteq X_{\alpha_k}$ es abierto y no vacío para $k = 1, \ldots, n$. Elijamos ahora $x_{\alpha_k} \in U_{\alpha_k}$ para $k = 1, \ldots, n$, y definamos el punto $x \in X$ tal que:

1. $p_{\alpha_k}(x) = x_{\alpha_k}$ para $k = 1, \ldots, n$, y
2. $p_\alpha(x) = a_\alpha$ para $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Por construcción es entonces claro que $x \in U$ y $x \approx a$, por lo que $x \in X_a$. Queda con ello demostrada la densidad.

Para demostrar la conexidad, sea $x, y \in X_a$ dos puntos arbitrarios, y supongamos que $\mathcal{A}_{x,a} \cup \mathcal{A}_{y,a} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, entonces, por el resultado anterior

$$Y = X_{\alpha_1} \times \ldots \times X_{\alpha_n}$$

es conexo. El espacio Z de los puntos $z \in X_a$ tales que:

1. $p_{\alpha_k}(z) \in X_{\alpha_k}$ para $k = 1, \ldots, n$, y
2. $p_\alpha(z) = a_\alpha$ para $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$,

es homeomorfo con Y y es tal que $x, y, a \in Z$. Entonces dos puntos cualesquiera de X_a están contenidos en un conexo contenido en X_a, de donde se sigue la conexidad de X_a.

Teorema 5.22 (de los productos conexos) *El producto cartesiano de una familia de espacios topológicos es un espacio conexo si y sólo si cada factor es un espacio conexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{X} = \{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de espacios topológicos, y denotemos por X el producto cartesiano de la colección $\mathcal{X}$. Si X es conexo, la continuidad de las proyecciones $p_\alpha : X \to X_\alpha$ garantiza la conexidad de cada uno de los factores. Supongamos ahora recíprocamente que X_α es un espacio conexo para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, para demostrar que X es conexo, basta observar que, con la notación de la discusión previa, X_a es conexo y $\overline{X_a} = X$ para todo $a \in X$. ■

Al igual que en el caso de la compacidad, la conexidad de un producto descansa sobre el axioma de elección, y es también equivalente con él, como demostraremos luego de enunciar los siguientes resultados inmediatos, que constituyen además, ejemplos valiosos.

Corolario 5.23 *La esfera $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ es conexa para $k \geq 1$.*

Demostración. Observemos primero que el círculo S^1 es un espacio conexo, dado que $D^1_+ = \{(x, y) \in S^1 | y \geq 0\}$ y $D^1_- = \{(x, y) \in S^1 | y \leq 0\}$, siendo homeomorfos con $[-1, 1]$ son conexos, y además $S^1 = D^1_+ \cup D^1_-$. Claramente el k-disco $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leq 1\}$ homeomorfo con el producto I^k y en consecuencia, es conexo. El k-disco D^k esa además homeomorfo con $D^k_+ = \{(x, y) \in S^{k+1} | x_{k+1} \geq 0\}$ y con $D^k_- = \{(x, y) \in S^{k+1} | x_{k+1} \leq 0\}$, por lo que ambos espacios son conexos. Procediendo por inducción sobre la dimensión mediante el uso del hecho de que $D^k_+ \cap D^k_- = S^k$, y que $D^k_+ \cup D^k_- = S^{k+1}$ se obtiene la conexidad propuesta. ■

La esfera S^k es también compacta, dado que es un subespacio cerrado de D^{k+1}, para todo $k \geq 0$.

Corolario 5.24 *Los espacios proyectivos $\mathbb{R}P^n$ y $\mathbb{C}P^n$ son conexos para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Basta observar que las proyecciones obvias $q : S^n \to \mathbb{R}P^n$ y $q : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ son aplicaciones continuas. ■

El lector no tendrá dificultad en verificar que espacios conocidos como la banda de Möbius, el 2-Toro , y la Botella de Klein son conexos y compactos. Pasamos ahora a la demostración anunciada.

Teorema 5.25 *El teorema de los productos conexos es equivalente con el axioma de elección.*

Demostración. El teorema de los productos conexos es, claramente, consecuencia del axioma de elección. Para demostrar el recíproco, coonsideremos una colección $\mathcal{Y} = \{Y_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección no vacía de conjuntos no vacíos, y sea

$$y \notin \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha,$$

punto cuya existencia quedó aclarada en la demostración del teorema de Tychonoff. Supondremos que $\mathcal{A}$ es una colección infinita, dado que en el caso finito el resultado es obvio.

Denotemos $X_\alpha = Y_\alpha \cup \{y\}$, y dótese a este conjunto de la topología $\tau_\alpha = \{X_\alpha, Y_\alpha, \{y\}, \varnothing\}$, respecto de la cual claramente no es conexo, y por hipótesis, entonces el producto

$$X = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$$

tampoco es conexo. Denotemos $\mathcal{D}_x = \{\alpha \in \mathcal{A} | p_\alpha(x) = y\}$, y observemos que si

$$Y = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha^{-1}(Y_\alpha),$$

donde $p_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección, entonces

$$Y = \{x \in X | \mathcal{D}_x = \varnothing\}.$$

Supongamos que $Y = \varnothing$, demostraremos que $Y^c = X - Y$ es conexo, con lo que quedará establecido que $Y^c \neq X$. Sea $\tilde{y} \in X$ tal que $p_\alpha(\tilde{y}) = y$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.

Si (A, B) es una separación de $Y^c = \{x \in X | \mathcal{D}_x \neq \varnothing\}$, puede suponerse sin pérdida de generalidad que $\tilde{y} \in A$, y sea V un básico de X tal que $\tilde{y} \in V \subseteq A$; tal básico existe porque $A \in \mathcal{N}(\tilde{y})$ en X. Dada la estructura de la topología producto, V tiene la forma

$$V = p_{\alpha_1}^{-1}(y) \cap \ldots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(y) \cap p_{\beta_1}^{-1}(Y_{\beta_1}) \cap \ldots \cap p_{\beta_m}^{-1}(Y_{\beta_m}),$$

para $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathcal{A}$, de manera que V contiene al menos un punto $x \in X$ tal que $p_\alpha(x) \neq y$ para algún $\alpha \in \mathcal{A}$. Sean $x \in B$ y U un básico tal que $x \in U \subseteq B$, tal básico existe porque $B \in \mathcal{N}(x)$ en X. Análogamente observamos que U tiene la forma

$$U = p_{\alpha_{k+1}}^{-1}(y) \cap \ldots \cap p_{\alpha_{k+i}}^{-1}(y) \cap p_{\beta_{m+1}}^{-1}(Y_{\beta_{m+1}}) \cap \ldots \cap p_{\beta_{m+j}}^{-1}(Y_{\beta_{m+j}}),$$

para $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+i}, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_{m+j} \in \mathcal{A}$. Pero claramente $U \cap V \neq \varnothing$, puesto que, sin recurrir al axioma de elección, por tratarse de una colección finita, podemos encontrar un punto $z \in X$ tal que $p_{\beta_t}(z) \in Y_{\beta_t}$ para $1 \leq t \leq m+j$ y $p_\alpha(z) = y$ en cualquier otro caso. Con ello se contradice la hipótesis de que (A, B) sea una separación para Y^c, y por consiguiente $Y \neq \varnothing$. ■

Corolario 5.26 *El teorema de los productos conexos es equivalente con el teorema de Tychonoff.*

Demostración. Ambos son equivalentes con el axioma de elección. ■

5.3. Componentes

Un espacio que no es conexo, contiene de cualquier manera, subespacios conexos bien definidos que lo constituyen, que son, justamente sus componentes conexas.

Sean X un espacio topológico y $x \in X$ un punto arbitrario, y sea $\mathcal{C}_x$, la colección de todos los subespacios conexos de X que contienen a x. El conjunto

$$C(x) = \bigcup \mathcal{C}_x$$

es conexo, dado que es la unión de una colección de conexos que comparten un punto, y es, por construcción, el máximo conexo que contiene a x. Se dice que $C(x)$ es la *componente conexa* de x.

Ejemplo 5.8 *Si X es conexo, $C(x) = X$ para todo $x \in X$.* □

Estableciendo $x \sim y$ si $y \in C(x)$, se obtiene una relación de equivalencia, cuyas clases de equivalencia, son justamente las componentes conexas. Los detalles se proponen como ejercicio para el lector.

Un espacio topológico es *totalmente disconexo*, si sus componentes son puntos, es decir, si $C(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$.

Ejemplo 5.9 *Un espacio discreto es totalmente disconexo.* □

Proposición 5.27 *Las componentes conexas son subespacios cerrados.*

Demostración. Dado que $\overline{C(x)}$ es conexo, entonces $\overline{C(x)} \subseteq C(x)$. ■

Si un espacio tiene una cantidad finita de componentes conexas, las componentes son también subespacios abiertos, no obstante, en el caso de una cantidad infinita de componentes, no es necesariamente el caso.

Ejemplo 5.10 *El conjunto de los racionales es totalmente disconexo en la recta euclidiana, sus componentes son puntos, que son cerrados, pero no son abiertos.* □

Ejemplo 5.11 *La recta de Sorgenfrey no es conexa, y es además, totalmente disconexa.* □

5.4. Espacios trayectoconexos

El hecho de que un subespacio de la recta sea conexo si y sólo si es un intervalo, hace de los intervalos un el arquetipo geométrico de la conexidad. Un intervalo cerrado en particular es conexo y puede decirse que "conecta" sus extremos o que es un "camino" entre ellos.

Una *trayectoria* en el espacio topológico X es una aplicación continua $\alpha : I \to X$ donde $I = [0,1]$. Los puntos $x_0 = \alpha(0)$ y $x_1 = \alpha(1)$ se dice que son los *extremos* de la trayectoria α. Con el concepto de trayectoria aparece también la noción de orientación[2], que se "hereda" de la orientación natural de la recta euclidiana. En este sentido, es conveniente distinguir entre los "extremos" de una trayectoria[3], por ello diremos que $\alpha(0)$ es el *origen* de la trayectoria α, y que $\alpha(1)$ es su *extremo*.

Un espacio se dice que es *trayectoconexo* ó conexo por trayectorias si para dos puntos cualesquiera $x_0, x_1 \in X$ existe una trayectoria $\alpha : I \to X$ tal que $x_0 = \alpha(0)$ y $x_1 = \alpha(1)$. Dos puntos que son extremos de una trayectoria se dice que son *homótopos*[4], y notamos con facilidad que la homotopía es una relación de equivalencia sobre el espacio X. La *clase de homotopía* de un punto X de denota por $[x]$ y se conoce como la *componente trayecto-conexa* de $x \in X$.

Proposición 5.28 *Todo espacio trayectoconexo es conexo.*

Demostración. Ejercicio. ■

Ejemplo 5.12 *La recta de Sorgenfrey no es trayectoconexa, dado que no es conexa.* □

Introduciremos ahora una operación binaria en el espacio $C\left(X^I\right)$ de las trayectorias[5] sobre X. Consideremos dos trayectorias α y β en un espacio

[2] La noción de *dirección* es también un subproducto de esta definición, y será de gran importancia en el estudio de la convergencia.

[3] En términos de categorías, α es un *morfismo* con *dominio* $\alpha(0)$, y *codominio* $\alpha(1)$.

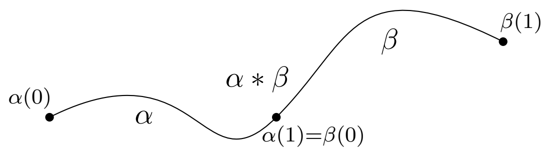
[4] Es frecuente que se les llama también *conectables*.

[5] Con el mismo significado que $C(X^I)$ se usan las notaciones $M(I,X)$ y $\mathcal{P}(X)$.

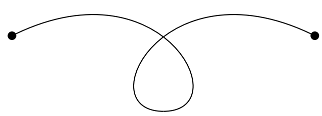
topológico X tales que $\alpha(1) = \beta(0)$. El producto $\alpha * \beta$ es una trayectoria dada por

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

donde observamos que la continuidad está garantizada por el lema de pegadura. El producto de trayectorias consiste básicamente en reparametrizar cada una de ellas y "continuar" la segunda en el punto en el que termina la primera. Llamaremos *concatenación* a este producto de trayectorias.



Un *arco* es una trayectoria que es un homeomorfismo sobre su imagen, y un espacio topológico se dice *arcoconexo* si admite un arco entre dos cualesquiera de sus puntos. La imagen que sigue representa una trayectoria que no es un arco.



No toda trayectoria es un arco, y no todo espacio trayectoconexo es arcoconexo

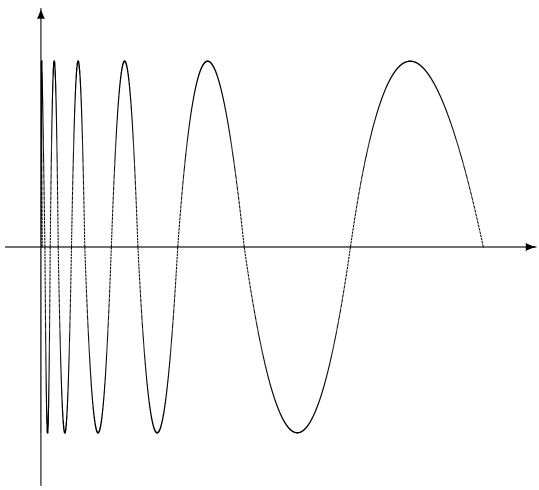
Ejemplo 5.13 *El espacio de Sierpinski X no es arcoconexo, puesto que no contiene ningún espacio homeomorfo con un intervalo. No obstante, es trayectoconexo, puesto que la aplicación $\alpha : I \to X$ dada por $\alpha(t) = 0$ para $t \in [0,1)$ y $\alpha(1) = 1$ es continua.* $\square$

Muchas de las propiedades de los espacios conexos se reflejan casi con exactitud en las propiedades de los espacios trayectoconexos.

Proposición 5.29 *La imagen continua de una espacio trayectonexo es trayectoconexa.*

Demostración. Ejercicio. ■

No todo espacio conexo es trayectoconexo, como se puede observar en los ejemplos siguientes. El ejemplo típico es el espacio conocido como *seno topológico.*



Ejemplo 5.14 (El seno topológico) *Consideremos el espacio*

$$X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(t, \mathrm{sen}\,(\pi/t))\,|x \in (0, 1]\}$$

como subespacio del plano euclidiano $\mathbb{R}^2$*. La aplicación dada por* $\alpha(t) = (t, \mathrm{sen}(\pi/t))$ *es claramente continua sobre* $(0, 1]$*, de manera que su gráfica* Y *es conexa, entonces* X *es conexo porque es la cerradura de* Y*. Sin embargo,*

X no es trayectoconexo, para demostrarlo, supóngase que $\gamma : I \to X$ es una trayectoria con $\gamma(0) = (1,0)$ y $\gamma(1) = (0,s)$, y consideremos la sucesión (t_n) sobre I tal que $\gamma(t_n) = \left(\frac{2}{2n+1}, \pm 1\right) \in X$. Sin perder generalidad puede suponerse que γ es un arco y que $p_1 \circ \gamma(t) = 0$ si y sólo si $t = 1$, de manera entonces que existe $p_1 \circ \gamma : I \to I$ y es un homeomorfismo. Por continuidad se sigue que la convergencia de la sucesión $\left(\frac{2}{2n+1}\right)$ implica la convergencia de (t_n) donde $p_1 \circ \gamma(t_n) = \frac{2}{2n+1}$. No obstante, (t_n) no es convergente porque

$$\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^n.$$

Se contradice así la continuidad de γ. $\square$

Recordemos que dos puntos $x, y \in X$ son *puntos homótopos* si son conectables por una trayectoria, lo que denotamos mediante $x \simeq y$. La homotopía de puntos es una relación de equivalencia, y llamaremos *componentes trayectocoenxas* a las clases de equivalencia correspondientes, mismas que alternativamente llamaremos también *clases de homotopía.* Denotaremos mediante $[x]$ la clase de homotopía del punto x, de manera que $y \in [x]$ si y sólo si $x \simeq y$.

El caso del seno topológico muestra también que, a diferencia de la conexidad, existen espacios trayectoconexos con ceradura no trayectoconexa, de modo que las componentes trayectoconexas no son necesariamente cerradas. Denotaremos mediante

$$\pi_0(X) = X/\simeq$$

el cociente del espacio topológico X, respecto de la relación de homotopía. Este es un invariante topológico de suprema importancia, y de hecho es, el primero de los invariantes homotópicos. Por las observaciones hechas en los párrafos previos, $\pi_0(X)$ es un espacio topológico no necesariamente discreto.

Un *par topológico* es un par de la forma (X, A) donde X es un espacio topológico y A es un subespacio de X. Para $x_0 \in X$, el par topológico

$(X, \{x_0\})$ se dice que es un *espacio punteado*, se denota simplemente como (X, x_0), y se dice que x_0 es el *punto base* de (X, x_0).

Un *aplicación de pares* topológicos $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una aplicación continua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Una *aplicación punteada* es una aplicación de pares entre espacios punteados. Para dos espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0), suele usarse la notación

$$[(X, x_0), (Y, y_0)] = \pi_0 \left((Y, y_0)^{(X, x_0)} \right).$$

Un *lazo* en X es una trayectoria $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$. Alternativamente, un lazo en X puede verse como una aplicación de pares $\alpha : (I, \{0, 1\}) \to (X, x_0)$, o como una palicación de espacios punteados $\alpha : (S^1, *) \to (X, x_0)$.

Sean X un espacio topológico y x_0 un punto arbitrario y fijo de X; denotemos además $* = 1 \in S^0$. Consideremos ahora el espacio de aplicaciones X^{S^0}, y el subespacio de las aplicaciones punteadas $(X, x_0)^{(S^0, *)}$.

Proposición 5.30 *Todo espacio topológico X es homeomorfo con*

$$(X, x_0)^{(S^0, *)},$$

para cualquier punto $x_0 \in X$.

Demostración. Ejercicio. ■

Corolario 5.31 *Los espacios cociente $\pi_0(X)$ y $[(S^0, *), (X, x_0)]$ son homeomorfos.* ■

Se obtiene como conclusión que $[(S^0, *), (X, x_0)]$ es topológicamente independiente del punto base x_0, por lo que bastará escribir $[S^0, X]$, siendo redundante la notación $\pi_0(X, x_0)$. Adoptaremos la notación $\Omega(X, x_0)$ para hacer referencia a $M((S^0, *), (X, x_0))$, reduciéndose a $\Omega(X)$ para el caso en el que X es un espacio trayectoconexo, y de la misma manera, denotaremos $\pi_1(X)$ bajo la hipótesis de trayectoconexidad.

Proposición 5.32 *Sea X un espacio topológico trayectoconexo. Si X es T_2, entonces $\Omega(X)$ es un espacio T_2, con la topología comnpacto-abierta.*

Demostración. Ya demostramos en el capítulo previo que X^Y es Hausdorff con la topología compecto-abierta, si y sólo si X es Hausdorff. Entonces, para X Hausdorff, se tiene que X^I es Hausdorff, y en consecuencia lo es $\Omega(X) \subseteq X^I$. ■

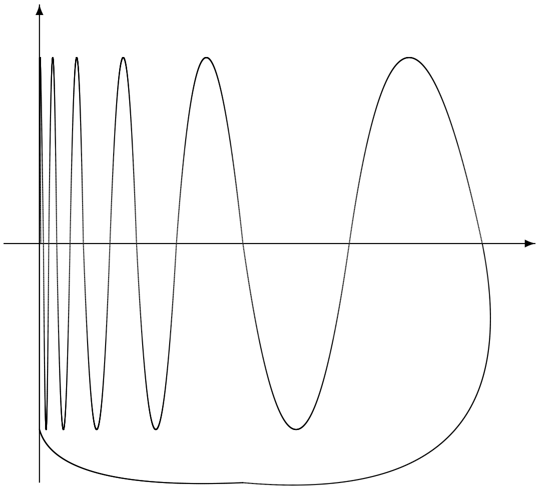
La posibilidad de considerar al espacios de lazos $\Omega(X)$ como un espacio topológico es harto trascendente, dado que es posible aplicarle el functor π_0, lo cual, hecho de forma recurrente nos conduce a los grupos de homotopía, tema del capítulo 8.

5.5. Conexidad local

Un espacio topológico X es *localmente conexo* si para cada $x \in X$ se tiene que toda vecindad de x contiene una vecindad abierta y conexa de x. Equivalentemente, un espacio es localmente conexo si su topología admite una base de conjuntos conexos.

Ejemplo 5.15 *El seno topológico es un ejemplo de espacio conexo que no es localmente conexo, pues los puntos de la forma $(0, s)$ no tienen vecindades conexas, de hecho, no admite vecindades trayectoconexas.* □

El *círculo de Varsovia* es una variante trayectoconexa del seno topológico, y es la unión del seno topológico con la imagen de un arco en $\mathbb{R}^2$ cuyos extremos sean $(0, -1)$ y $(1, 0)$, y de froma que el resto de sus puntos no pertenecen al seno topológico.



Ejemplo 5.16 *El círculo de Varsovia es un ejemplo de espacio trayectoconexo que no es localmente trayectoconexo, pues los puntos de la forma* $(0, s)$ *no tienen vecindades trayectoconexas.* $\square$

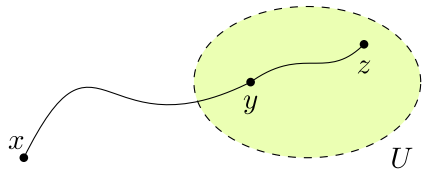
Un espacio topológico X es *localmente trayectoconexo* si para cada $x \in X$ se tiene que toda vecindad de x contiene una vecindad abierta y trayectoconexa de x. Equivalentemente, un espacio es localmente trayectoconexo si su topología admite una base de conjuntos trayectoconexos.

Como hemos visto antes, todo espacio trayectoconexo es conexo. El siguiente resultado nos proporciona una caracterización de los espacios conexos que son trayectoconexos.

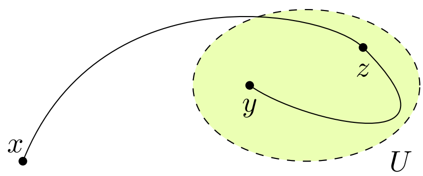
Proposición 5.33 *Todos espacio conexo y localmente trayectoconexo es trayectoconexo.*

Demostración. Sea X un espacio conexo y localmente trayectoconexo, demostraremos que la componente trayectoconexa $[x]$ de un punto arbitrario $x \in X$ es simultáneamente abierta y cerrada. Sean $y \in [x]$ y U una vecindad abierta y trayectoconexa de y. Para $z \in U$ elíjanse trayectorias α de x a y

y β de y a z, entonces $\alpha * \beta$ es una trayectoria de x a z, con lo que entonces $U \subseteq [x]$ y $[x]$ es abierto.



Supongamos ahora que $y \in \overline{[x]}$, y sean U una vecindad trayectoconexa de y, además de $z \in [x] \cap U$. Si α es una trayectoria de x a z, que existe porque $z \in [x]$, y β es una trayectoria de z a y, que existe porque U es trayectoconexa, entonces $\alpha * \beta$ es una trayectoria de x a y. Entonces $[x]$ es cerrado.



Tenemos así que $[x]$ es abierto y cerrado, por lo que, necesariamente $X = [x]$. ■

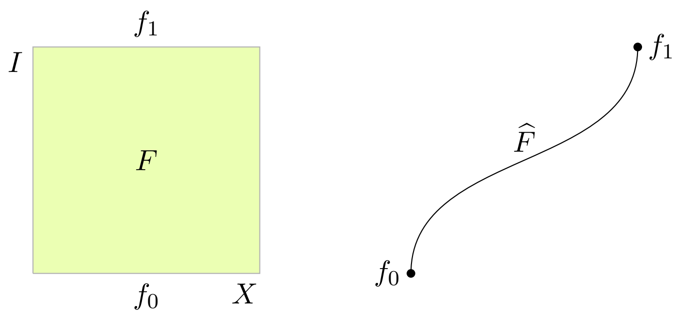
5.6. Homotopías

Dados dos espacios topológicos X, Y y dos aplicaciones continuas $f_0, f_1 : X \to Y$, decimos que tales aplicaciones son *homótopas* si existe una *homotopía* entre ellas, es decir, una aplicación continua $F : X \times I \to Y$ tal que $F(0, x) = f_0(x)$ y $F(1, x) = f_1(x)$. Si f_0 y f_1 son homótopas, denotamos $f_0 \simeq f_1$, y si, más específicamente, F es una homotopía entre f_0 y f_1, denotamos $F : f_0 \simeq f_1$.

Notemos que una homotopía $F : f_0 \simeq f_1$ se corresponde de manera única con una trayectoria $\widehat{F} : I \to M(X, Y)$ con extremos f_0 y f_1, dado que I es compacto, y en consecuencia, localmente compacto.

$$\widehat{F}(t)(x) = F(x,t)$$

Por otra parte, es claro también que toda trayectoria en $M(X,Y)$ se asocia de manera única con una homotopía entre dos aplicaciones de X en Y. Dos aplicaciones f_0 y f_1 son conectables en $M(X,Y)$ si y sólo si son homótopas.



De lo anterior se tiene que la homotopía de funciones es una relación de equivalencia y que las clases de equivalencia, llamadas *clases de homotopía* se corresponden biunívocamente con las componentes trayectoconexas de $M(X,Y)$.

Consideremos el caso particular de $M((I,\{0,1\}),(X,x_0))$, mismo que, por las observaciones de las secciones previas, podemos denotar por $\Omega(X,x_0)$ dado que se corresponde con $M((S^1,1),(X,x_0))$.

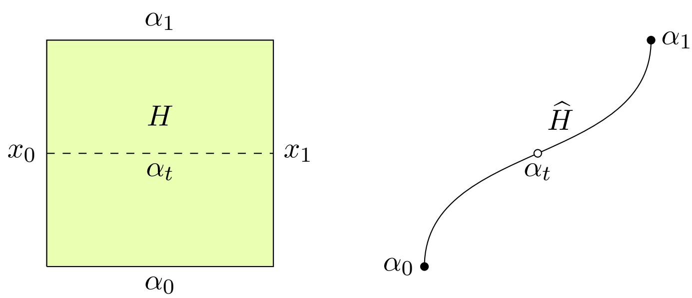
Nos interesa en particular la homotopía entre trayectorias. Denotaremos mediante $\mathcal{P}(X)$ el espacio de las trayectorias en X, como subespacio del espacio compacto-abierto X^I. El subespacio de las trayectorias $\alpha \in \mathcal{P}(X)$ con extremos $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$ será simbolizado mediante $\mathcal{P}(X,x_0,x_1)$, en tanto que para $\mathcal{P}(X,x_0,x_0)$ emplearemos la ya conocida expresión $\Omega(X,x_0)$.

Dos trayectorias $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathcal{P}(X,x_0,x_1)$ son homótopas, si existe una homotopía $H : I \times I \to X$ tal que:

1. $H(s,0) = \alpha_0(s)$ para todo $s \in I$,

2. $H(s, 1) = \alpha_1(s)$ para todo $s \in I$,
3. $H(0, t) = x_0$, y
4. $H(1, t) = x_1$.

Notemos que si se escribe $\alpha_t(s) = H(s, t)$, entonces $\alpha_t \in \mathcal{P}(X, x_0, x_1)$, de manera que $\widehat{H}$ es una trayectoria en $\mathcal{P}(X, x_0, x_1)$, y satisface $\widehat{H}(t) = \alpha_t$.



En el rectángulo de la izquierda se representa el producto $I \times I$, y se ilustra el hecho de que $H(0, t) = x_0$ y $H(1, t) = x_1$ para cualquier valor $t \in I$. En este rectángulo, la restricción α_t, de H al segmeto vertical $I \times \{t\}$ es una trayectoria de x_0 a x_1. Es decir, la homotopía es una trayectoria entre trayectorias.

Si $\gamma \in \mathcal{P}(X, x_0, x_1)$, entonces definimos la trayectoria inversa de γ, como la trayectoria $\gamma^{-1} \in \mathcal{P}(X, x_1, x_0)$ mediante

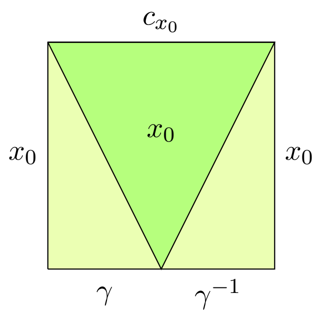
$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t),$$

de manera que $\gamma * \gamma^{-1} \in \Omega(X, x_0)$ y además $\gamma * \gamma^{-1} \simeq c_{x_0}$, donde c_{x_0} es el lazo constante en x_0.

Una posible homotopía $H : \gamma * \gamma^{-1} \simeq c_{x_0}$ es la aplicación $H : I \times I \to X$ definida como sigue.

$$H(s,t) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \gamma\left(\frac{1-t}{2}\right) = \gamma^{-1}\left(\frac{1+t}{2}\right) & \text{si} \quad \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ \gamma^{-1}(s) & \text{si} \quad \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Intuitivamente, la homotopía H no es otra cosa que la expresión matemática del hecho de "encoger" continuamente la concatenación $\gamma * \gamma^{-1}$, lo que se esquematiza mediante la ilustración siguiente. En ella, los extremos verticales y el área triangular sombreada se aplican sobre el punto base x_0.



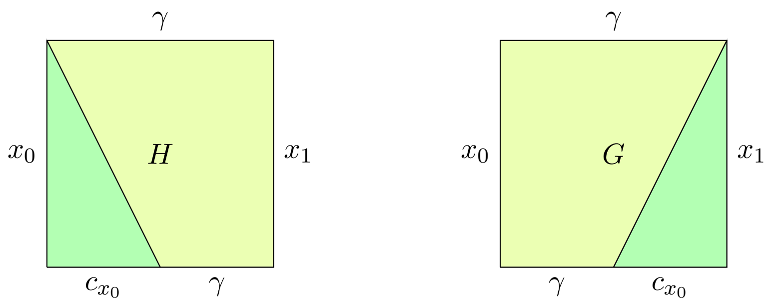
Análogamente, $\gamma^{-1} * \gamma \simeq c_{x_1}$. Por otra parte, de donde se deduce con facilidad que $\gamma * c_{x_1} \simeq \gamma$ y $c_{x_0} * \gamma \simeq \gamma$. La aplicación $H : I \times I \to X$ dada por

$$H(s,t) = \begin{cases} x_0 & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \gamma\left(\frac{2s-1+t}{1+t}\right) & \text{si} \quad \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía entre $c_{x_0} * \gamma$ y γ, en tanto que G, dada como sigue, es una homotopía entre $\gamma * c_{x_1}$ y γ.

$$G(s,t) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{2s}{1+t}\right) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ x_1 & \text{si} \quad \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Ambas homotopías se ilustran en la figura que sigue.



Tenemos entonces que la trayectoria constante c_{x_0} es una identidad izquierda, salvo homotopía, para toda $\gamma \in \mathcal{P}(X, x_0, x_1)$, de la misma manera que c_{x_1} es una identidad derecha, salvo homotopía, para la misma colección de trayectorias. La colección

$$\Pi(X) = \frac{\mathcal{P}(X)}{\simeq},$$

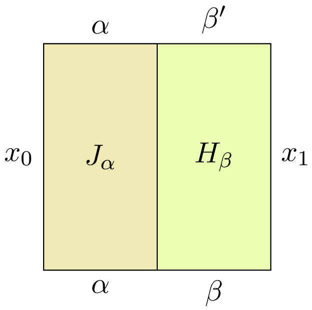
cuyos elementos son las clases de homotopía de trayectorias en X, tiene estructura de *semigrupo*, donde el producto, inducido por la concatenación

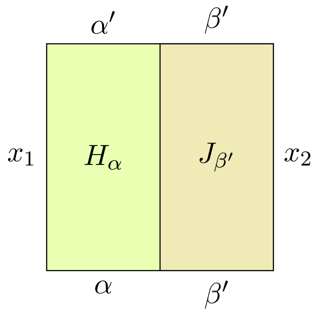
$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$$

está definido siempre que $\alpha(1) = \beta(0)$. Un primer deber es demostrar que la definición anterior tiene sentido. Previo a ello, notemos que $\alpha \simeq \alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{P}(X, x_0, x_1)$. La *homotopía identidad* $J_\alpha : I \times I \to X$ dada por $J_\alpha(s, t) = \alpha(s)$ es una posible, pues $\widehat{J_\alpha} : I \to \mathcal{P}(X)$ es la trayectoria constante $\widehat{J_\alpha}(t) = \alpha$.

Proposición 5.34 *Supongamos que* $\alpha \simeq \alpha' \in \mathcal{P}(X, x_0, x_1)$ *y* $\beta \simeq \beta' \in \mathcal{P}(X, x_1, x_2)$, *entonces* $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$.

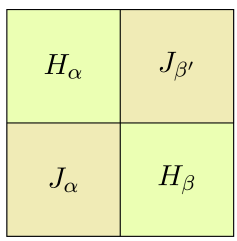
Demostración. Basta demostrar que $\alpha * \beta \simeq \alpha * \beta'$ y $\alpha * \beta' \simeq \alpha' * \beta'$, lo que se ilustra como sigue.





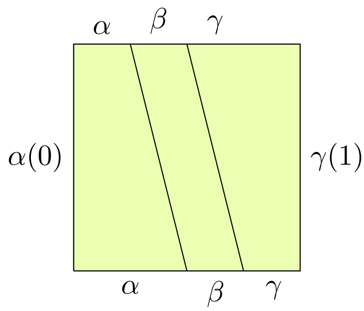
Los detalles se proponen como ejercicio. ■

Como el lector habrá notado, una vez que conocemos las propiedades de las trayectorias, las propiedades de las homotopías se siguen de ellas. No obstante, la versión que aquí se presenta en términos de homotopías y sus diagramas se incluye apelando a su valor didáctico. La concatenación de las dos homotopías en la demostración anterior se ilustra en la figura que sigue.



La operación anterior, definida sobre las clases de homotopía de trayectorias, en términos de la concatenación, es asociativa, y cada clase de homotopía es invertible como se explica en lo que resta de la sección.

La *cocatenación* de trayectorias es asociativa salvo homotopía, como se ilustra en la figura que sigue. Los detalles de la homotopía se proponen como ejercicio.



Dado que $\alpha*(\beta*\gamma) \simeq (\alpha*\beta)*\gamma$, entonces $[\alpha]([\beta][\gamma]) = ([\alpha][\beta])*[\gamma]$. Por otra parte, denotando $1_x = [c_x]$, tenemos un elemento identidad en $\Pi(X)$ para cada $x \in X$. Esta estructura de grupoide hace de $\Pi(X)$ el *grupoide fundamental* de X.

Si X es trayectoconexo, mucha de la información contenida el el grupoide fundamental $\Pi(X)$ es redundante. Eligiendo un punto $x_0 \in X$, y una trayectoria cualquiera ϕ, puede considerarse parte de un lazo basado en x_0, con lo que concentramos la información de conectividad en los lazos basados en uno cualquiera de los puntos de X. Por otra parte, nos permite tener una única identidad y enriquecer la estructura algebraica, a través de la construcción del grupo fundamental, que será expuesta en al capítulo 8. El tema de la sección siguiente es una construcción previa de gran interés.

5.7. Lazos y H-grupos

Un H-*grupo* es básicamente un "grupo salvo homotopía", es decir, una estructura algebraica en la que se sustituye el signo "=" en la definición de grupo por "$\simeq$". Los H-grupos se conocen también como H-*espacios* ó *espacios de Hopf*[6]. Volveremos sobre esta noción con más detalle en el capítulo 8. Concentraremos ahora la atención en $\Omega(X, x_0) \subseteq \mathcal{P}(X)$, que hereda la asociatividad salvo homotopía, y la invertibilidad de sus elementos. Final-

[6]Heinz Hopf (1894 - 1971), matemático alemán. La ciudad alemana de Gräbshen, en la que Hopf nació, forma hoy parte de Polonia y se llama Wroclaw.

mente, el lazo constante e_{x_0} una identidad, salvo homotopía, y toda otra identidad $\iota \in \Omega(X, x_0)$ es obviamente homótopa con c_{x_0}.

Proposición 5.35 *Sean $\alpha, \iota \in \Omega(X, x_{x_0})$ tales que*

$$\alpha * \iota \simeq \alpha \simeq \iota * \alpha,$$

entonces $\iota \simeq e_{x_0}$.

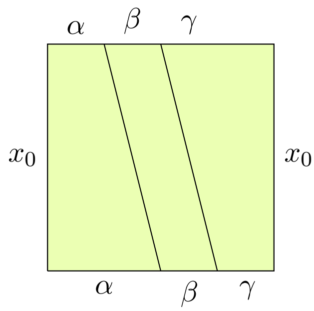
Demostración. Es suficiente observar que $\iota \simeq \iota * e_{x_0} \simeq e_{x_0}$. ■

En el caso particular en el que X es un espacio de Hausdorff, es claro que el *espacio de lazos* $\Omega(X, x_0)$ es también un espacio de Hausdorff, y pretendemos demostrar que el espacio de lazos es un H-grupo, para lo cual requerimos la definición de una operación binaria con las propiedades descritas. La operación en cuestión es la composición de trayectorias definida como sigue:

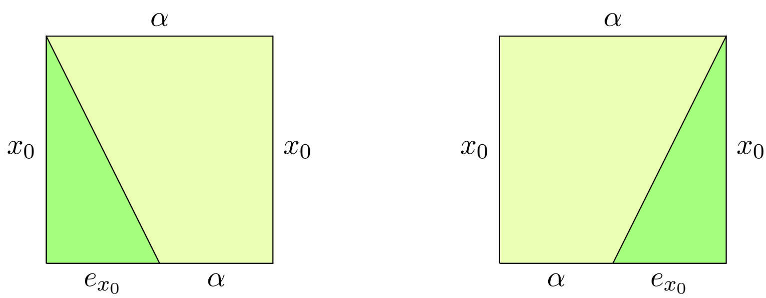
$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{para} \quad 1 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(1-2t) & \text{para} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Con auxilio de las ilustraciones siguientes puede demostrarse con facilidad que el espacio de lazos $\Omega(X, x_0)$ satisface los axiomas de H-grupo. Consideremos $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0)$ tres lazos cualesquiera, denotemos por e_{x_0} el lazo constante $e_{x_0} : I \to X$ dado por $e_{x_0}(t) = x_0$ para todo $t \in I$ y por $\alpha^{-1} : I \to X$ el lazo inverso del lazo α dado mediante $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$.

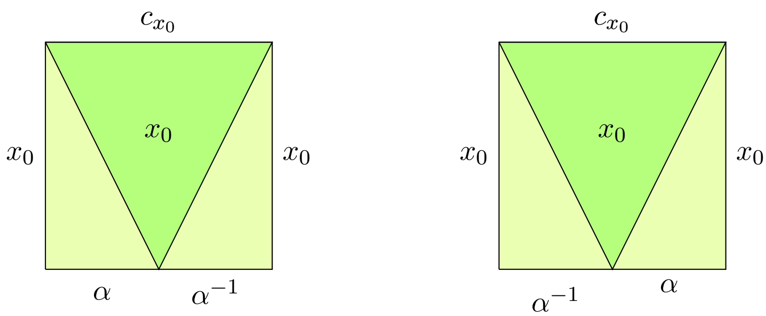
1. Que $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq (\alpha * \beta) * \gamma$ se sigue de la homotopía ilustrada como sigue obteniendo la *asociatividad salvo homotopía*.



2. La homotopía que se ilustra con la figuras siguientes muestra que el lazo constante es *neutro salvo homotopía* en el espacio de lazos, es decir que $\alpha * e_{x_0} \simeq \alpha \simeq e_{x_0} * \alpha$.



3. El lazo inverso es un *inverso salvo homotopía* como se deduce de las figuras que siguen, las cuales ilustran el hecho de que $\alpha * \alpha^{-1} \simeq e_{x_0} \simeq \alpha^{-1} * \alpha$.



Un inverso homotópico[7] de $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ no es, en general, único, pues para cada $\beta \simeq \alpha^{-1}$, con $\beta \in \Omega(X, x_0)$ ocurre que $\alpha * \beta \simeq e_{x_0} \simeq \beta * \alpha$. Con el producto definido antes sobre las clases de homotopía de lazos, no es complicado ver que es espacio $\Omega(X, x_0)$, cuyos puntos son los lazos en X, con punto base en x_0, es un H-espacio.

Proposición 5.36 *Si X es un H-espacio, entonces $\pi_0(X)$ tiene estructura de grupo.*

Demostración. Por hipótesis X está equipado con una operación binaria $* : X \times X \to X$ que es asociativa salvo homotopía, tiene neutro homotópico e inversos homotópicos. Entonces, la operación binaria sobre $\pi_0(X)$ dada por $[x][y] = [x * y]$ está bien definida, es asociativa y tiene neutro e inversos. ■

De acuerdo con este resultado, $\pi_0(\Omega(X.x_0))$ tiene estructura de grupo. Este es el *grupo fundamental* del *espacio punteado*[8] (X, x_0), mismo que suele denotarse por $\pi_1(X, x_0)$. Deberemos esperar hasta el capítulo 8 para discutir más detalles sobre el grupo fundamental y otros grupos de homotopía. Nótese que un espacio punteado es un par topológico de la forma $(X, \{x_0\})$, que se denota mediante (X, x_0) por economía notacional.

[7] Salvo homotopía.
[8] Espacio con punto base.

5.8. Ejercicios

1. Sea X un espacio topológico, y defínase $x \sim y$ si y sólo si $\{x, y\}$ no es distinguible. Demuestre que $X/\sim$ es T_0.

2. Dado un espacio topológico X, sean A y B subespacios de X. Se dice que A y B son *conjuntos separados* si $\overline{A} \cap B = \varnothing = A \cap \overline{B}$. Demuestre que:

   a) el conjunto vacío es separado de cualquier otro conjunto, y en particular, es separado de sí mismo,
   b) X es conexo si y sólo si no es la unión de dos conjuntos separados y no vacíos,
   c) dos conjuntos separados son ajenos, pero el recíproco no se cumple.

3. Determine si los siguientes pares de conjuntos son o no separados.

   a) $A = \{(2, 5)\}$ y $B = \{(1, -2), (4, 2)\}$ en $\mathbb{R}^2$.
   b) $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ y $B = \{(\frac{5}{4}, 0)\}$ en ^{2}.
   c) $A = [0, 1)$ y $B = \{1\}$ en $\mathbb{R}$.

4. Demuestre que si A y B son separados, entonces C y D son separados para $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$.

5. Demuestre que X es conexo si y sólo si toda aplicación $f : X \to D$ es constante para todo espacio discreto D.

6. Demuestre que si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

7. Demuestre que si A es convexo, entonces $\overline{A}$ es convexo. Deduzca que la cerradura topológica y la cerradura convexa no necesariamente coinciden.

8. Proporcione un ejemplo de dos conjuntos separados cuyas cerraduras no son ajenas.

9. Demuestre que $(0,1)$ y $(0,1) \cup \{2\}$ no son homeomorfos en tanto que subespacios de la recta euclidiana.

10. Demuestre que todo espacio infinito X con la topología cofinita es conexo, y exhiba un contraejemplo en el caso en el que X es finito.

11. Sean X un espacio conexo y $A \subset X$ un subespacio propio.

    a) Se sabe que si A es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo. Proporcione un contraejemplo para el recíproco.
    b) Suponga que A es conexo y determine si necesariamente A° es conexo.
    c) Suponga que A es conexo y determine si necesariamente ∂A es conexa.
    d) Suponga que ∂A es conexa y determine si necesariamente A es conexo.

12. Suponga que $f : X \to Y$ es continua y que X conexo. Demuestre que la gráfica $G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$ es un subespacio conexo de $X \times Y$, y determine la veracidad del recíproco.

13. Sea X conexo. Suponga que $f, g : X \to Y$ son ambas continuas y que existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. Demuestre que $G_f \cap G_g$ es conexo.

14. Sean X, Y espacios conexos y $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Defina el espacio cociente

    $$W = \frac{X \sqcup Y}{\sim}$$

    donde $x \sim y$ si $f(x) = g(y)$. Demuestre que si alguna de las dos aplicaciones es suprayectiva, entonces W es un espacio conexo.

15. Sea $\{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{C\}$ una colección de subespacios conexos de X tales que $C \cap X_\alpha \neq \varnothing$, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Demuestre que

    $$C \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha \right)$$

es conexo.

16. Sea $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ una colección numerable de subespacios conexos de un espacio X tal que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$
es conexo.

17. Sean X, Y espacios conexos, y sean $A \subset X$ y $B \subset Y$ subespacios propios. Demuestre que $X \times Y - A \times B$ es conexo.

18. Sea Y un espacio conexo con la topología final inducida por $f : X \to Y$. Demuestre que si $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$, entonces X es conexo.

19. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y $L_a = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = a\}$. Demuestre que si $a \neq b$, entonces $L_a \cup L_b$ no es conexo, y determine si necesariamente L_a es conexo para todo $a \in \mathbb{R}$.

20. Demuestre que todo conjunto convexo es trayectoconexo y en consecuencia es conexo.

21. Demuestre que la imagen continua de un conjunto trayecto-conexo es también trayecto-conexo.

22. Demuestre que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos.

23. Demuestre que $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos para $k \neq m$.

24. Demuestre que el espacio peine
$$P = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times I \right) \cup (\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\})$$
es conexo pero no es trayecto-conexo.

25. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo para $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que f induce una biyección $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.

26. Demuestre que si (X, τ) es conexo y $\tau \subseteq \tau^*$, entonces (X, τ^*) es conexo.

27. Sean $x, y \in X$, la colección finita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$ es una *cadena simple* de x a y si:

    a) $x \in A_1$ y $x \notin A_k$ para $k \in \{2, \ldots, n\}$.
    b) $y \in A_n$ y $x \notin A_k$ para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
    c) $A_k \cap A_m = \varnothing$ si y sólo si $|k - m| > 1$.

    Demuestre que si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces dos puntos cualesquiera de X pueden ser conectados por iuna cadena simple de elementos de $\mathcal{U}$.

28. Demuestre que la recta de Sorgenfrey es totalmente disconexo.

29. Demuestre que las componentes conexas de un espacio localmente conexo son abiertas.

30. Demuestre que si X, Y son localmente conexos, entonces $X \times Y$ es localmente conexo. Demuestre que el producto arbitrario de espacios trayectoconexos es un espacio trayectoconexo.

31. Demuestre que el producto arbitrario de espacios localmente conexos es un espacio localmente conexo.

32. Demuestre que el producto arbitrario de espacios localmente trayectoconexos es un espacio localmente trayectoconexo.

33. Un espacio topológico X es conexo si y sólo si todo subconjunto propio de X tiene frontera no vacía.

34. Determine la mínima topología sobre $\mathbb{R}$ para la cual $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^c$ son separados.

35. Demuestre que las componentes conexas de un espacio topológico son mutuamente separadas, es decir, que dos componentes conexas distintas cualesquiera son conjuntos separados.

36. Demuestre que una separación de X es una pareja de conjuntos separados con cerraduras separadas.

37. Demuestre que el conjunto ternario de Cantor es totalmente disconexo.

38. Demuestre que la recta de Sorgenfrey no es conexa, y que es, además, totalmente disconexa.

39. Sea $\mathcal{C} = \{C_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de subespacios conexos de un espacio topológico X, tales que dos cualesquiera de ellos no son separados. Demuestre que $C = \bigcup \mathcal{C}$ es un subespacio conexo de X.

40. Sea Y un espacio discreto con más de un punto. Demuestre que si X es conexo si y sólo si no existe una función continua y no constante $f : X \to Y$.

41. Demuestre que la banda de Möbius es un espacio trayectoconexo.

42. Demuestre que la botella de Klein es un espacio trayectoconexo.

43. Demuestre que el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ es trayectoconexo para todo $n \geq 0$.

44. Con la notación de la sección 7, demuestre que $E(\alpha*\beta) = E(\alpha)*E(\beta)$.

45. Dada una aplicación continua $f : X \to Y$ considérese

$$f_* = \pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y),$$

mediante $f_*[x] = \pi_0(f)[x] = [f(x)]$ y demuestre que está bien definida. Demuestre además que

a) que $(1_X)_* = 1_{\pi_0(X)}$ y $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, de manera que f_* es functorial, *b*) que si X, Y son H-grupos, entonces f_* es un homomorfismo de grupos.

Tenemos entonces que π_0 es un functor $\pi_0 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ y también $\pi_0 : H\text{-}\mathbf{group} \to \mathbf{Group}$.

Capítulo 6

Convergencia

La continuidad es una propiedad topológica esencial, es decir, puede afimarse que la Topología tiene como tema principal de estudio la continuidad. Como veremos, además, el fenómeno de la convergencia tiene una relación íntima con la continuidad, al grado tal que ambas pueden considerarse como dos manifestaciones del mismo hecho.

En el presente capítulo tocamos el tema de la convergencia en su versión más general, y por ende más poderosa. Generalizaremos de dos formas distintas el concepto de sucesión, que tiene como modelo el conjunto ordenado, y como estructura de recurrencia el orden. El conjunto de los números naturales transfiere su orden a los conjuntos de puntos modelando la convergencia, pero si se examina con cuidado, es posible relajar el orden obteniendo un modelo más esbelto y eficiente, puesto que las sucesiones agotan su capacidad con los espacios 1°-numerables.

Estudiaremos dos variantes de la convergencia. La convergencia Moore-Smith, fue introducida por los norteamericanos Eliakim Hastings Moore[1] y Herman Lyle Smith[2] en su célebre artículo de 1922 [50], siendo sus nociones fundamentales las de dirección y red.

[1]Eliakim Hastings Moore (1862 - 1932), matemático norteamericano, estudiante en Berlín de Kronecker y Weierstrass.

[2]Herman Lyle Smith (1875 - 1987), matemático norteamericano, descubridor de la noción de filtro, con independencia del trabajo de Henri Cartan al respecto.

La versión Bourbaki de la convergencia fue desarrollada básicamente por Henri Cartan[3] en sus trabajos de 1937 [8] y [9], que fueron rápidamente incorporados al libro del colectivo Bourbaki *Topologie Générale*, parte de la enciclopédica obra *Éléments de mathématique*. Estudiaremos también esta versión, y como tendremos oportunidad de verificar, ambas son, en realidad, equivalentes.

6.1. Conjuntos dirigidos

Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto. Un *preorden* sobre X es una relación '$\preceq$' reflexiva y transitiva. Un *conjunto preordenado* es un par $(X, \preceq)$ donde X es un conjunto no vacío y '$\preceq$' es un preorden sobre X. Si $\alpha \preceq \beta$ se dice que α *precede* a β, o bien que β *sucede* a α.

Ejemplo 6.1 *El conjunto $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$ ordenado por inclusión es un conjunto preordenado. En la figura que sigue se ilustra con una flecha cada relación de orden.* $\square$

$$\begin{tikzcd} & \{0\} \\ \varnothing \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \{1\} \end{tikzcd}$$

Una *dirección* '$\preceq$' es un preorden definido sobre un conjunto $D \neq \varnothing$, que satisface la propiedad de la *precedencia universal*, es decir, que dados $a, b \in D$, existe siempre un $c \in D$ tal que $a \preceq c$ y $b \preceq c$. Se dice que el par $(D, \preceq)$ es un *conjunto dirigido*, si '$\preceq$' es una dirección sobre D.

Ejemplo 6.2 *Para todo conjunto X, el par $(2^X, \subseteq)$ es un conjunto dirigido. Note que el conjunto $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$, ordenado por inclusión, no es un conjunto dirigido.* $\square$

---

[3] Henri Cartan (1904 - 2008), matemático francés, hijo del también célebre matemático Élie Cartan (1869 - 1951).

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[dr] & \\
\varnothing \arrow[ur] \arrow[dr] & & \{0,1\} \\
 & \{1\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Un *orden parcial* '$\leq$' sobre un conjunto $X \neq \varnothing$ es un preorden antisimétrico, es decir, tal que si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$. Un *conjunto parcialmente ordenado* es un par $(X, \leq)$, donde X es un conjunto no vacío y '$\leq$' es un orden parcial sobre X. Por brevedad se llama *poset*[4] a un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 6.3 *El conjunto* $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$ *ordenado por inclusión es un poset, al igual que* $(2^X, \subseteq)$ *para todo conjunto* X*. Sin embargo, la inclusión sobre* $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$ *no es una dirección, en tanto que* $(2^X, \subseteq)$ *es claramente un conjunto dirigido .* $\square$

Ejemplo 6.4 *No toda gráfica dirigida representa una dirección, pero una gráfica como la siguiente si lo hace.*

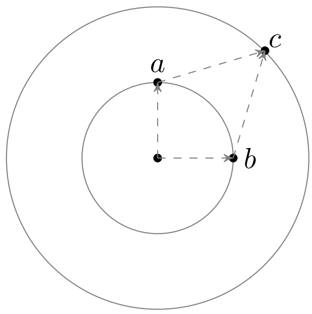
$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left] & \bullet \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

Tomemos por caso el conjunto $D = \{1, -1\}$*, donde* $x \preceq y$ *si y sólo si* $|x| \leq |y|$. $\square$

Ejemplo 6.5 *Considere al campo complejo* $\mathbb{C}$ *dirigido mediante* $z \preceq w$ *si y sólo si* $|z| \leq |w|$*. El par* $(\mathbb{C}, \preceq)$ *es un conjunto dirigido, pero no es un poset.*

---

[4]Partially ordered set



En la ilustración, $a \preceq b$ y $b \preceq a$, pero $a \neq b$. $\square$

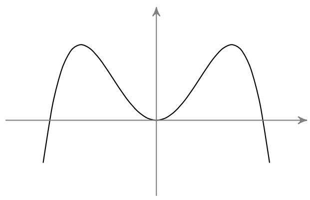
Un *orden total* '$\leq$' sobre un conjunto $X \neq \varnothing$, es un orden parcial que satisface la *propiedad de totalidad*, es decir, que para dos elementos cualesquiera $a, b \in X$ se debe satisfacer al menos una de las dos proposiciones: $a \leq b$ o bien $b \leq a$. Un conjunto totalmente ordenado es un conjunto sobre el que se tiene definido un orden total. El orden total es también llamado *orden lineal* e incluso, alternativamente *orden simple*.

Ejemplo 6.6 *En la recta real, la propiedad de tricotomía consiste en que, dados dos número reales a y b entonces se verifica exactamente una de las tres afirmaciones siguientes: $a < b$, $b < a$ ó $a = b$. esta propiedad define a la recta real como un conjunto totalmente ordenado.* $\square$

Ejemplo 6.7 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Definamos $x \preceq y$ sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si $f(x) \leq f(y)$. Se define así un preorden sobre $\mathbb{R}$. Se dice que f induce el preorden '$\preceq$'. Consideremos algunos casos particulares:*

1. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la regla de correspondencia $f(x) = x^2$, para este caso $2 \preceq -2$ y $-2 \preceq 2$, pero obviamente $-2 \neq 2$. La función f induce un preorden sobre $\mathbb{R}$ que no es un orden parcial. Este preorden es también una dirección.*

2. *La función f dada por $f(x) = 2x^2 - x^4$ induce también una dirección sobre la recta. Nótese que como $-1 \preceq 1$ y $1 \preceq -1$, entonces, el preorden inducido no es un orden parcial.*



3. El orden usual de los reales es inducido por la aplicación identidad.

Nótese además que toda función estrictamente creciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induce un orden equivalente al orden euclidiano de los reales. $\square$

El lector no endrá dificultades para encontrar otros ejemplos de preórdenes interesantes inducidos por funciones específicas. Una importante conclusión de lo hasta ahora revisado, es que no todo orden parcial es una dirección, y que no toda dirección es un orden parcial.

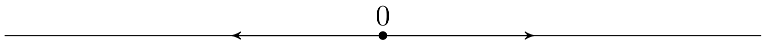
Ejemplo 6.8 *Un conjunto finito A de naturales es un conjunto preordenado, y de hecho es un conjunto totalmente ordenado. Si $x = \text{máx}\, A$, entonces para cualesquiera $a, b \in A$, se satisface que $a \leq x$ y $b \leq x$, de manera que A es también un conjunto dirigido.* $\square$

El concepto de convergencia se refina conforme la noción de orden se transforma en la esencialmente distinta de dirección.

Ejemplo 6.9 *Sea X un espacio topológico, defínase $x \preceq y$ si y sólo si $x \in U$ para todo $U \in \mathcal{N}(y)$, donde $\mathcal{N}(y)$ denota el sistema de vecindades del punto $y \in X$. Este es claramente un preorden sobre los puntos de X. El lector no tendrá dificultad en verificar algunas otras propiedades de orden en este caso. Se invita al lector a proponer un ejemplo en el que este preorden no sea un orden parcial, y otro en el que no sea una dirección.* $\square$

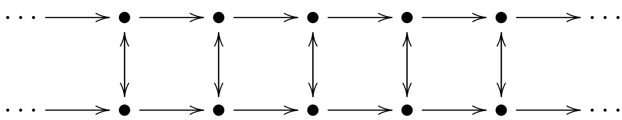
Ejemplo 6.10 *Definamos $A \preceq B$ para $A, B \in 2^{\mathbb{R}}$, si existe una aplicación inyectiva $f : A \to B$. Este es un preorden sobre los subconjuntos de $\mathbb{R}$, que no es un orden parcial. Se deja como ejercicio demostrar que este orden es también una dirección. Note que, equivalentemente, $A \preceq B$ si y sólo si $\#(A) \leq \#(B)$.* $\square$

Ejemplo 6.11 *Definamos sobre la recta euclidiana* $x \preceq y$ *si y sólo si* $|x| \leq |y|$.



Obtenemos así un preorden inducido por un orden total, que es de hecho una dirección. $\square$

Ejemplo 6.12 *No todo poset es un conjunto dirigido como ya hemos visto. Consideremos ahora* $X = \mathbb{N} \times \{a, b\}$, *donde* $(k, x) \preceq (m, y)$, *si* $k \leq m$ *para* $x, y \in \{a, b\}$, *sin una relación de orden o precedencia entre* a *y* b.

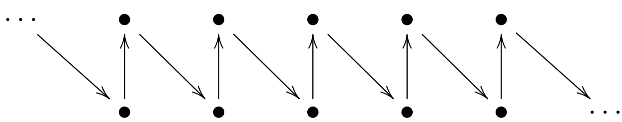


Este es otro ejemplo de un conjunto dirigido que no es un poset. $\square$

Ejemplo 6.13 *Consideremos ahora el producto* $X = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ *con el orden lexicográfico, es decir, dado por:*

1. $(k, x) \preceq (m, y)$ *para* $x, y \in \{0, 1\}$ *y* $k \leq m$.

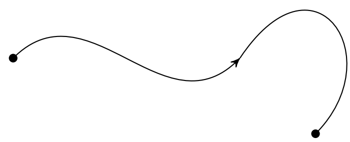
2. $(k, x) \preceq (k, y)$ *para* $k \in \mathbb{N}$ *y para* $x \leq y$ *en* $\{0, 1\}$.



Tenemos entonces que el par $(X, \preceq)$ *es un conjunto dirigido, y es también un poset lineal, es decir, tiene un orden total.* $\square$

6.2. Redes

Una *red* sobre un conjunto X es una aplicación $s : D \to X$ donde $(D, \preceq)$ es un conjunto dirigido, y para mayor especificidad, se dice que s es una *D-red*. Suele denotarse $s(\alpha) = x_\alpha$, en analogía con la notación para sucesiones. Nótese que una sucesión es una $\mathbb{N}$-red, y que una *trayectoria orientada* es una I-red, donde $I = [0, 1]$.



Dado un conjunto $A \subseteq X$, se dice que la red s *está eventualmente* en A, si existe $\beta \in D$ tal que si $\beta \preceq \alpha$, entonces $x_\alpha \in A$. Se dice que la red s *está frecuentemente* en A si para todo $\beta \in D$ existe $\alpha \in D$ tal que $\beta \preceq \alpha$ y $x_\alpha \in A$. Claramente, si s está eventualmente en A, entonces está frecuentemente en A; la demostración se considera ejercicio.

Ejemplo 6.14 *Sea $\varepsilon < \frac{1}{64}$ un número real positivo. Definamos $U = (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ y $V = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$. La sucesión $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$s(k) = \frac{1}{k + 1}$$

está eventualmente en U. Por otra parte, la sucesión $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$s(k) = (-1)^k + \frac{(-1)^k}{k + 1}$$

está frecuentemente en U. $\square$

Si X es un espacio topológico, se dispone del fenómeno de la convergencia. Se dice que $x \in X$ es un *punto de acumulación* de la red $s : D \to X$ si

s está frecuentemente en cada vecindad de x. Se dice que s *converge* a x, lo que se escribe $s \to x$ si s está eventualmente en cada $U \in \mathcal{N}(x)$.

Si D y E son conjutos dirigidos, y $t : D \to E$ es una aplicación tal que para $\alpha, \beta \in D$, el hecho de que $\alpha \preceq \beta$ implica que $t(\alpha) \preceq t(\beta)$, se dice que t es un *morfismo de conjuntos dirigidos*, o que es un *morfismo dirigido*.

Proposición 6.1 *La imagen de un morfismo dirigido es un conjunto dirigido.*

Demostración. Sean $(E, \preceq_E)$ y $(D, \preceq_D)$ conjuntos dirigido, y $t : E \to D$ un morfismo dirigido. Claramente $(D_0, \preceq_D)$ es un conjunto preordenado, donde $D_0 = \operatorname{im} t = t(E)$. Sean $\alpha, \beta \in D_0$, y tomemos preimágenes $\eta, \delta \in E$ tales que $t(\eta) = \alpha$ y $t(\delta) = \beta$. Si $\xi \in E$ es tal que $\eta, \delta \preceq_E \xi$, entonces $\alpha, \beta \preceq_D t(\xi)$. $\blacksquare$

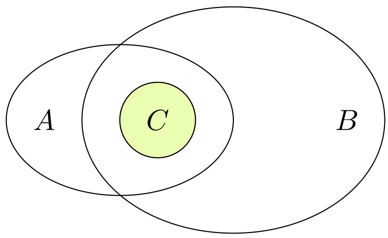
Si D_0 es un subconjunto de un conjunto dirigido D, el cual tiene la propiedad de precedencia universal. La restricción a D_0 de la dirección en D hace de D_0 un conjunto dirigido, si D_0 es la imagen de un morfismo dirigido. Sea $\iota : D_0 \to D$ la inclusión, entonces ι es claramente un monomorfismo dirigido y si $s : D \to X$ es una red en X, se dice que $s \circ \iota : D_0 \to X$ es una *subred* de s.

$$\begin{tikzcd} D_0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "s\circ\iota"'] & D \arrow[d, "s"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Una *base de filtro*[5] sobre un conjunto X, es una colección de conjuntos $\mathcal{A} \subseteq 2^X - \{\varnothing\}$ tal que si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $C \subseteq A \cap B$. Nótese que toda base de filtro es un conjunto dirigido por la contención, es

[5] Algunos textos, como por ejemplo [23], usan el término *dirección* con el mismo significado

decir, $A \preceq B$ si y sólo si $A \supseteq B$. Nótese además que una base de filtro $\mathcal{A}$ no admite elementos ajenos, dado que $\varnothing \notin \mathcal{A}$.



Como ya hemos observado, el par $(2^X - \{\varnothing\}, \supseteq)$ es un conjunto preordenado. Una base de filtro sobre X es un conjunto dirigido $(\mathcal{B}, \supseteq)$, donde $\mathcal{B} \subseteq 2^X - \{\varnothing\}$.

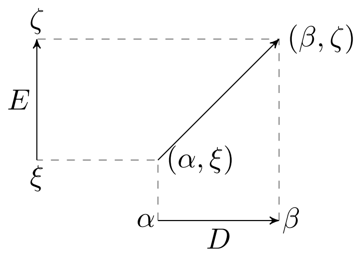
Ejemplo 6.15 *Una base de filtro puede tener intersección vacía. Consideremos la siguiente base de filtro de subconjuntos de la recta real.*

$$\mathcal{A} = \{(0, \varepsilon) | \varepsilon > 0\}$$

Si $2x \in \cap\mathcal{A}$, *entonces* $2x \notin (0, x)$, *lo que es contradictorio. Entonces* $\cap\mathcal{A} = \varnothing$. $\square$

Ejemplo 6.16 *El sistema de vecindades* $\mathcal{N}(x)$*de un punto dado* x *en un espacio topológico* X *es una base de filtro, y es claro además que* $\varnothing \notin \mathcal{N}(x)$. $\square$

Ejemplo 6.17 *Consideremos dos conjuntos dirigidos* $(D, \preceq_D)$ *y* $(E, \preceq_E)$, *entonces* $(D \times E, \preceq)$ *es un conjunto dirigido, si se define* $(\alpha, \xi) \preceq (\beta, \zeta)$ *si y sólo si* $\alpha \preceq_D \beta$ *y* $\xi \preceq_E \zeta$. *En efecto, dados* $(\alpha, \xi), (\beta, \zeta) \in D \times E$, *podemos elegir* $(\delta, \eta) \in D \times E$ *tal que* $\alpha, \beta \preceq_D \delta$ *y* $\xi, \zeta \preceq_E \eta$, *y por tanto* $(\alpha, \xi), (\beta, \zeta) \preceq (\delta, \eta)$. *Esta dirección se llama la dirección producto, y el conjunto dirigido que se obtiene se llama conjunto dirigido producto.* $\square$



Un subconjunto D_0 de un conjunto dirigido D se dice *cofinal* en D, si y sólo si, para cada $\alpha \in D$ existe $\alpha_0 \in D_0$ tal que $\alpha \preceq \alpha_0$. La propiedad de cofinalidad, como veremos, no caracteriza los subconjuntos de conjuntos dirigidos que son también conjuntos dirigidos, pero si a aquellos que permiten definir subredes con las mismas propiedades de convergencia que las redes originales.

Ejemplo 6.18 *El conjunto de los enteros pares es cofinal en los enteros. También lo es el conjunto de los primos. El campo de los racionales es cofinal en los reales. El anillo de los enteros es cofinal en el campo de los reales, de acuerdo con la propiedad arquimediana.* $\square$

Proposición 6.2 *Si un subconjunto de un conjunto dirigido es cofinal, entonces es un conjunto dirigido.*

Demostración. Sean $(D, \preceq)$ y $D_0 \subseteq D$ cofinal. Claramente $(D_0, \preceq)$ es un conjunto preordenado. Sean $\alpha, \beta \in D_0 \subseteq D$, y tomemos $\delta \in D$ tal que $\alpha, \beta \preceq \delta$. Sea ahora $\eta \in D_0$ tal que $\delta \preceq \eta$, entonces $\alpha, \beta \preceq \eta$, como se quería demostrar. $\blacksquare$

Ejemplo 6.19 *La recta real* $\mathbb{R}$ *es un conjunto dirigido, y el intervalo* $I = [0, 1]$ *es un subconjunto de ella que es también un conjunto dirigido. Sin embargo, claramente* I *no es cofinal en* $\mathbb{R}$*, de manera que el recíproco del resultado anterior no se verifica.* $\square$

Si D_0 es cofinal en D, $s : D \to X$ es una red y $\iota : D_0 \to D$ es la inclusión, se dice que la subred $s \circ \iota$ es una *subred cofinal.*

Ejemplo 6.20 *Sea $s : D \to X$ una red, y supóngase que $s \to x$. Si $D_0 \subseteq D$ es cofinal, entonces la correspondiente subred cofinal $s \circ \iota$ donde $\iota : D_0 \to D$ es la inclusión, es tal que $s \circ \iota \to x$.* □

Ejemplo 6.21 *Una sucesión es una $\mathbb{N}$-red, y claramente, una subsucesión es una $\mathbb{N}$-subred cofinal, ya que ningún conjunto finito de naturales define una subsucesión.* □

Lema 6.3 *Sean $s : D \to X$ una red y $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ una base de filtro tal que s está frecuentemente en cada elemento de $\mathcal{A}$. Entonces existe una subred cofinal t de s que está eventualmente en cada elemento de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Por hipótesis $\varnothing \notin \mathcal{A}$, y además $(\mathcal{A}, \supseteq)$ es un conjunto dirigido. Sea $s : D \to X$ una red con la propiedad de la hipótesis. Si

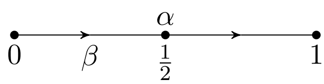
$$E = \{(\alpha, A) \in D \times \mathcal{A} | x_\alpha \in A\},$$

entonces, como $(D \times \mathcal{A}, \preceq)$ es un conjunto dirigido por $(\alpha, A) \preceq (\beta, B)$ si y sólo si $\alpha \preceq \beta$ y $B \subseteq A$, también $(E, \preceq)$ es un conjunto dirigido. Sea $p : E \to D$ la proyección dada por $p(\alpha, A) = \alpha$, la cual es claramente un morfismo dirigido, y además el rango $F \subseteq D$ es cofinal en D, de manera que la subred $s \circ p$ que puede ser expresada como $(x_\alpha | \alpha \in F)$ es una subred cofinal en X. Tomemos $A \in \mathcal{A}$, y sea $x_\alpha \in D$ tal que $x_\alpha \in A$, elíjase ahora (β, B) tal que $(\alpha, A) \preceq (\beta, B)$, entonces $s \circ p(\beta, B) = x_\beta \in B \subseteq A$, es decir, $s \circ p$ está eventualmente en A, y bastará hacer $t = s \circ p$. ■

Teorema 6.4 *El punto x es un punto de acumulación de la red $s : D \to X$, si y sólo si existe una subred cofinal de s que converge a x.*

Demostración. Sean $x \in X$ un punto de acumulación de la red $s : D \to X$, y sea $\mathcal{N}(x)$ el sistema de vecindades de X, entonces, por definición, s está frecuentemente en cada elemento de $\mathcal{N}(x)$. Por el lema anterior, existe una subred cofinal de s que converge a x. Si x no es un punto de acumulación de s, existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que s no está frecuentemente en U, entonces, toda subred cofinal de s está en U^c, con lo que claramente, ninguna de ellas converge a x. ■

Ejemplo 6.22 *Sean X un espacio topológico y $\alpha : I \to X$ una trayectoria con $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$ y $\alpha(\frac{1}{2}) = c$. Si denotamos por $\beta : [0, \frac{1}{2}] \to X$ la restricción de α al subintervalo $[0, \frac{1}{2}]$, entonces β es una subred de α, pero claramente no es cofinal. Consideradas como redes $\alpha \to b$ y $\beta \to c$, sin embargo, claramente c no es punto de acumulación de α y b no es punto de acumulación de β.* $\square$



Para el caso de las sucesiones, toda subsucesión de una sucesión convergente es a su vez convergente, sin embargo, para redes en general, tal propiedad no se conserva, como se sigue del ejemplo anterior.

Ejemplo 6.23 *Sea $D = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con la dirección dada por $(k, m) \preceq (n, p)$ si y sólo si $k \leq n$ y $m \leq p$. Claramente la red $s : D \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$s(k, m) = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{m+1} \right)$$

converge a $(0, 0)$, no obstante, si $D_0 = \mathbb{N} \times \{0\}$, entonces la red $s \circ \iota : D_0 \to \mathbb{R}^2$ no converge a $(0, 0)$, y ni siquiera lo tiene como punto de acumulación. En realidad, la subred definida es convergente, y $s \circ \iota \to (0, 1)$; el límite no es el mismo, dado que D_0 no es cofinal en D . Si D_0 es la diagonal, la subred es convergente y tiene el mismo límite que la red. La diagonal si es cofinal en D. $\square$

Proposición 6.5 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces $x \in A'$ si y sólo si existe una red en $A - \{x\}$ que converge a x.*

Demostración. Si existe una red en $A - \{x\}$ que converge a x, entonces claramente $x \in A'$, por definición de red convergente. Para demostrar el recíproco, consideremos el conjunto dirigido $(\mathcal{N}(x), \supseteq)$, y elijamos $x_U \in U \cap (A - \{x\})$, definamos entonces la red $s : \mathcal{N}(x) \to X$ mediante $s(U) = x_U$, la que es una red en $A - \{x\}$ que claramente converge a x. $\blacksquare$

La topología puede ser determinada por la convergencia.

Proposición 6.6 *Un conjunto U es abierto en X si y sólo si toda red en X que es convergente en U está eventualmente en U.*

Demostración. Si U es abierto, la conclusión se sigue claramente de las definiciones. Supóngase, recíprocamente, que toda red convergente en U, es decir, que converge a un punto $x \in U$, está eventualmente en U. Supóngase que U no es abierto,de manera que $F = U^c$ no es cerrado. Sea $x \in F' - F$, entonces $x \in U$. Usando el resultado anterior, sea $s : D \to F - \{x\}$ una red tal que $s \to x$, la cual claramente no está eventualmente en $U = F^c$. ■

Ejemplo 6.24 *Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces f es continua en x si y sólo si para toda red $s : D \to X$, convergente y que converge a x se tiene que $f \circ s$ es una red convergente a $f(x)$. La función f es continua, si y sólo si para toda red convergente s en X, la red $f \circ s$ es convergente en Y, de manera que si $s \to x$ entonces $f \circ s \to f(x)$.*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "f\circ s"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

Los detalles se dejan como ejercicio. □

6.3. Sucesiones

La razón por la que en el estudio de la convergencia en espacios euclidianos encontremos una herramienta suficientemente poderosa en las sucesiones, radica en la topología de estos espacios, que son 1°-numerables, es decir, que admiten bases locales numerables, como ocurre también en todo espacio pseudométrico. Recordemos que una *base local* en $x \in X$ es una colección $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{N}(x)$ tal que para toda $V \in \mathcal{N}(x)$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$.

Una *sucesión* en un espacio topológico X es una red $s : \mathbb{N} \to X$, y el hecho de que la sucesión s está frecuentemente en A, define de forma natural una subsucesión contenida en A. La sucesión s está eventualmente en A si "casi todos" su términos están en A, es decir, a lo sumo una cantidad finita de términos están en A^c. El principio de buena ordenación es también una herramienta considerablemente poderosa en este caso.

Proposición 6.7 *Si la sucesión $s : \mathbb{N} \to X$ está frecuentemente en $A \subseteq X$, entonces s tiene una subsucesión t contenida en A.*

Demostración. Denotemos $s(n) = x_n$, sea $\iota(1) = \min\{n \in \mathbb{N} | x_n \in A\}$, y además

$$\iota(k) = \min\{n \in \mathbb{N} | x_n \in A - \{\iota(1), \ldots, \iota(k-1)\}\},$$

entonces, es claro que $t = s \circ \iota$ es una subsucesión de s que claramente converge a x. ■

Ejemplo 6.25 *Consideremos $D_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ un subconjunto dirigido de $\mathbb{N}$. Dada una sucesión $s : \mathbb{N} \to X$, puede notarse con facilidad que la subred $s \circ \iota$ no es una subsucesión, ya que D_n no es cofinal.* □

Lema 6.8 *Sean X un espacio 1°-numerable y $x \in X$. Existe una base local numerable $\mathcal{V} = \{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ para $\mathcal{N}(x)$ tal que $V_{n+1} \subseteq V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ una base local numerable para $\mathcal{N}(x)$. Defínase

$$V_n = \bigcap_{k=0}^{n} U_k,$$

y nótese que $\mathcal{V} = \{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ es también una base local para $\mathcal{N}(x)$, que tiene la propiedad propuesta. ■

Observamos ahora que las propiedades conocidas en Cálculo de las sucesiones se relacionan directamente con el hecho de que los espacios sobre los que ellas se definen satisfacen el primer axioma de numerabilidad.

Proposición 6.9 *Sean X un espacio 1°-numerable y $A \subseteq X$. Entonces $x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión en $A - \{x\}$ que converge a x.*

Demostración. Si tal sucesión existe, entonces claramente $x \in A'$. Recíprocamente, sean $x \in A'$ y $\mathcal{V} = \{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ una base local numerable para $\mathcal{N}(x)$, tal que $V_{n+1} \subseteq V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta tomar $x_n \in V_n - \{x\}$, con lo que se obtiene que $x_n \to x$. ■

Proposición 6.10 *Sean X un espacio 1°-numerable y $U \subseteq X$. Entonces $U \subseteq X$ es abierto si y sólo toda sucesión convergente en U está eventualmente en U.*

Demostración. Si U no es abierto, entonces U^c no es cerrado, de manera que existe una sucesión s en U^c que converge a un punto $x \in U$. Por supuesto s no está eventualmente en U. Sea x un punto de acumulación de la sucesión s, y sea $\mathcal{V} = \{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ una base local numerable para $\mathcal{N}(x)$, tal que $V_{n+1} \subseteq V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tómese $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq k$ y $x_{n_k} \in V_k$. Sea $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\iota(k) = n_k$, de manera que ι es un morfismo dirigido y $s \circ \iota$ claramente está eventualmente en U. ■

6.4. Filtros

Sea X un espacio topológico, un *filtro* en X es una colección no vacía $\mathcal{F} \subseteq 2^X - \{\varnothing\}$ que satisface:

1. si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$,
2. si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Una consecuencia inmediata de la definición es que dados dos elementos de un filtro, su intersección es no vacía, dado que también pertenece al filtro. Otra consecuencia pronta es que $X \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 6.26 *La intersección de un filtro puede, sin embargo, ser vacía. Sea $\mathcal{F}$ el filtro que contiene todo los intervalos de la forma $(0, \varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$, y todo conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(0, \varepsilon) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, claramente $\cap\mathcal{F} = \varnothing$, dado que $\cap\mathcal{F} \subseteq \cap\{(0, \varepsilon) | \varepsilon > 0\} = \varnothing$.* □

Un *ultrafiltro* es un filtro maximal, es decir, un filtro que no está contenido en filtro alguno. El sistema de vecindades de un punto $x \in X$ es el filtro $\mathcal{N}(x)$. El conjunto $\mathcal{A}(x) = \{A \subseteq X | x \in A\}$ de todos los subconjuntos que contienen a x es un ultrafiltro, y claramente $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{A}(x)$.

Un filtro *converge* a x, lo que se denota mediante $\mathcal{F} \to x$, si $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Claramente, tanto $\mathcal{N}(x)$ como $\mathcal{A}(x)$ son filtros que convergen a x. Si $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}$, se dice que x es un *punto de acumulación* del filtro $\mathcal{F}$.

Ejemplo 6.27 *Si $x \neq y$, $y \in \cap\mathcal{N}(x)$ y $x \in \cap\mathcal{N}(y)$, entonces, todo filtro que converge a x converge también a y.* $\square$

Ejemplo 6.28 *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros en un espacio topológico X. Si $\mathcal{F} \to x$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \to x$.* $\square$

En los ejercicios se caracteriza un espacio de Hausdorff mediante la propiedad de la unicidad del límite, así como el hecho de que basta que x sea un punto de acumulación de un filtro $\mathcal{F}$ para que $\mathcal{F} \to x$.

Proposición 6.11 *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *El espacio X es de Hausdorff.*
2. *Toda red convergente en X tiene límite único.*
3. *Todo filtro convergente en X tiene límite único.*

Demostración. Ejercicio. $\blacksquare$

Proposición 6.12 *Un filtro $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, si y sólo si todo conjunto que intersecta a todo elemento de $\mathcal{U}$ es también elemento de $\mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, y sea $\mathcal{F}$ un filtro que contiene a $\mathcal{U}$ y a todo conjunto que intersecta a todo elemento de $\mathcal{U}$, entonces, por maximalidad $\mathcal{F} = \mathcal{U}$. Recíprocamente, sea $\mathcal{U}$ un filtro con la propiedad descrita, y supóngase que $\mathcal{F}$ es un filtro tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, entonces, dados $U \in \mathcal{U}$ y $A \in \mathcal{F}$, es claro que

$$\varnothing \neq A \cap U \in \mathcal{F},$$

de manera que por hipótesis $A \in \mathcal{U}$ y en consecuencia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, de donde $\mathcal{U}$ es claramente un ultrafiltro. ■

Proposición 6.13 *Si x es un punto de acumulación de un ultrafiltro $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U} \to x$.*

Demostración. Por hipótesis, dados $U \in \mathcal{N}(x)$ y $A \in \mathcal{U}$, necesariamente $U \cap A \neq \varnothing$, luego, por el resultado anterior $U \in \mathcal{U}$, de donde $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{U}$. ■

Ejemplo 6.29 *Toda intersección de filtros es un filtro. Más precisamente, si $\mathcal{A} \neq \varnothing$ es un conjunto arbitrario, y $\{\mathcal{F}_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una colección de filtros, entonces*

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_\alpha$$

es un filtro. Además, si $\mathcal{F}_\alpha \to x$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{F} \to x$. □

Definimos antes una *base de filtro* como una colección de conjuntos no vacíos $\mathcal{B}$ de un espacio dado X, tal que si $A, B \in \mathcal{B}$, entonces existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$. Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro en X, si $\{\mathcal{F}_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es la colección de todos los filtros en X que contienen a $\mathcal{B}$, decimos que $\mathcal{F} = \cap\{\mathcal{F}_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es el *filtro generado* por $\mathcal{B}$. Se dice también que $\mathcal{B}$ es una base de filtro para $\mathcal{F}$.

Proposición 6.14 *Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro, entonces*

$$\mathcal{F} = \{F | F \supseteq B \text{ para algún } B \in \mathcal{B}\}$$

es un filtro.

Demostración. Ejercicio. ■

Con la notación del resultado anterior, se dice que $\mathcal{F}$ es el *filtro generado* por la base de filtro $\mathcal{B}$.

Ejemplo 6.30 *Consideremos la base de filtro $\mathcal{B} = \{(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} | \varepsilon > 0\}$ en la recta real, y sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por $\mathcal{B}$. Claramente 0 es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$ y es además el único posible. En este caso $\mathcal{F} \to 0$.* □

Se dice que una base de filtro $\mathcal{B}$ *converge* a $x \in X$ si y sólo si para toda $U \in \mathcal{N}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}$ con $B \subseteq U$. Si $\mathcal{B}$ converge a x escribimos $\mathcal{B} \to x$. Equivalentemente, una base de filtro converge a x si su filtro generado converge a x. Los detalles se dejan como ejercicio.

Ejemplo 6.31 *Consideremos la base de filtro* $\mathcal{B} = \{(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} | \varepsilon > 0\}$ *en la recta real, y sea* $\mathcal{F}$ *el filtro generado por* $\mathcal{B}$*. Claramente 0 es un punto de acumulación de* $\mathcal{F}$ *y es además el único posible. En este caso también* $\mathcal{F} \to 0$*, y de acuerdo con la definición anterior* $\mathcal{B} \to 0$*.* $\square$

En realidad, para que un filtro sea convergente a un punto dado, es suficiente que una base de filtro que lo genere sea convergente a tal punto.

Ejemplo 6.32 *Sean* $p, q \in \mathbb{R}^2$ *dos puntos distintos. Sea* $\mathcal{F}$ *el conjunto de todos los subconjuntos del plano euclidiano que contienen a ambos puntos. Demuestre que* $\mathcal{F}$ *es un filtro y que tanto* p *como* q *son puntos de acumulación de* $\mathcal{F}$*. Claramente* $\mathcal{F}$ *no es convergente, dado que no es un ultrafiltro: el filtro generado por las vecindades de* p *contiene a* $\mathcal{F}$*.* $\square$

Ejemplo 6.33 *El conjunto* $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : [0, 1] \subseteq A\}$ *es un filtro sobre* $\mathbb{R}$*, y no es convergente si* $\mathbb{R}$ *tiene la topología euclidiana. No es complicado encontrar un ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *que contenga propiamente a* $\mathcal{F}$*.* $\square$

Ejemplo 6.34 *El conjunto* $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} | \mathbb{Q} \subseteq A\}$ *es un filtro sobre* $\mathbb{R}$*, y no es convergente si* $\mathbb{R}$ *tiene la topología euclidiana. El lector curioso no tendrá dificultad en encuentar un ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *que contenga propiamente a* $\mathcal{F}$*.* $\square$

6.5. El fenómeno de la convergencia

En las dos secciones anteriores hemos desarrollado eficientes instrumentos para el estudio de la convergencia, mismos que como veremos, son en realidad equivalentes: un filtro determina una red y viceversa, de manera que la red es convergente si y sólo si el filtro asociado es convergente. En este sentido, redes y filtros son duales en términos de convergencia.

Ejemplo 6.35 *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un espacio X, entonces $(\mathcal{F}, \supseteq)$ es un conjunto dirigido. Es un ejercicio completar los detalles.* □

Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un espacio Y y X es un espacio topológico, entonces una aplicación $s : \mathcal{F} \to X$ es una red sobre X. Más propiamente, s es una $\mathcal{F}$-red sobre X.

Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un espacio topológico X, definamos una $\mathcal{F}$-red $s : \mathcal{F} \to X$ tal que $s(A) = x_A \in A$. Decimos que s es una *red inducida* por el filtro $\mathcal{F}$.

Teorema 6.15 *Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, s una red inducida por $\mathcal{F}$ y $x \in X$ un punto. Entonces $\mathcal{F} \to x$ si y sólo si $s \to x$.*

Demostración. Si $\mathcal{F} \to x$ entonces $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Si $U \in \mathcal{N}(x)$, entonces claramente $x_V \in U$ para todo $V \subseteq U$, de manera que s está eventualmente en cada vecindad de x y por tanto $s \to x$. Recíprocamente, supóngase que $s \to x$, entonces, si $U \in \mathcal{N}(x)$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $x_B \in U$ para todo $B \in \mathcal{F}$ con $B \subseteq A$, y dado que x_B es arbitrario, por definición de filtro $B \subseteq U$ y por tanto $U \in \mathcal{F}$, de donde finalmente $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$. ■

Sean ahora X un espacio topológico, $(D, \preceq)$ un conjunto dirigido, y $s : D \to X$ una D-red sobre X. Definamos

$$\mathcal{F}_s = \{A \in 2^X - \{\varnothing\} | s \text{ está eventualmente en } A\}.$$

En los ejercicios se pide demostrar que $\mathcal{F}_s$ es un filtro. Se dice que $\mathcal{F}_s$ es el *filtro inducido* por la red s.

Teorema 6.16 *Sean $s : D \to X$ una red y $\mathcal{F}_s$ es el filtro inducido por s. Entonces, $s \to x$ si y sólo si $\mathcal{F}_s \to x$.*

Demostración. Si $s \to x$, entonces s está eventualmente en cada vecindad de x, de donde $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}_s$. Recíprocamente, si $\mathcal{F}_s \to x$, entonces $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}_s$, de donde s está eventualmente en cada vecindad de x, y por tanto, $s \to x$. ■

La Topología es básicamente, el estudio de la convergencia y la continuidad. El hecho queda de manifiesto si notamos que la topología de un espacio determina la convergencia de las redes y los filtros que sobre él se definen. Por otra parte, el resultado siguiente deja claro que la cerradura o adherencia en un espacio topológico queda determinada por la convergencia de redes y filtros.

Teorema 6.17 *Sean X un espacio topológico, A un subespacio y x un punto. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una red en A que converge a x.*

Demostración. Consideremos el conjunto dirigido $(\mathcal{N}(x), \supseteq)$ y supóngase que $x \in \overline{A}$. Para cada $U \in \mathcal{N}(x)$ elíjase $s(U) = x_U \in U \cap A$; claramente se ha definido $s : \mathcal{N}(x) \to X$ que es una red en A, y claramente también $s \to x$. Supóngase recíprocamente que $s : D \to X$ es una red tal que $s(\alpha) = x_\alpha \in A$ para todo $\alpha \in D$, y que $s \to x$; entonces s está eventualmente en cada vecindad de x, de donde es claro que $U \cap A \neq \varnothing$. ■

Si X es un espacio topológico y A es un subespacio de X, entendemos por *un filtro en* A a un filtro en X cada uno de cuyos elementos intersecta al subespacio A.

Ejemplo 6.36 *Sean X un espacio topológico, A un subespacio y x un punto. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe un filtro en A que converge a x.* □

Finalmente, como veremos, la convergencia y la continuidad son prácticamente el mismo fenómeno.

Ejemplo 6.37 *Una aplicación $f : X \to Y$ si y sólo si para toda red $s : D \to X$ tal que $s \to x$ se tiene que la red $f \circ s : D \to Y$ es tal que $f \circ s \to f(x)$. Completar los detalles es un ejercicio.* □

6.6. Límites directos

Dado un conjunto dirigido $(\mathcal{A}, \preceq)$, un *sistema dirigido* por $\mathcal{A}$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un par $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{X} = \{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una colección de objetos y $\mathcal{F} = \{f_{\alpha\beta} | \alpha \preceq \beta; \alpha, \beta \in \mathcal{A}\}$ es una colección de morfismos con las propiedades siguientes:

1. $f_{\alpha\beta} : X_\alpha \to X_\beta$.

2. $f_{\alpha\alpha} = 1_{X_\alpha}$.

3. $f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta}$.

Es usual denotar mediante $\langle X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \mathcal{A}\rangle$ el sistema dirigido descrito anteriormente.

Sobre un sistema dirigido $\langle X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \mathcal{A}\rangle$ definimos para $\alpha \preceq \beta$, $x_\alpha \sim x_\beta$ si existe $\gamma \in \mathcal{A}$ tal que $f_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = f_{\beta\gamma}(x_\beta)$. En lenguaje informal decimos que dos elementos son equivalentes si son "eventualmente iguales". El *límite directo*, también llamado *límite inductivo* de un sistema dirigido $\langle X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \mathcal{A}\rangle$ como la unión ajena de los X_α módulo la relación de equivalencia anterior, simbólicamente

$$X = \lim_{\to} X_\alpha = \frac{\bigsqcup_\alpha X_\alpha}{\sim}.$$

Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ definamos la aplicación $\varphi_\alpha : X_\alpha \to X$ mediante $\varphi_\alpha(x_\alpha) = x = [x_\alpha]$. Notemos que como para $x_\beta = f_{\alpha\beta}(x_\alpha)$, se tiene $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$, entonces $\varphi_\beta = \varphi_\alpha \circ f_{\alpha\beta}$.

Teorema 6.18 *Si X es el límite directo del sistema dirigido $\langle X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \mathcal{A}\rangle$, entonces, dado un objeto Y y una colección de morfismos $\psi_\alpha : X_\alpha \to Y$ tales que $\psi_\alpha = \psi_\beta \circ f_{\alpha\beta}$, existe un único morfismo $u : X \to Y$ que hace conmutativo el siguiente diagrama para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ con $\alpha \preceq \beta$.*

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[rr, "f_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"] \arrow[ddr, "\psi_\alpha"'] & & X_\beta \arrow[dl, "\varphi_\beta"'] \arrow[ddl, "\psi_\beta"] \\
& X \arrow[d, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supóngase que $\alpha \preceq \beta$, y que $f_{\alpha\beta}(x_\alpha) = x_\beta$, entonces $[x_\alpha] = [x_\beta] = x$, y además, por la conmutatividad del diagrama $y = \psi_\alpha(x_\alpha) = \psi_\beta(x_\beta)$, de forma que es suficiente definir $u(x) = y$ demostrando la existencia de u y la conmutatividad del diagrama. Si $v : X \to Y$ con la misma propiedad, entonces para $x = \varphi_\alpha(x_\alpha)$ se satisface

$$v(x) = v \circ \varphi_\alpha(x_\alpha) = \psi(x_\alpha) = u \circ \varphi_\alpha(x_\alpha) = u(x)$$

con lo que se establece la unicidad. ■

La idea de límite directo generaliza las nociones previas de convergencia. Consideremos por ejemplo la categoría cuya colección de objetos es el conjunto $2^{\mathbb{R}}$, y la colección de morfismos son las inclusiones. Consideremos la colección de los intevalos $X_n = (0, \frac{n}{n+1})$ para $n \in \mathbb{N}_+$, junto con la colección de morfismos $f_{nm} : (0, \frac{n}{n+1}) \to (0, \frac{m}{m+1})$ para $n \leq m$. Tenemos entonces el sistema dirigido $\langle X_n, f_{nm}, \mathbb{N}_+\rangle$. El límite directo de este sistema dirigido es $(0,1)$, como lo muestra el diguiente diagrama contativo, donde cada morfismo es una inclusión y $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto con $(0,1) \subseteq A$.

$$\begin{tikzcd}
(0, \frac{n}{n+1}) \arrow[rr, "f_{nm}"] \arrow[dr, "\varphi_n"] \arrow[ddr, "\psi_n"'] & & (0, \frac{m}{m+1}) \arrow[dl, "\varphi_m"'] \arrow[ddl, "\psi_m"] \\
& (0,1) \arrow[d, "u"'] & \\
& A &
\end{tikzcd}$$

El hecho anterior recuerda un hecho ampliamente conocido.

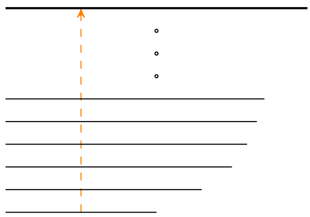
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \left(0, \frac{n}{n+1}\right) = (0,1)$$

La construcción en términos de unión ajena, en este caso, puede ilustrarse mediante la siguiente unión ajena, donde $(x,n) \sim (y,m)$ si y sólo si

$x = y$.

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_+}\left(0,\frac{n}{n+1}\right)=\bigcup\left(0,\frac{n}{n+1}\right)\times\{n\}$$

La siguiente figura ilustra el hecho, y la flecha indica una clase de equivalencia en el límite directo.



En el siguiente diagrama, cada morfismo $a \to b$ significa $a \leq b$.

$$\begin{tikzcd}
\frac{n}{n+1} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \frac{m}{m+1} \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& 1 \arrow[d] & \\
& x &
\end{tikzcd}$$

Con el diagrama se recuerda el hecho de que la $\mathbb{N}_+$-red s sobre $\mathbb{R}$, dada por $s(k)=\frac{k}{k+1}$ converge a 1.

Ejemplo 6.38 *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. La colección $\{U \in \tau | U \subseteq A\}$ es un sistema dirigido por inclusión, cuyo límite directo es A°.* $\square$

Ejemplo 6.39 *Dado un pozo de aplicaciones $\{f_\alpha : X_\alpha \to Y | \alpha \in \mathcal{A}\}$, considérese la siguiente colección de topologías sobre Y, dirigido por inclusión.*

$$\{\tau | f_\alpha : X_\alpha \to Y \textit{ es continua para todo } \alpha \in \mathcal{A}\}$$

La topología final sobre Y inducida por este pozo de aplicaciones es el límite directo de este sistema dirigido. $\square$

Ejemplo 6.40 *Consideremos una sucesión de espacios topológicos (X_n) y una colección de encajes $\iota_{nm} : X_n \to X_m$ para $n \leq m$ y tal que ι_{nn} es la identidad en X_n y además $\iota_{mn} = \iota_{km} \circ \iota_{nk}$ para $n \leq k \leq m$. El límite directo del sistema dirigido $\langle X_n, \iota_{nm}, \mathbb{N} \rangle$ es la unión de los espacios, donde los encajes se interpretan como inclusiones. Casos particulares interesantes lo constituyen las inclusiones $\iota_{nm} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\iota_{nm} : S^n \to S^m$ y $\iota_{nm} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$, cuyos límites directos son, respectivamente, $\mathbb{R}^\infty$, S^∞ y $\mathbb{R}P^\infty$.* $\square$

Ejemplo 6.41 *Un complejo celular X es el límite directo ó inductivo de sus esqueletos $X^{(n)}$.* $\square$

Ejemplo 6.42 *Sea p un número primo, y para cada $n \in \mathbb{N}$, nótese que el grupo $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ tiene como elementos a las clases de residuos $[0], [1], \ldots, [p^n - 1]$ módulo p^n. La multiplicación por p induce un monomorfismo $\iota_n : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ mediante $\iota_n[k] = [pk]$, cuyas imágenes son las clases de residuos $[0], [p], \ldots, [p^{n+1} - p]$ módulo p^{n+1}. El límite directo del sistema dirigido $\langle \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \iota_n, \mathbb{N} \rangle$ es el grupo de Prüfer $\mathbb{Z}(p^\infty)$ que puede inerpretarse como el grupo de todas las raíces de la unidad cuyo orden es alguna potencia de p.* $\square$

6.7. Límites inversos

Dado un conjunto dirigido $(\mathcal{A}, \preceq)$. Un *sistema inverso* sobre $\mathcal{A}$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un par $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{X} = \{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una colección de objetos y $\mathcal{F} = \{f_{\beta\alpha} | \alpha \preceq \beta; \alpha, \beta \in \mathcal{A}\}$ es una colección de morfismos con las propiedades siguientes:

1. $f_{\beta\alpha} : X_\beta \to X_\alpha$.
2. $f_{\alpha\alpha} = 1_{X_\alpha}$.
3. $f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha}$.

Es usual denotar mediante $\langle X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{A}\rangle$ el sistema inverso descrito anteriormente, en analogía con la notación usada para sistemas dirigidos.

El *límite inverso*, llamado también *límite proyectivo* X del sistema inverso $\langle X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{A}\rangle$ se define como se indica.

$$X = \lim_{\leftarrow} X_\alpha = \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \,\middle|\, x_\alpha = f_{\beta\alpha}(x_\beta); \alpha \preceq \beta \right\}$$

Dado que el límite inverso está contenido en el producto de los X_α, entonces podemos considerar las restricciones de las proyecciones $p_\alpha : X \to X_\alpha$, las cuales claramente satisfacen $p_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ p_\beta$.

Teorema 6.19 *Si X es el límite inverso del sistema inverso $\langle X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{A}\rangle$, entonces, dado un objeto Y y una colección de morfismos $\psi_\alpha : Y \to X_\alpha$ que satisfacen $\psi_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ \psi_\beta$, existe una único morfismo $u : Y \to X$ que hace conmutativo el siguiente diagrama para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ con $\alpha \preceq \beta$.*

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "\psi_\beta"'] \arrow[ddr, "\psi_\alpha"] & \\
 & X \arrow[dl, "p_\beta"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & \\
X_\beta \arrow[rr, "f_{\beta\alpha}"'] & & X_\alpha
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supóngase que $\alpha \preceq \beta$, y que $f_{\beta\alpha}(x_\beta) = x_\alpha$, entonces $[x_\alpha] = [x_\beta] = x$, y además, por la conmutatividad del diagrama $y = \psi_\alpha(x_\alpha) = \psi_\beta(x_\beta)$, de forma que es suficiente definir $u(y) = x$ demostrando la existencia de u y la conmutatividad del diagrama. Si $v : Y \to X$ es un morfismo con la misma propiedad, entonces para $p_\alpha(x) = x_\alpha$ se satisface

$$p_\alpha(v(x)) = x_\alpha = p_\alpha(u(x))$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, con lo que se establece la unicidad. ■

La analogía conjuntista más cercana del límite inverso es la intersección. Tomemos por caso la categoría de los intervalos de la foma $[0, b]$ para $b \geq 0$ en la recta real $\mathbb{R}$, donde los morfismos $f_{ab} : [0, a] \to [0, b]$ tienen la forma

$$f_{ab}(t) = \frac{bt}{a},$$

para $a \neq 0$ y es la inclusión para $a = 0$. La colección de los intervalos de la forma $[0, \frac{1}{n}]$ para $\mathbb{N}_+$ es un sistema inverso con los morfismos f_{ab} donde $b < a$. El límite inverso de este sistema inverso es $\{0\}$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[ddl, "\psi_n"'] \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, "\psi_m"] & \\
& \{0\} \arrow[dl, "p_m"] \arrow[dr, "p_m"'] & \\
{[0, \frac{1}{n}]} \arrow[rr, "f_{nm}"'] & & {[0, \frac{1}{m}]}
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior ilustra el hecho, donde $n \leq m$ y $A \subseteq \{0\}$. El lector no tardará en asociar este ejemplo con la $\mathbb{N}_+$-red s dada por $s(n) = \frac{1}{n}$, y el hecho de que $s \to 0$.

Ejemplo 6.43 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. La colección de los cerrados que contienen al conjunto A es un sistema inverso, cuyo límite inverso es $\overline{A}$.* □

Ejemplo 6.44 *Dado una fuente de aplicaciones $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, la colección de las topologías sobre Y para las cuales cada f_α es continua, es un sistema inverso, cuyo límite inverso es la topología inicial sobre X, inducida por la funete de aplicacionies dada.* □

6.8. Ejercicios

1. Considere el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros ordenado por valor absoluto, es decir, $a \preceq b$ si y sólo si $|a| \leq |b|$. Demuestre que $(\mathbb{Z}, \preceq)$ es un conjunto preordenado que no es un poset.

2. Demuestre que $(\mathbb{Z}, \leq)$, con su orden natural es un poset, y que es también un conjunto dirigido.

3. Sobre un espacio topológico X, defínase $x \preceq y$ si y sólo si $x \in U$ para todo $U \in \mathcal{N}(y)$, donde $\mathcal{N}(y)$ denota el sistema de vecindades del punto $y \in X$. Demuestre que la relación definida es un preorden sobre los puntos de X.

   a) Proponga un ejemplo en el que este preorden no sea un orden parcial.

   b) Proponga un ejemplo en el que este preorden no sea una dirección.

4. Sea X un conjunto no vacío. Demuestre que 2^X, ordenado por cardinalidad, es un conjunto dirigido, y que es un poset.

5. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y defina $X = \{B \subseteq A | \#(B) \leq 3\}$. Demuestre que $(X, \subseteq)$ es un poset, pero no es una dirección.

6. Demuestre que $f : X \to Y$ es continua en x si y sólo si para toda red $s : D \to X$, convergente y que converge a x se tiene que $f \circ s$ es una red convergente a $f(x)$.

7. La función $f : X \to Y$ es continua, si y sólo si para toda red convergente s en X, la red $f \circ s$ es convergente en Y, de manera que si $s \to x$ entonces $f \circ s \to f(x)$.

8. Haga un listado de todos los filtros en el espacio de Sierpiński y determine sus límites. Encuentre redes inducidas por cada uno de tales filtros.

9. Demuestre que la imagen de un filtro es un filtro en la imagen. Es decir, sean $f : X \to Y$ una aplicación suprayectiva y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, entonces $f(\mathcal{F}) = \{f(A)|A \in \mathcal{F}\}$ es un filtro sobre Y. Discuta la preservación de la convergencia.

10. Demuestre que $\mathcal{N}(x)$ es un filtro que converge a x. Este filtro se conoce como el *filtro de vecindades* de x.

11. Demuestre que en un espacio topológico X, la colección $\mathcal{F} = \{A \subseteq X|x \in A\}$ es un filtro que converge a x.

12. Sea $(X, \preceq)$ un conjunto preordenado. Defina $a \sim b$ si y sólo si $a \preceq b$ y $b \preceq a$, y sobre $X/\sim$, defínase $[a] \leq [b]$ si y sólo si $a \preceq b$. Demuestre que $(X/\sim, \leq)$ es un poset.

13. Sean X un conjunto no vacío, y sobre los subconjuntos de él defínase $A \preceq B$ si y sólo si $B \subseteq A$. Demuestre que $(2^X, \preceq)$ es un conjunto dirigido. Demuestre que $(2^X, \subseteq)$ es un poset, y que no es totalmente ordenado.

14. Demuestre que si s está eventualmente en A, entonces está frecuentemente en A.

15. Demuestre que X es un espacio de Hausdorff si y sólo si toda red convergente en X tiene límite único.

16. Demuestre que X es un espacio de Hausdorff si y sólo si todo filtro convergente en X tiene límite único.

17. Demuestre que si x es un punto de acumulación de un filtro $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \to x$.

18. Sea $\mathcal{B}$ una *base de filtro* en un espacio topológico X. El *filtro generado* por $\mathcal{B}$ es la colección $\mathcal{F} = \{F \subseteq X|B \subseteq F$ para algún $B \in \mathcal{B}\}$. Se dice que $\mathcal{B} \to x$ si toda vecindad de x contiene un elemento de $\mathcal{B}$. Demuestre que $\mathcal{B} \to x$ si y sólo si $\mathcal{F} \to x$.

19. Sea $\mathcal{B} = \{(n, \infty) \subseteq \mathbb{R} | n \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{B}$ es una base de filtro, pero no es un filtro. Determine el filtro $\mathcal{F}$ generado por $\mathcal{B}$, y demuestre que ni $\mathcal{B}$ ni $\mathcal{F}$ son convergentes.

20. Sean $p, q \in \mathbb{R}^2$ dos puntos distintos. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los subconjuntos del plano euclidiano que contienen a ambos puntos. Demuestre que $\mathcal{F}$ es un filtro y que tanto p como q son puntos de acumulación de $\mathcal{F}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ no es convergente.

21. Un *ultrafiltro* es un filtro $\mathcal{U}$ si tiene la propiedad adicional de que si $A \cap F \neq \varnothing$ para todo $F \in \mathcal{U}$, entonces $A \in \mathcal{U}$. Un ultrafiltro es entonces un *filtro maximal*. Sea $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : [0, 1] \subseteq A\}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre $\mathbb{R}$, y que no es convergente. Encuentre un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que contenga propiamente a $\mathcal{F}$.

22. Sea $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} | \mathbb{Q} \subseteq A\}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre $\mathbb{R}$, y que no es convergente. Encuentre un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que contenga propiamente a $\mathcal{F}$.

23. Dada una red s, demuestre que $\mathcal{F}_s$ es un filtro.

24. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un espacio topológico X. Demuestre que $\mathcal{F} \to x$ si y sólo si $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$.

25. Demuestre que si $\mathcal{F} \to x$ entonces $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

26. Demuestre que todo filtro está contenido en un ultrafiltro.

27. Demuestre que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U} \to x$.

28. En $\mathbb{R}$ considere la base de filtro $\mathcal{B} = \{(n, \infty | n \in \mathbb{N}\}$ y sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por $\mathcal{B}$. Demuestre que ni $\mathcal{B}$ ni $\mathcal{F}$ son convergentes.

29. Un punto x es un punto de acumulación de una red $s : \mathcal{A} \to X$ si s está frecuentemente en cada vecindad de x. Demuestre que si x es un punto de acumulación de s entonces existe una subred t de s que converge a x.

30. Sea $\mathcal{D} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y definamos la relación $\preceq$ sobre $\mathcal{D}$ mediante $(m, n) \preceq (m', n')$ si y sólo si $m \leq m'$ y $n \leq n'$. Demuestre que $(\mathcal{D}, \preceq)$ es un conjunto dirigido. Demuestre que la red $s : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$s(m, n) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$$
converge a $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Considere el conjunto dirigido $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \{0\} \subset \mathcal{D}$, y demuestre que la red $t : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ dada por $t(n, m) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ no converge a $(0, 0)$ y además $(0, 0)$ no es punto de acumulación de t. ¿Es $\mathcal{E}$ cofinal en $\mathcal{D}$?.

31. Demuestre que todo filtro $\mathcal{F}$ es un conjunto dirigido por inclusión. Es decir, para $A, B \in \mathcal{F}$ se tiene que $A \preceq B$ si y sólo si $B \subseteq A$. Demuestre que para todo filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \to x$ existe una red $s : \mathcal{F} \to X$ tal que $s \to x$.

32. Demuestre que una red inducida por un ultrafiltro es maximal.

33. Demuestre que el filtro inducido por una red maximal es un ultrafiltro.

34. Discuta la relación entre los puntos de acumulación de redes y de filtros.

35. Demuestre que un ultrafiltro converge a cada uno de sus puntos de acumulación.

36. Demuestre que un conjunto es una vecindad de x si y sólo si pertenece a todo filtro que converge a x.

37. Sean $A \subseteq X$, y denotemos por $\mathfrak{F}_x$ la colección de los filtros en X que convergen al punto x. Defínase
$$B = \{x \in X | A \in \mathcal{F} \text{ para algún } \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x\}.$$
Demuestre que si $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y$ y $B \in \mathcal{G}$, entonces $y \in B$.

38. **La convergencia define la topología.** Sea X un conjunto, y denotemos mediante $\mathfrak{F}(X)$ la colección de todos los filtros definidos sobre X. Definamos la convergencia de filtros como sigue:

    a) Si $\{x\} \in \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(X)$, entonces $\mathcal{F} \to x$.

    b) Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}(X)$, si $\mathcal{F} \to x$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \to x$.

    c) Se satisface la condición del teorema anterior.

    Definamos ahora $U \subseteq X$ como una vecindad de $x \in X$, si y sólo si U pertecece a todo filtro que converge a x. Demuestre que esta noción de vecindad define una topología sobre X.

39. Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) f es continua en x.

    b) Si $\mathcal{F}$ es un filtro que converge a x, entonces la base de filtro $\mathcal{G}$ converge a $f(x)$ si $\mathcal{G} = \{f(F) | F \in \mathcal{F}\}$.

    c) Si $s : \mathcal{A} \to X$ es una red con $s \to x$, entonces $f \circ s \to f(x)$.

40. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Demuestre que $\mathcal{F} \to x$ si y sólo si para todo filtro $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ se tiene que $x \in \overline{E}$ para todo $E \in \mathcal{E}$.

41. Demuestre que un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio topológico X es un ultrafiltro si para todo $A \subseteq X$ se tiene que si $A \notin \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$.

42. Demuestre que un ultrafiltro converge a cada uno de sus puntos de acumulación, es decir, cada punto que está en la cerradura de cada elemento del ultrafiltro.

43. Sea $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado, y denótese por $\mathcal{P}(J)$ la colección de todas las subdivisiones finitas de J. Defina una dirección '$\preceq$' sobre $\mathcal{P}(J)$, de forma que $(\mathcal{P}(J), \preceq)$ sea un conjunto dirigido.

44. Sea $f : J \to \mathbb{R}$ una función seccionalmente continua. Para cada $\alpha \in \mathcal{P}(J)$ sean $\overline{S_\alpha(f)}$ y $\underline{S_\alpha(f)}$ las sumas de Riemann correspondientes. Demuestre que la colección

$$\mathcal{F} = \{F_{(\alpha,\beta)} | \alpha, \beta \in \mathcal{P}(J)\}$$

define un filtro sobre $\mathbb{R}$ donde

$$F_{(\alpha,\beta)} = \{y \in \mathbb{R} | \underline{S_\alpha(f)} \leq y \leq \overline{S_\beta(f)}\}.$$

45. Dada una función Riemann-integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, escriba

$$\int_a^b f(x)dx$$

como el límite de una red convergente en $\mathbb{R}$.

46. Dada una función Riemann-integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, escriba

$$\int_a^b f(x)dx$$

como el límite de un filtro convergente en $\mathbb{R}$.

Capítulo 7

Metrización

Todo espacio métrico es un espacio topológico, donde la topología es inducida por la métrica, es decir, los abiertos en ella son uniones de bolas; en consecuencia, las bolas constituyen una base para la topología de un espacio métrico. Suele decirse que esta topología es la *topología métrica*.

Cabe entonces preguntarnos por aquellos espacios topológicos, para los cuales existe una métrica que induce su topología. Es decir, por aquellas topologías que son topologías métricas para alguna métrica. Espacios topológicos tales, se dice que son metrizables, y dedicamos el presenta capítulo a la caracterización de ellos.

Es de sorprender que, en el empeño de clasificar los espacios topológicos metrizables nos topamos con un “espacio patrón”, de manera que todo espacio metrizable es homeomorfo con un subespacio de dicho espacio. Las nociones de regularidad y normalidad son cruciales en este proceso, de manera que nos dedicaremos al incio del capítulo a ellas, puesto que en el capítulo dedicado a la compacidad, nos quedamos en el enunciado de las definiciones; resta entonces desarrollar algunas de las propiedades de los espacios regulares y los espacios normales.

Las dos primeras secciones del presente capítulo revisan y profundizan lo expuesto en la sección 4.1 respecto de los axiomas de separación, teniendo la frescura de ideas como propósito.

7.1. Espacios regulares

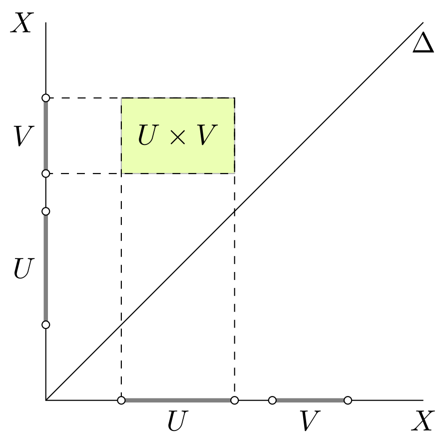
Iniciaremos la presente sección desarrollando algunas propiedades topológicas relativas a los axiomas de separación enunciados en el capítulo 4.

Proposición 7.1 *Un espacio X es de Hausdorff si y sólo si la diagonal*

$$\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$$

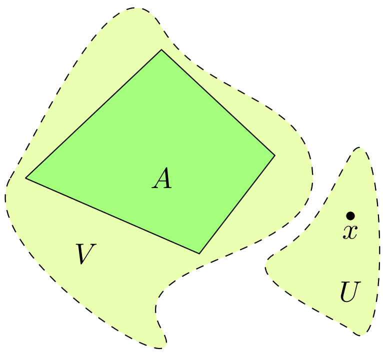
es cerrada en $X \times X$.

Demostración. Supóngase que X es T_2,y sea $(x, y) \notin \Delta$, si $U, V \subseteq X$ son abiertos abiertos ajenos que separan las cordenadas de(x, y), entonces $U \times V \subseteq X \times X$es abierto y $U \times V \cap \Delta = \varnothing$, pues de lo contrario, U y V tendrían puntos en común. ■



En realidad, todo producto de espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff, la demostración se considera un ejercicio.

Recordemos también que un espacio topológico X se dice *regular* si dados un cerrado A y un punto $x \notin A$ existen abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $A \subseteq V$. Se dice coloquialmente que un espacio regular es un espacio que “separa puntos de cerrados”. Un espacio que es regular y T_1 se llama T_3.



Ejemplo 7.1 *Regular y T_1 implica T_2, dado que en un T_1 los puntos son cerrados.* □

Ejemplo 7.2 *Un espacio indiscreto con al menos dos puntos es regular, pero no es T_3, dado que ni siquiera es T_0.* □

Ejemplo 7.3 *Sean $X = \mathbb{R}$, τ_E su topología euclidiana y*

$$\mathcal{B}_0 = \{(-\varepsilon, \varepsilon) - E | \varepsilon > 0\}$$

donde

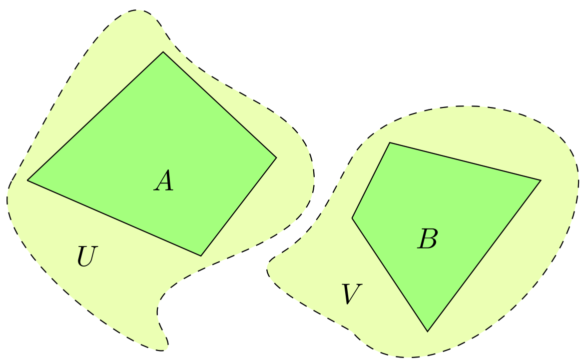
$$E = \left\{ \frac{1}{n+1} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Puede demostrarse con facilidad que $\mathcal{B} = \tau_E \cup \mathcal{B}_0$ es base para una topología τ sobre $\mathbb{R}$, además, como $\tau_E \subseteq \tau$, entonces τ es Hausdorff. Por otra parte, E es un cerrado que no puede separarse de 0, de manera que τ no es regular. □

Ejemplo 7.4 *La recta euclidiana y la recta de Sorgenfrey son ambos espacios regulares.* □

7.2. Espacios normales

Un espacio topológico X se dice *normal* si dados dos cerrados ajenos A y B existen abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Se dice que un espacio normal es un espacio que separa cerrados. Un espacio que es normal y T_1 se llama T_4.



Ejemplo 7.5 *Normal y T_1 implica regular.* $\square$

$$\begin{tikzcd}
T_4 \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & T_3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & T_2 \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \arrow[r, Rightarrow] & T_0 \\
\text{Normal} & & \text{Regular} & & &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 7.6 *Los axiomas de separación son hereditarios a subespacios.* $\square$

Ejemplo 7.7 *Claramente todo espacio discreto es normal y T_1, de manera que es T_4.* $\square$

Ejemplo 7.8 *Consideremos $X = \mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos de la forma $(-\infty, x)$. Este espacio es normal por vacuidad, dado que no existen pares de cerrados ajenos no vacíos. Este espacio no es regular ni Hausdorff, dado que tampoco hay pares de abiertos ajenos y no vacíos. Finalmente, este espacio no es T_1: si $x < y$ además de que $x < \delta < y$, entonces $x \in (-\infty, \delta)$ pero $y \notin (-\infty, \delta)$; no obstante, todo abierto que contiene a y también contiene a x.* $\square$

Ejemplo 7.9 *Consideremos el cojunto $X = \{x, y, z\}$ dotado con la topología $\tau = \{X, \varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$. Este espacio es normal, dado que todos los cerrados no vacíos contienen al punto z. No es regular, dado que no existen abiertos ajenos que contengan, uno al punto x y otro al cerrado $\{z\}$. Por la misma razón este espacio no es T_1.* $\square$

Ejemplo 7.10 *Consideremos el conjunto $X = \{x, y, z\}$ y definamos sobre él la topología $\tau = \{X, \varnothing, \{x\}, \{y, z\}\}$. El conjunto de los cerrados en este espacio es $\{X, \varnothing, \{x\}, \{y, z\}\}$. Este espacio es normal y es regular pero no es T_1dado que no existe un abierto que contenga a z y no contenga a y.* $\square$

Ejemplo 7.11 *Denotemos por $\mathbb{R}_S$ la recta de Sorgenfrey, es decir, la recta real con la topología del límite inferior. Si $A \subset \mathbb{R}_S$ es un cerrado y $x \notin A$, por definición existe un abierto básico $[a, b)$ tal que $x \in [a, b)$ y además $[a, b) \cap A = \varnothing$. Por otra parte es claro que*

$$U = [a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$$

es un abierto tal que $A \subseteq U$ y $U \cap [a, b) = \varnothing$, de manera que $\mathbb{R}_I$ es regular. Sin embargo, este espacio no es normal, puesto que para $a < b < c$, los intervalos $(a, b]$ y $(b, c]$ son cerrados ajenos, y si $b \in [x, y)$, entonces necesariamente $(a, b] \cap [x, y) \neq \varnothing$ y también $(b, c] \cap [x, y) \neq \varnothing$. $\square$

Teorema 7.2 *Todo espacio métrico es normal.*

Demostración. Sean A y B cerrados ajenos en un espacio métrico (X, d). Notemos que $d(x, B) > 0$ y $d(y, A) > 0$ para $(x, y) \in A \times B$. Definamos entonces $\varepsilon(x) = \frac{1}{3}d(x, B)$ y $\delta(y) = \frac{1}{3}d(y, A)$ para $(x, y) \in A \times B$, además de

$$U = \bigcup_{x\in A} B_{\varepsilon(x)}(x)$$

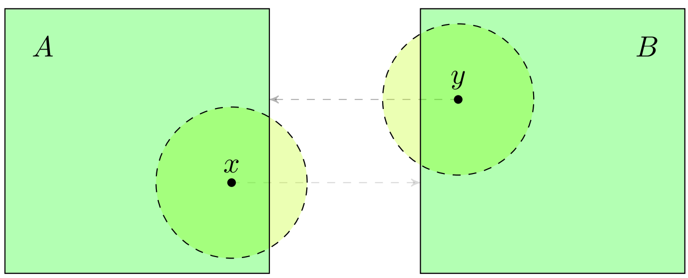
y

$$V = \bigcup_{y\in B} B_{\delta(y)}(y)$$

que satisfacen claramente $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Resta demostrar que $U \cap V = \varnothing$. Si suponemos que $z \in U \cap V$, entonces existe $x \in A$ tal que $d(x, z) < \varepsilon(x)$ y también existe $y \in B$ tal que $d(y, z) < \delta(y)$. Supongamos que $d(y, z) \leq d(x, z)$, entonces

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \leq 2d(x, z) < 2\varepsilon(x) < d(x, B),$$

lo cual es claramente contradictorio. ■



Los dos resultados siguientes serán de utilidad en la demostración del lema de Urysohn.

Lema 7.3 *El espacio topológico X es normal si y sólo si para todo par de cerrados A y B existe un abierto U tal que $A \subseteq U$ y $\overline{U} \cap B = \varnothing$.*

Demostración. Sean A y B dos cerrados ajenos y no vacíos en el espacio X. Supóngase primero que X es normal y sean U y V abiertos ajenos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, entonces V^c es cerrado y $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V^c$; entonces

$$\overline{U} \cap B \subseteq \overline{U} \cap V = \varnothing$$

con lo que se demuestra la primera implicación. Para demostrar el recíproco, sea U abierto tal que $A \subseteq U$ y $\overline{U} \cap B = \varnothing$, entonces basta hacer $V = \overline{U}^c$. ■

Lema 7.4 *El espacio topológico X es normal si y sólo si para todo cerrado A y todo abierto W tal que $A \subseteq W$ y existe una abierto U tal que*

$$A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W.$$

Demostración. Supóngase primero que X es normal y sean un cerrado A y un abierto W tales que $A \subseteq W$, entonces $B = W^c$ es un cerrado ajeno con A y usando el lema anterior tomamos un abierto U tal que $A \subseteq U$ y $\overline{U} \cap B = \varnothing$, lo cual es equivalente con $\overline{U} \subseteq W$. Recíprocamente, si A y B son dos cerrados ajenos y no vacíos, entonces $W = B^c$ es un abierto que contiene a A. ■

7.3. El lema de Urysohn

La demostración del lema de Urysohn[1] descansa sobre un hecho particularmente elemental y significativo: el conjunto de los números diádicos es denso en la recta real. Un *número diádico* es un número de la forma

$$\frac{t}{2^k}$$

para $t, k \in \mathbb{Z}$. Denotamos por D el conjunto de los números diádicos en $I = [0, 1]$.

Lema 7.5 *Si D el conjunto de los números diádicos en $I = [0, 1]$, entonces $\overline{D} = I$.*

Demostración. Notemos en primer lugar que 0 y 1 sin diádicos, por lo que basta demostrar que todo intervalo de la forma

$$\left(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$$

[1]Pavel Samuilovich Urysohn (1898 - 1924), matemático ruso de origen judío, que destacó por sus contribuciones a la Teoría de la Dimensión.

contiene números diádicos. Usando la propiedad arquimediana elegimos $k \in \omega$ tal que

$$\frac{1}{2^k} < \frac{1}{n}$$

y notemos que el conjunto

$$A = \left\{ s \in \omega \,\middle|\, \frac{s}{2^{k+1}} > \frac{m}{n} \right\}$$

es no vacío, de manera que si $t = \min(A)$, entonces

$$\frac{m}{n} < \frac{t}{2^{k+1}} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{m}{n} + \frac{1}{2n} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} = \frac{m+1}{n}$$

que demuestra lo afirmado. ■

Lema 7.6 *Sean X un conjunto, $D \subseteq I$ un subespacio denso y*

$$\mathcal{U} = \{U_t | t \in D\} \subseteq 2^X$$

una cubierta de X tal que de $t < s$ se sigue que $U_t \subset U_s$, entonces para la función $f : X \to I$ dada por $f(x) = \inf\{t \in D | x \in U_t\}$ se satisface:

$$f^{-1}[0, s) = \bigcup_{t<s} U_t \quad y \quad f^{-1}[0, s] = \bigcap_{t>s} U_t$$

para todo $s \in I$.

Demostración. Si $f(x) \in [0, s)$, entonces para $0 < f(x) < t < s$ se tiene que $x \in U_t$. Por otra parte, si $x \in U_t$ para algún $t < s$, entonces $f(x) \leq t < s$ de donde $f(x) \in (0, s)$ con lo que queda demostrada la primera igualdad. Supongamos ahora que $f(x) \in [0, s]$, entonces $x \in U_t$ para todo $t > s$ y recíprocamente, si $x \in U_t$ para todo $t > s$ entonces $f(x) \in [0, s]$ con lo que se completa la demostración. ■

Lema 7.7 *Sean X un espacio topológico, $D \subseteq I$ un subespacio denso y*

$$\mathcal{U} = \{U_t | t \in D\} \subseteq 2^X$$

una cubierta abierta de X tal que de $t < s$ se sigue que $\overline{U_t} \subset U_s$, entonces la función $f : X \to I$ dada por $f(x) = \inf\{t \in D | x \in U_t\}$ es continua.

Demostración. Basta denostrar que la preimagen de todo sub-básico es abierto. Por el lema anterior, es claro que $f^{-1}[0,s) \subseteq X$ es abierto. Para demostrar que $f^{-1}(s,1]$ es abierto basta demostrar que $f^{-1}[0,s]$ es cerrado, para ello es suficiente demostrar que

$$\bigcap_{t>s} U_t = f^{-1}[0,s] = \bigcap_{t>s} \overline{U_t}.$$

Una contensión es clara, dado que $U_t \subseteq \overline{U_t}$ para todo $t \in D$. Por otra parte, para $t > s$ tomemos $r \in D$ con $t > r > s$, entonces $\overline{U_r} \subseteq U_t$, de donde se sigue la otra contención. ■

Con los elementos previos podemos atacar la demostración del conocido lema de Urysohn.

Teorema 7.8 (Lema de Urysohn) *Un espacio topológico X es normal si y sólo si para dos cerrados ajenos y no vacíos $A, B \subset X$ existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $A \subseteq f^{-1}(0)$ y $B \subseteq f^{-1}(1)$.*

Demostración. Una función con la propiedad descrita se conoce como *función de Urysohn*. Claramente si una función de Urysohn f existe para dos cerrados ajenos y no vacíos cualesquiera, entonces el espacio X es normal, dado que por continuidad, las preimágenes de $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{2}{3}, 1\right]$ son abiertos ajenos que contienen a A y B respectivamente. Demostraremos el recíproco: sean $A, B \subset X$ dos cerrados ajenos y no vacíos, por la normalidad de X elijamos un abierto $U_{\frac{1}{2}}$ tal que

$$A \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq B^c.$$

Procediendo inductivamente, para cada *número diádico*, es decir, cada elemento p en

$$D = \left\{ \frac{n}{2^m} \,\middle|\, 0 < n < 2^m;\ n, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

se define un abierto U_p tal que si $t, s \in D$ y $t < s$, entonces

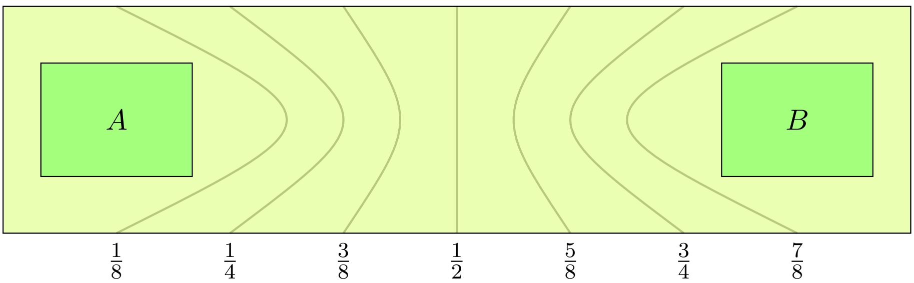
$$A \subseteq U_t \subseteq \overline{U_t} \subseteq U_s \subseteq \overline{U_s} \subseteq B^c.$$

La función $f : X \to [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \text{ínf}\{t \in D | x \in U_t\}$$

es claramente continua por el lema anterior, dado que $\overline{D} = [0, 1]$, y además, si $a \in A$ entonces $a \in U_t$ para todo $t \in D$, de manera que $f(a) = 0$. Finalmente, para $b \in B$ se tiene que $b \notin U_t$ para todo $t \in D$, y en consecuencia $f(b) = 1$. ■

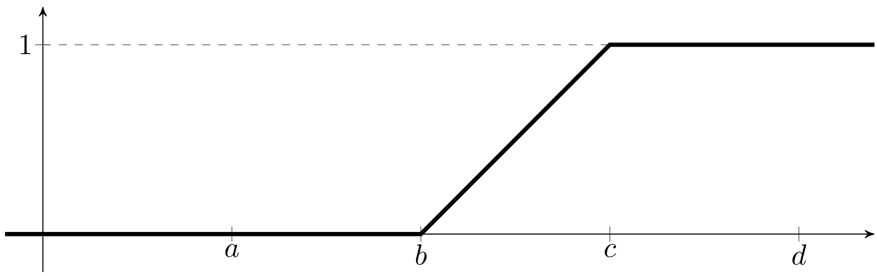
Debe notarse que la demostración previa se construye a partir de una función $F : D \to \tau_X$ definida mediante $F(t) = U_t$.



Ejemplo 7.12 *Con la topología euclidiana, la recta real $\mathbb{R}$ es un espacio topológico normal, y es de hecho T_4. Consideremos los cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$ para $a \leq b < c \leq d$. Una función de Urysohn $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ queda definida como*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para} \quad x \leq b \\ \frac{x-b}{c-b} & \textit{para} \quad b < x < c \\ 1 & \textit{para} \quad c \leq x \end{cases}$$

ya que es claramente continua. □



Ejemplo 7.13 *Denotemos por* $\mathbb{R}_S$ *la recta de Sorgenfrey, es decir, la recta real con la topología del límite inferior, espacio que claramente no es normal, puesto que para los cerrados ajenos* $(a, b]$ *y* $(b, c]$ *no es posible encontrar abiertos ajenos que los separen. Sea una* $f : \mathbb{R}_S \to [0, 1]$ *una función, si* f *fuese continua, entonces* $f^{-1}[0, \frac{1}{2})$ *y* $f^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ *serían dos abiertos ajenos que separan loa cerrados dados.* $\square$

Ejemplo 7.14 *Consideremos los cerrados* $(-\infty, 0]$ *y* $[1, \infty)$ *en* $\mathbb{R}_S$*, notamos que, a pesar de que* $\mathbb{R}_S$ *no es normal, la función* $f : \mathbb{R}_S \to [0, 1]$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para} \quad x \leq 0 \\ x & \textit{para} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \textit{para} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

es una función de Urysohn para los cerrados dados. $\square$

El lema de Urysohn es un lema porque es un paso previo para la demostración del teorema de metrización de Urysohn, la cual consiste en encontrar un subespacio del cubo de Hilbert[2], que es homeomorfo con el espacio dado.

[2]David Hilbert (1862 - 1943), matemático alemán, altamente influyente en la comunidad matemática. Propuso 23 problemas que orientaron la investigación matemática en el siglo XX.

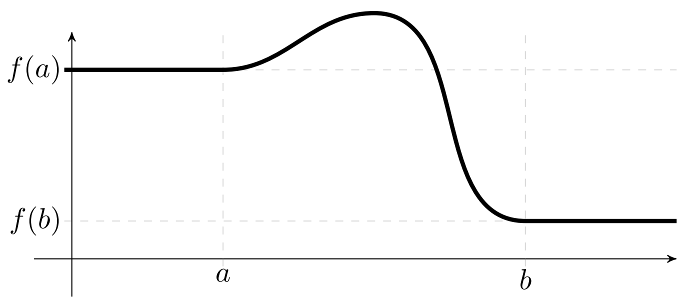
7.4. El teorema de extensión de Tietze

El teorema de extensión de Tietze[3] resuelve un problema de extensión como su nombre lo indica, y antes de avanzar hacia su demostración consideraremos algunos ejemplos para tener una idea clara de su alcance e importancia.

Ejemplo 7.15 *Consideremos una función continua $f : [a, b] \to [0, 1]$. Claramente, podemos extender f continuamente a $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ como sigue:*

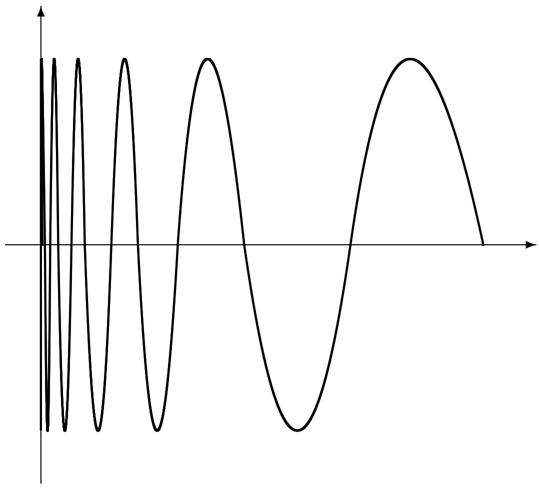
$$F(x) = \begin{cases} f(0) & \textit{para} \quad x \leq a \\ f(x) & \textit{para} \quad a \leq x \leq b \\ f(1) & \textit{para} \quad b \leq x \end{cases}$$

Esto es posible por que $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es cerrado y $\mathbb{R}$ es normal con la topología euclidiana. $\square$



Ejemplo 7.16 *La función $f : (0, 1] \to [-1, 1]$ dada por $f(x) = \sin \frac{2\pi}{x}$ es continua, dado que es composición de continuas, si se considera al intervalo $(0, 1]$ como subespacio de la recta real con la topología euclidiana. Se verifica con facilidad que no existe una manera continua de extender f a una función $F : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Aunque $\mathbb{R}$ es un espacio normal, ciertamente $(0, 1]$ no es cerrado en $\mathbb{R}$.* $\square$

[3]Heinrich Franz Friedrich Tietze (1880 - 1964), matemático austriaco, destacado además por su trabajo algebraico en Presentaciones de Grupos.



Ejemplo 7.17 *Consideremos ahora la función* $f : [0,1) \to [-1,1]$ *dada ahora por* $f(x) = \sin \frac{2\pi}{1-x}$ *y consideremos además al intervalo* $[0,1)$ *como subespacio de la recta real con la topología del límite inferior* $\mathbb{R}_S$*. La topología del límite inferior es más fina que la topología euclidiana, de manera que la función dada es todavía continua. El intervalo* $[0,1)$ *es abierto y cerrado en* $\mathbb{R}_S$*, espacio que no es normal, por lo que no existe una extensión continua* $F : \mathbb{R} \to [-1,1]$*, de acuerdo con el teorema de extensión de Tietze.*
$\square$

El teorema que nos ocupa tiene una demostración un tanto técnica, por lo que conviene seccionarla, y para ello usaremos dos lemas previos.

Lema 7.9 *Sean* X *un espacio topológico normal,* $A \subseteq X$ *un cerrado y* $f : A \to [-b,b]$ *una función continua para* $b \in (0,1)$*. Entonces existe una función continua* $h : X \to [-\frac{b}{3}, \frac{b}{3}]$ *tal que*

$$|f(a) - h(a)| \leq \frac{2b}{3}$$

para todo $a \in A$*.*

Demostración. Denotemos

$$A_0 = f^{-1}\left[-b, -\frac{b}{3}\right] \quad \text{y} \quad B_0 = f^{-1}\left[\frac{b}{3}, b\right],$$

que son claramente cerrados por continuidad y definamos

$$h : X \longrightarrow \left[-\frac{b}{3}, \frac{b}{3}\right]$$

una función de Urysohn para los cerrados A_0 y B_0. La función

$$f_1 = f - h : A \longrightarrow \left[-\frac{2b}{3}, \frac{2b}{3}\right]$$

es claramene continua y tiene la imagen indicada, dado que:

1. Sobre A_0 se tiene que $-b \leq f(x) \leq -\frac{b}{3}$ y $h(x) = -\frac{b}{3}$, de donde

$$-\frac{2b}{3} = -b + \frac{b}{3} \leq f(x) - h(x) = f(x) + \frac{b}{3} \leq -\frac{b}{3} + \frac{b}{3} = 0.$$

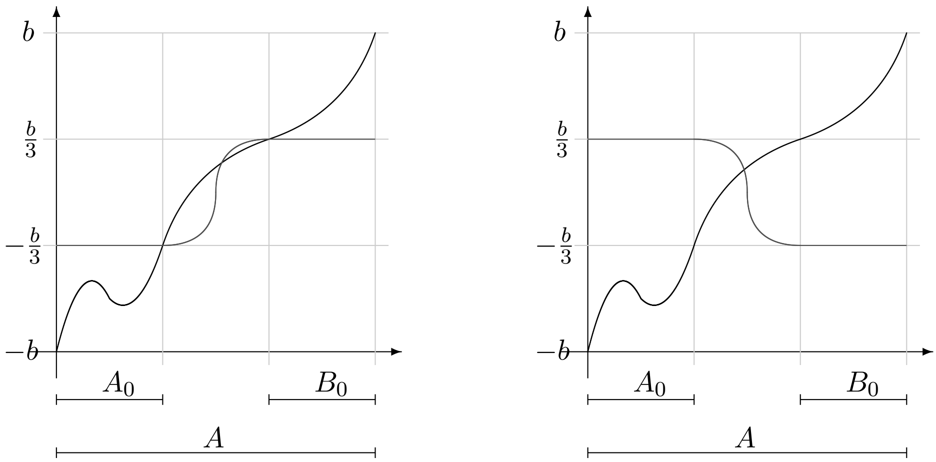
2. Sobre B_0, se tiene que $\frac{b}{3} \leq f(x) \leq b$ y $h(x) = \frac{b}{3}$, de donde

$$0 = \frac{b}{3} - \frac{b}{3} \leq f(x) - h(x) = f(x) - \frac{b}{3} \leq b - \frac{b}{3} = \frac{2b}{3}.$$

3. Sobre $A - (A_0 \cup B_0)$ se tiene $-\frac{b}{3} \leq f(x), h(x) \leq \frac{b}{3}$ de donde

$$-\frac{2b}{3} \leq f(x) - h(x) \leq \frac{2b}{3}.$$

En todo caso, la imagen de $f_1 = f - h$ sobre A es efectivamente $\left[-\frac{2b}{3}, \frac{2b}{3}\right]$ como se afirmó. ■



Lema 7.10 *Sean X un espacio topológico y (g_k) una sucesión de funciones continuas*

$$g_k : X \longrightarrow \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2b}{3}\right)^k, \frac{1}{3}\left(\frac{2b}{3}\right)^k \right],$$

donde $b \in (0,1)$, entonces la función $F : X \to [-1,1]$ dada por

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} g_k$$

está bien definida y es continua.

Demostración. Notemos en primer lugar que $|g_k(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2b}{3})^k$ y por el criterio de comparación la serie dada es convergente, dado que es absolutamente convergente, por lo que F está bien definida sobre todo X.

$$|F| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x)| \leq \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1$$

Si se demuestra que la convergencia es uniforme, tendremos entonces la continuidad de F. Denotemos ahora

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grande para que $|G_n(x) - G_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para toda $k \geq n$. Entonces $|F(x) - G_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Por continuidad, para cada $x_0 \in X$ tenemos un abierto $U \in \mathcal{N}(x_0)$ tal que para todo $x \in U$ se satisface

$$|F(x) - F(x_0)| \leq |F(x) - G_n(x)| + |G_n(x) - G_n(x_0)| + |G_n(x_0) - F(x_0)| < \varepsilon$$

con lo que se completa a demostración. ∎

Teorema 7.11 (Teorema de extensión de Tietze) *Un espacio X es normal si y sólo si para todo cerrado no vacío $A \subseteq X$ y toda función continua $f : A \to [-1,1]$, existe una función continua $F : X \to [-1,1]$ tal que $F|_A = f$.*

Demostración. Si la extensión existe para todo cerrado A toda función continua $f : A \to [-1,1]$, consideremos dos cerrados ajenos no vacíos A_1 y A_2. Notemos que $A = A_1 \cup A_2$ es cerrado en X y definamos una función $f : A \to [-1,1]$ mediante:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad x \in A_1 \\ 1 & \text{para} \quad x \in A_2 \end{cases}$$

Esta es claramente continua, y su extensión F una función de Urysohn, de manera que X es normal. Recíprocamente, supóngase que X es normal y sean $A \subseteq X$ cerrado y $f = f_0 : A \to [-1,1]$ continua. Denotemos

$$A_0 = f_0^{-1}\left[-1, -\frac{1}{3}\right] \qquad \text{y} \qquad B_0 = f_0^{-1}\left[\frac{1}{3}, 1\right],$$

que son claramente cerrados por continuidad. Sea

$$g_0 : X \longrightarrow \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

una función de Urysohn para los cerrados A_0 y B_0. La función

$$f_1 = f_0 - g_0 : A \longrightarrow \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

es claramene continua y tiene la imagen indicada, como se ha demostrado previamente. Denotemos

$$A_1 = f_1^{-1}\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\right] \quad \text{y} \quad B_1 = f_1^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right), \frac{2}{3}\right],$$

que son claramente cerrados por continuidad. Sea ahora

$$g_1 : X \longrightarrow \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right), \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

una función de Urysohn para los cerrados A_1 y B_1. Nuevamente, la función

$$f_2 = f_1 - g_1 = f_0 - (g_0 + g_1) : A \longrightarrow \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$$

es continua y tiene la imagen que se indica. Procediendo inductivamente, encontramos una sucesión de funciones (g_k) donde

$$g_k : X \longrightarrow \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right]$$

es una función de Urysohn para los cerrados

$$A_k = f_k^{-1}\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^k, -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right] \quad \text{y} \quad B_k = f_k^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k, \left(\frac{2}{3}\right)^k\right],$$

para

$$f_k = f_{k-1} - g_{k-1} = f_0 - (g_0 + g_1 + \ldots + g_{k-1}) : A \longrightarrow \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^k, \left(\frac{2}{3}\right)^k\right].$$

Encontramos así una sucesión (g_k) una sucesión de funciones continuas

$$g_k : X \longrightarrow \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2b}{3}\right)^k, \frac{1}{3}\left(\frac{2b}{3}\right)^k\right],$$

de manera que por el lema previo, la función $F : X \to [-1, 1]$ dada por

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} g_k$$

está bien definida, es continua y además extiende a f, dado que

$$|f_k(x)| = |f(x) - (g_0(x) + \ldots + g_k(x))\,| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

para todo $x \in A$ y todo $k \in \omega$, de donde

$$|f(x) - F(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

para todo $x \in A$ y todo $k \in \omega$, con lo que finalmente $f(x) = F(x)$ para todo $x \in A$. ■

Ejemplo 7.18 *Denotemos por $\mathbb{R}_D$ la recta real con la topología discreta, el cual es normal y en el cual $(a, b]$ es cerrado para $a < b$. Es claro que toda función $f : [a, b] \to [-1, 1]$ es continua y cualquier función $F : \mathbb{R}_D \to [-1, 1]$ con $F|_{[a,b]} = f$ es una extensión continua de f.* □

7.5. El cubo de Hilbert

El *cubo de Hilbert* se define como el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es el producto numerable

$$H = \prod_{k \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{2^k}\right]$$

y cuya topología es la topología producto. El cubo de Hilbert es un espacio métrico en virtud del teorema anterior. Por otra parte, es claro que el intervalo $I = I_0 = [0, 1]$ es puede identificarse, en tanto que conjunto con el intervalo $I_k = [0, \frac{1}{2^k}]$ para todo $k \in \mathbb{N}$; veremos posteriormente que son en realidad homeomorfos. Entonces, el cubo de Hilbert H es homeomorfo con el producto de una cantidad numerable de copias del intervalo unitario cerrado I. Equivalentemente, el cubo de Hilbert es homeomorfo con el espacio de funciones $I^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to I\}$, es decir, el espacio de todas las sucesiones en I.

El cubo de Hilbert es claramente 2°-numerable, dado que es un producto de espacios cada uno de los cuales es 2°-numerable. Además es Hausdorff, como consecuencia de que es un espacio métrico cuya métrica dada por

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$$

y es la métrica euclidiana sobre cada subespacio de dimensión finita. Notemos que la serie del radicando es además convergente, ya que

$$d(x,y) \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}} = \sqrt{2}.$$

Como se observa con claridad, todo subespacio de un espacio métrico es a su vez un espacio métrico. En consecuencia, una forma más o menos habitual de verificar que un espacio topológico dado X es metrizable consiste en encontrar un subespacio de H que sea homeomorfo con X. El teorema de metrización de Urysohn requiere de algunos resultados previos.

7.6. Normalidad y Lindelöf

Recordemos que un espacio topológico X es un *espacio de Lindelöf*[4] si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta numerable.

Lema 7.12 *Todo espacio* 2°*-numerable es de Lindelöf.*

[4]Ernst Leonard Lindelöf (1870 - 1946), matemático finlandés.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X y sea $\mathcal{B} = \{B_k | k \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para la topología de X. Claramente $\mathcal{B}$ es una cubierta numerable para X. Para cada $k \in \mathbb{N}$, elijamos un $U_k \in \mathcal{U}$ tal que $B_k \subseteq U_k$, tenemos entonces que la subcolección $\{U_k | k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ es una subcubierta numerable. ∎

Teorema 7.13 *Todo espacio regular y de Lindelöf es normal.*

Demostración. Sean $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$ dos cerrados ajenos en un espacio regular y Lindelöf X. Usando la regularidad, para cada $x \in A$ elijamos una vecindad abierta $U_x \in \mathcal{N}(x)$ tal que $\overline{U_x} \cap B = \varnothing$. Claramente la colección $\mathcal{U}$ de estas vecindades es una cubierta de A, y procediendo análogamente encontramos para B una cubierta abierta numerable $\{V_y | y \in B\}$ tal que $\overline{V_y} \cap A = \varnothing$ para todo $y \in B$. Tenemos así que $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \cup \{A^c \cup B^c\}$ es una cubierta abierta para X, de la cual elegimos una subcubierta numerable. Obtenemos de esta manera una sucesión de abiertos $\{U_k | k \in \mathbb{N}\}$ que es una cubierta para A y que satisface $\overline{U_k} \cap B = \varnothing$ y también una sucesión de abiertos $\{V_k | k \in \mathbb{N}\}$ que es una cubierta para B y que satisface $\overline{V_k} \cap A = \varnothing$. Definamos ahora

$$U'_k = U_k - \bigcap_{i=0}^{k} \overline{V_i} \quad \text{y} \quad V'_k = V_k - \bigcap_{i=0}^{k} \overline{U_i}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado que $U'_k \cap V_i = \varnothing$ para todo $i \leq k$ y también $V'_k \cap U_i = \varnothing$ para todo $i \leq k$, entonces $U'_k \cap V'_k = \varnothing$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Consecuentemente $U \cap V = \varnothing$ donde

$$U = \bigcup_{k \in \omega} U'_k \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V'_k$$

y además $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. ∎

Corolario 7.14 *Todo espacio regular y* 2°*-numerable es normal.*

Demostración. Basta notar que es Lindelöf. ∎

7.7. El teorema de metrización de Urysohn

Previo a la demstración del impresionante teorema de metrización necesitaremos algunos resultados elementales. Una función $f : X \to Y$ se dice que es *secuencialmente continua* en $x \in X$ si para toda sucesión convergente $x_n \to x$ se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.

Proposición 7.15 *Toda función continua es secuencialmente continua.*

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua y sea (x_n) una sucesión en X tal que $x_n \to x \in X$. Si $V \in \mathcal{N}(f(x))$, entonces por continuidad $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$ y entonces $x_n \in U$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$, de manera que $f(x_n) \in V$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$ como queríamos demostrar. ∎

Proposición 7.16 *Si X es T_1, 1°-numerable y $f : X \to Y$ es secuencialmente continua, entonces es continua.*

Demostración. Supongamos continuidad secuencial y tomemos $x \in X$ y una base local numerable $\mathcal{B}_x = \{G_1, \ldots, G_n, \ldots\}$. Suponiendo que f no es continua en $x \in X$, sea $V \in \mathcal{N}(f(x))$ tal que $f^{-1}(V)$ no sea una vecindad de x, entonces G_k no está completamente contenido en $f^{-1}(V)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y en consecuencia podemos elegir, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$x_k \in G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_k \cap f^{-1}(V)^c,$$

formando una sucesión (x_k) tal que $x_k \to x$, de manera que por hipótesis $f(x_k) \to f(x)$ por lo que $f(x_k) \in V$ para casi todo $k \in \mathbb{N}$ de donde $x_k \in f^{-1}(V)$ para casi todo $k \in \mathbb{N}$ contrariamente a la elección de x_k. ∎

Teorema 7.17 (Teorema de metrización de Urysohn) *Todo espacio regular, T_1 y 2°-numerable es metrizable.*

Demostración. La argumentación consiste en demostrar que X es homeomorfo con un subespacio del cubo de Hilbert, y si X es finito no hay nada que demostrar. Supongamos que X es infinto y elijamos una base numerable $\mathcal{B} = \{U_k | k \in \mathbb{N}_+\}$ de manera que $X \neq U_k$ para todo k. Por normalidad, para todo $U_j \in \mathcal{B}$ existe $U_i \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{U_i} \subseteq U_j$, numeremos entonces los pares $P_n = (U_{i_n}, U_{j_n})$ tales que $\overline{U_{i_n}} \subseteq U_{j_n}$, lo que implica que $\overline{U_{i_n}}$ y $U_{j_n}^c$ son cerrados ajenos. Usando el lema de Urysohn elijamos para cada par P_n una función $f_n : X \to [0,1]$ tal que $f_n(x) = 0$ para $x \in \overline{U_{i_n}}$ y $f_n(x) = 1$ para $x \in U_{j_n}^c$. Si H denota el cubo de Hilbert, definamos $f : X \to H$ mediante

$$f(x) = \left(\frac{f_n(x)}{2^n}\right) \in H$$

dado que que claramente satisface

$$\frac{f_n(x)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Demostraremos ahora que f es inyectiva. En efecto, si $x, y \in X$ son dos puntos distintos, dado que X es T_1, podemos encontrar un abierto básico U_j tal que $x \in U_j$ pero $y \notin U_j$, y usando al normalidad encontramos un abierto básico U_i tal que $x \in \overline{U_i} \subseteq U_j$, es decir, existe $m \in \mathbb{N}_+$ tal que $P_m = (U_i, U_j)$ de forma que $\overline{U_i}$ y U_j^c son cerrados ajenos con $y \in U_j^c$ y $x \in \overline{U_i}$, por consiguiente $f_m(x) = 1$ y $f_m(y) = 0$ de donde $f(x) \neq f(y)$ mostrando la inyectividad.

Demostraremos enseguida que f es continua en x_0. Notemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f(x), f(x_0))^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f_n(x) - f_n(x_0))^2}{2^{2n}} + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Ahora bien, como cada f_n es continua, para cada $n \in \mathbb{N}_+$ existe una abierto $U_n \in \mathcal{N}(x_0)$ tal que si $x \in U_n$ entonces

$$(f_n(x) - f_n(x_0))^2 < \frac{\varepsilon^2}{2N}.$$

Tenemos entonces que $U = U_1 \cap \ldots \cap U_N$ es una vecindad abierta de x_0 y es tal que si $x \in U$ entonces

$$d(f(x), f(x_0))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_n(x) - f_n(x_0))^2}{2^{2n}} < N\left(\frac{\varepsilon^2}{2N}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

demostrando la continuidad.

Resta demostrar finalmente que si $Y = f(X) \subseteq H$, entonces la inversa $f^{-1} : Y \to X$ es también continua. Observando que dado que Y es T_1 y 2°-numerable, entonces continuidad secuencial implica continuidad por el lema previo. Sea $f(x_n)$ una sucesión en Y tal que $f(x_n) \to f(x)$, y supongamos que x_n no converge a x. Existe entonces una vecindad $U \in \mathcal{N}(x)$ que $x_n \notin U$ para una cantidad infinita de valores de n, de manera que podemos encontrar una subsucesión y_n de x_n tal que $y_n \notin U$ para todo n. Sea U_k un abierto básico tal que $x \in U_k \subseteq U$ y elijamos un par $P_m = (U_q, U_k)$ tal que $x \in \overline{U_q} \subseteq U_k \subseteq U$ de tal suerte que $y_n \in U_k^c$ para todo n. De acuerdo con lo anterior $f_m(x) = 0$ y $f_m(x_n) = 1$ para todo n, con lo que

$$(f_m(x_n) - f_m(x))^2 = 1$$

y en consecuencia

$$d(f(x_n), f(x))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f_k(x_n) - f_k(x))^2}{2^{2k}} > \frac{1}{2^{2m}}$$

de manera que

$$d(f(x_n), f(x)) > \frac{1}{2^m}.$$

Tenemos entonces que la sucesión $f(x_n)$ no converge a x contrariamente a lo supuesto y con ello completamos la demostración. ■

7.8. Ejercicios

1. Demuestre que el producto arbitrario de espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.

2. Sea X un conjunto infinto con la topología cofinita, y sea $(x_n | n \in \mathbb{N})$ una sucesión tal que $x_n \neq x_m$ siempre que $n \neq m$. Determine si la sucesión dada es o no convergente, y en tal caso, determine el conjunto de sus puntos límite.

3. Demuestre que todo espacio topológico T_1 e infinito es discreto.

4. Sean X un espacio topológico X, $A \subseteq X$ un subespacio y $x \in X$ un punto. Demuestre que si existe una sucesión (x_n) en A tal que $x_n \to x$, entonces $x \in \overline{A}$. Encuentre un contraejemplo para el recíproco.

5. Sean X un espacio 1°-numerable, $A \subseteq X$ un subespacio y $x \in \overline{A}$, entonces, existe una sucesión X_n en X tal que $x_n \to x$.

6. Demuestre que la recta de Michael $\mathbb{R}_M$ es normal.

7. Demuestre que la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ es normal.

8. Demuestre que el plano de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ no es normal. Observe que es suficiente encontrar un par de cerrados ajenos que no puedan ser separados pos abiertos ajenos.

9. Sean X un espacio T_3 y $A \subseteq X$ un subespacio cerrado. Demuestre que X/A es T_2.

10. Encuentre un espacio T_1 en el que no todo compacto es cerrado.

11. Demuestre que si X_1 y X_2 son ambos T_0, entonces $X_1 \times X_2$ es T_0.

12. Demuestre que si Y es T_0 y X es indiscreto, entonces $X \times Y$ es T_0.

13. Sea $f : X \to Y$ una aplicación inyectiva y continua. Demuestre que si Y es T_2, entonces X es T_2.

14. Suponga que (X, τ) es un espacio T_0 y que τ' es una topología sobre X más fina que τ. Demuestre que (X, τ') es T_0. Demuestre la propiedad análoga para espacios T_1 y T_2.

15. Demuestre que si X es T_1 y $A \subseteq X$ es finito, entonces $A' = \varnothing$.

16. Demuestre que en un espacio T_1, todo conjunto conexo con más de un punto es necesariamente infinito.

17. Demuestre que para cada conjunto $X \neq \varnothing$ existe una única topología mínima τ, tal que (X, τ) es T_1.

18. Suponga que (X, τ_1) es de Hausdorff, que (X, τ_2) es compacto, y que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Demuestre que $\tau_1 = \tau_2$.

19. Suponga que (X, τ) es compacto y T_2. Demuestre que X no es compacto con ninguna topología estrictamente más fina que τ y que X no es T_2 con ninguna topología estrictamente más gruesa que τ.

20. Sean X un espacio T_2 y $f : X \to X$ una aplicación continua. Demuestre que el conjunto de puntos fijos de f es cerrado. El conjunto de puntos fijos de f es el conjunto $\{x \in X | f(x) = x\}$.

21. Denotemos por $\mathbb{R}_N$ la recta real con la topología conumerable y por $\mathbb{R}_E$ la recta con la topología euclidiana. Demuestre que:

    a) Todo irracional es un punto de acumulación de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}_N$.
    b) La función identidad $f : \mathbb{R}_N \to \mathbb{R}_E$ no es continua.

22. Un conjunto A se dice que es un *conjunto aislado* si $A \cap A' = \varnothing$. Demuestre que todo espacio de Hausdorff infinito contiene un conjunto aislado infinito.

23. Demuestre que la regularidad es una propiedad hereditaria, y que es topológica en el sentido de que es invariante bajo homeomorfismos.

24. Demuestre que todo espacio regular y T_0 es T_2.

25. Considere el espacio topológico (X, τ), donde $X = \{0, 1, 2\}$ y $\tau = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, X\}$. Demuestre que:

    a) $\{2\}' = \{1\}$ y $\{0\}' = \varnothing$.
    b) X es regular, pero no es T_2.

26. Considere el espacio topológico (X, τ), donde $X = \{0, 1, 2\}$ y $\tau = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, X\}$. Demuestre que:

a) $\{0\}' = \{2\}$ y $\{2\}' = \varnothing$.

b) X es normal, pero no regular.

27. Demuestre que la recta de Sorgenfrey es normal.

Capítulo 8

Homotopía

Los espacios topológicos se clasifican en clases de homeomorfismo, de manera que dos espacios topológicos homeomorfos son considrados el mismo espacio. En dirección de pensamiento, adquiere sentido la vieja aifrmación topológica que asegura que una taza no se distingue de una dona y cosas por el estilo. Dicho de forma coloquial, una dona puede ser "deformada" continuamente hasta adoptar la forma de una taza, y recíprocamente.

El problema de decidir si dos espacios dados son homeomorfos ha demostrado ser de extraordinaria dificultadno es sencillo, debido a lo cual ha sido necesario recurrir a invariantes más sutiles, con el propósito de acceder a una clasificación menos rigurosa de los espacios topológicos. Uno de estos inavariantes se encuentra en la Teoría de Homotopía, misma a cuyo estudio nos intriduciremos en el presente capítulo.

La deformación continua producida por la homotopía no es necesariamente reversible de forma continua, pero puede recurrirse a la equivalencia homotópica. Un segmento de recta, por ejemplo, puede ser continuamente "encogido" hasta un punto, de manera que un segmento y un punto son equivalentes en términos de homotopía. En esta dinámica de clasificación de espacios, como veremos, juega un rol fundamental las esferas.

Por supuesto, dos espacios homeomorfos son homotópicamente equivalentes, aunque el recíproco no se verifique, como puede observarse del ejemplo del párrafo anterior. Por ello, dos espacios que no son equivalentes en términos de homotopía, no pueden ser homeomorfos.

8.1. Trayectorias y lazos

Denotemos por $M(X,Y)$ la colección de las aplicaciones continuas de X en Y y para subespacios $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ denotamos por $M((X,A),(Y,B))$ la subcolección de $M(X,Y)$ cuyos elementos son las funciones $f : X \to Y$ tales que $f(A) \subseteq B$. Tenemos entonces que $M((I,\{0,1\}),(X,x_0))$ tiene por elementos los lazos en X con *punto base* en $x_0 \in X$, y el espacio de tales lazos se denota más sucintamente mediante $\Omega(X,x_0)$.

Ahora bien, la exponencial $\exp : I \to S^1$ dada por $\exp(t) = e^{i2\pi t}$ induce una biyección

$$E : \Omega(X,x_0) \longrightarrow C((S^1,1),(X,x_0))$$

dada por $E(\alpha)(e^{i2\pi t}) = \alpha(t)$. Resulta entonces sensato usar la notación $\Omega(X,x_0)$ tanto para $M((I,\{0,1\}),(X,x_0))$ como para $M((S^1,1),(X,x_0))$. En los ejercicios se pide demostrar que ambos espacios de funciones son homeomorfos.

Recordemos que un espacio se dice que es *trayectoconexo* si para dos puntos cualesquiera $x_0, x_1 \in X$ existe una trayectoria $\alpha : I \to X$ tal que $x_0 = \alpha(0)$ y $x_1 = \alpha(1)$, que dos puntos que son extremos de una trayectoria se dice que son *homotópos*, y que la *clase de homotopía* de un punto $x \in X$ de denota por $[x]$. A menos que se indique otra cose, en adelante, los espacos de aplicaciones se consideran dotados de la topología compacto-abierta.

Proposición 8.1 *Si Y es Hasudorff entonces $M(X,Y)$ es Hausdorff con la topología compacto-abierta.*

Demostración. Dadas $f, g \in M(X,Y)$ con $f \neq g$ tomemos $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$ y abiertos ajenos $U, V \subset X$ tales que $f(x) \in U$ y $g(x) \in V$. Tenemos entonces que los sub-básicos $\mathcal{V}(\{x\},U)$ y $\mathcal{V}(\{x\},V)$ son abiertos ajenos en $M(X,Y)$ que contienen a f y a g respectivamente. ∎

Claramente se tiene que si $K_1 \subseteq K_2$ entonces $\mathcal{V}(K_2, U) \subseteq \mathcal{V}(K_1, U)$ y si $U_1 \subseteq U_2$ entonces $\mathcal{V}(K, U_1) \subseteq \mathcal{V}(K, U_2)$.

Recuérdese que el conjunto cociente módulo la relación de conectabilidad es el conjunto de las componentes trayectoconexas y se denota por $\pi_0(X)$, el cual por lo general no tiene estructura algebraica, sin embargo, tiene estructura de grupo siempre que X es un H-grupo, estableciendo el producto $[x][y] = [x * y]$ sobre las clases de homotopía.

8.2. Homotopías

Dados dos espacios topológicos X, Y y dos aplicaciones continuas $f_0, f_1 : X \to Y$, decimos que tales aplicaciones son *homótopas* si existe una *homotopía* entre ellas. Es decir, una aplicación continua $F : X \times I \to Y$ tal que $F(0, x) = f_0(x)$ y $F(1, x) = f_1(x)$. Notemos que una homotopía $F : f_0 \simeq f_1$ se corresponde de manera única con una trayectoria $\widehat{F} : I \to M(X, Y)$ cuyos extremos son f_0 y f_1.

$$\widehat{F}(t)(x) = F(x, t)$$

Por otra parte, es claro que toda trayectoria en $M(X, Y)$ se asocia de manera única con una homotopía entre dos aplicaciones de X en Y. Dos aplicaciones f_0 y f_1 son *conectables* en $M(X, Y)$ si y sólo si son homótopas. De lo anterior se tiene que la homotopía de aplicaciones es una relación de equivalencia y que las clases de equivalencia, llamadas *clases de homotopía* se corresponden biunívocamente con las componentes trayecto-conexas de $M(X, Y)$.

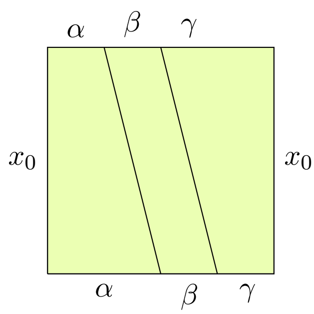
Consideremos en caso particular $M((I, \{0, 1\}), (X, x_0))$, que denotaremos por $\Omega(X, x_0)$ y que como ya observamos previamente corresponde también con $M((S^1, 1), (X, x_0))$.

En el caso particular en el que X es un espacio de Hausdorff, es claro que el *espacio de lazos* $\Omega(X, x_0)$ es también un espacio de Hausdorff, y pretendemos demostrar que el espacio de lazos es un H-grupo, para lo cual requerimos la definición de una operación binaria con las propiedades descritas. La operación en cuestión es la concatenación de trayectorias que ya había sido definida, en el capítulo de conexidad, como sigue, mediante el uso del lema de pegadura.

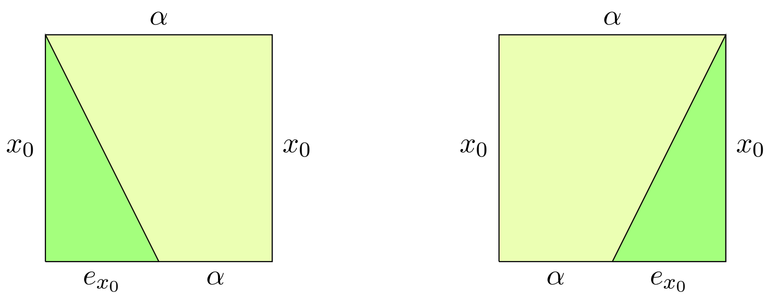
$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{para} \quad 1 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(1-2t) & \text{para} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Con auxilio de las ilustraciones siguientes puede demostrarse con facilidad que el espacio de lazos $\Omega(X, x_0)$ satisface los axiomas de H-grupo. Consideremos $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0)$ tres lazos cualesquiera, denotemos por e_{x_0} el lazo constante $e_{x_0} : I \to X$ dado por $e_{x_0}(t) = x_0$ para todo $t \in I$ y por $\alpha^{-1} : I \to X$ el lazo inverso del lazo α dado mediante $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$.

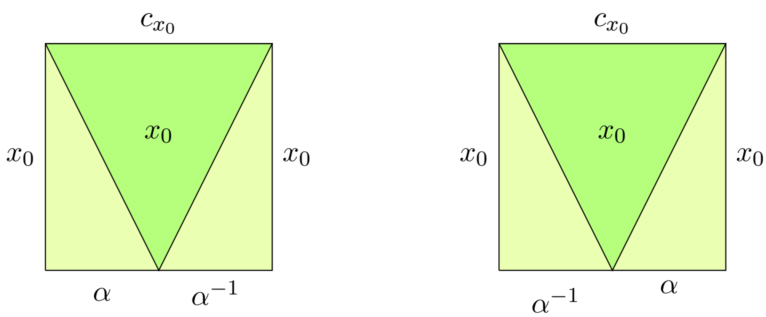
1. Que $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq (\alpha * \beta) * \gamma$ se sigue de la homotopía ilustrada como sigue obteniendo la *asociatividad salvo homotopía.*



2. La homotopía que se ilustra con la figuras siguientes muestra que el lazo constante es *neutro salvo homotopía* en el espacio de lazos, es decir que $\alpha * e_{x_0} \simeq \alpha \simeq e_{x_0} * \alpha$.



3. El lazo inverso es un posible *inverso salvo homotopía* como se deduce de las figuras que siguen, las cuales ilustran el hecho de que $\alpha * \alpha^{-1} \simeq e_{x_0} \simeq \alpha^{-1} * \alpha$.



El lector recuerda con seguridad los diagramas anteriores de la sección 5.6, en donde pueden verificarse los detalles técnicos.

8.3. El grupo fundamental

Tenemos entonces que las clases de homotopía de lazos en X con punto base en x_0 se corresponden biunívocamente con las componentes trayecto-conexas del espacio cuyos puntos son tales lazos. En la sección 5.7 se demostró que $\pi_0(X)$ tiene estructura de grupo si X tiene estructura de H-grupo.

El grupo de las componentes trayecto-conexas de $\Omega(X, x_0)$ se conoce como el *grupo fundamental* del espacio X con *punto base* en x_0, mismo que denotamos mediante $\pi_1(X, x_0)$.

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_0 \left(\Omega(X, x_0)\right) = \frac{\Omega(X, x_0)}{\simeq}$$

Como hemos visto, una forma de entender el grupo fundamental de un espacio X es como el grupo conformado por las clases de homotopía de aplicaciones de la 1-esfera $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ con punto base $1 \in \mathbb{C}$ en el espacio X con punto base x_0. Notemos que la 0-esfera $S^0 \subset \mathbb{R}$ es un espacio discreto consistente en los puntos 1 y -1 en la recta real $\mathbb{R}$. Si consideramos al punto 1 como el punto base de S^0, entonces dadas dos aplicaciones $\alpha_0, \alpha_1 : (S^0, 1) \to (X, x_0)$, una homotopía entre ellas es una función continua

$$F : S^0 \times I \to X$$

tal que:

1. $F(-1, 0) = \alpha_0(-1)$,
2. $F(-1, 1) = \alpha_1(-1)$, y
3. $F(1, t) = x_0$ para todo $t \in I$.

En consecuencia, una homotopía entre α_0, α_1 es simplemente una trayectoria en X con extremos en $\alpha_0(-1)$ y $\alpha_1(-1)$. Lo anterior puede verse con facilidad si se considera la inclusión $\iota : I \to S^0 \times I$ dada por $\iota(t) = (-1, t)$. La trayectoria $\alpha : I \to X$ se define entonces por la conmutatividad del diagrama siguiente como $\alpha = F \circ \iota$ y claramente $\alpha(0) = \alpha_0(-1)$ y $\alpha(1) = \alpha_1(-1)$.

$$\begin{tikzcd}
S^0 \times I \arrow[r, "F"] & X \\
I \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Se obtiene como conclusión que las clases de homotopía de aplicaciones punteadas de S^0 en X coincide con las componentes trayectoconexas de X. Denotamos en general la familia de las clases de homotopía de aplicaciones de X en Y como $[X, Y]$ y de las aplicaciones punteadas de (X, x_0) en (Y, y_0) como $[(X, x_0), (Y, y_0)]$. Si los puntos base se suponen conocidos es costumbre omitirlos en la notación, de manera que en tal caso abreviamos $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ como $[X, Y]$. Con esta notación tenemos una bellísima expresión para π_0 y para π_1, donde X es trayectoconexo.

$$\pi_0(X) = [S^0, X]$$

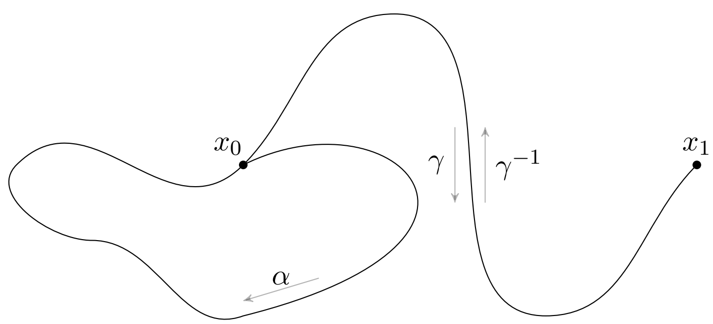
$$\pi_1(X) = [S^1, X]$$

Un hecho que generalizaremos posteriormente es el que conecta los dos miembros de la siguiente igualdad, las cuales representan dos formas distintas de obtener el grupos fundamental.

$$[(S^0, 1), (\Omega(X, x_0), e_{x_0})] = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$

Teorema 8.2 *Si* $\pi_0(X) = 1$ *entonces* $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ *para dos puntos cualesquiera* $x_0, x_1 \in X$.

Demostración. Dado que X es trayectoconexo, los puntos considerados son conectables, sea entonces $\gamma : I \to X$ una trayectoria con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$.



Definamos entonces $\Gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ mediante $[\Gamma(\alpha)] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$, aplicación que está claramente bien definida y tiene inversa dada por $[\Gamma^{-1}(\beta)] = [\gamma * \beta * \gamma^{-1}]$, de donde se tiene que es una biyección. Por otra parte, dado que

$$[\Gamma(\alpha * \delta)] = [\gamma^{-1} * \alpha * \delta * \gamma] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \delta * \gamma] = [\Gamma(\alpha)][\Gamma(\delta)]$$

para cualesquiera $\alpha, \delta \in \Omega(X, x_0)$, de manera que es un homomorfismo de grupos y por consiguiente un isomorfismo. ■

El punto base x_0 del espacio X es suficiente para determinar el punto base del espacio de lazos, el cual es justamente el lazo constante e_{x_0}. Por otra parte, por el resultado anterior tenemos que el grupo fundamental es independiente del punto base para espacios trayectoconexos. Teniendo lo anterior en consideración, el nexo entre π_0 y π_1 adquiere una expresión de mayor elegancia.

$$\pi_0(\Omega(X)) = [S^0, \Omega(X)] = [\Sigma S^0, X] = [S^1, X] = \pi_1(X)$$

8.4. El punto y el círculo

En la presente sección calcularemos los grupos fundamentales de algunos espacios topológicos más o menos populares. Inicaremos aplicando el functor[1] π_0 al grupo ortogonal $O(n)$, el cual en particular es un H-grupo, en el que la operación de H-grupo es la misma que la operación de grupo. El grupo $O(n)$ tiene exactamente dos componentes conexas, de manera que $\pi_0(O(n))$ es un grupo de orden 2.

$$\pi_0(O(n)) \cong C_2$$

Dos espacios X, Y se dicen que son *homotópicamente equivalentes* si existen aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq 1_X$ y

[1]Los significados de *categoría* y de *functor* serán aclarados en la siguiente sección, aunque ya han sido usados previamente apelando a la intuición y la cultura matemática del lector.

$f \circ g \simeq 1_Y$. En tal caso decimos que f y g son *equivalencias homotópicas.*. Dos espacios que son homotópicamente equivalentes se dice que tienen el mismo *tipo de homotopía.* La equivalencia homotópica es claramente reflexiva, simétrica y transitiva.

Teorema 8.3 *Dos espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos fundamentales isomorfos.*

Demostración. Dada una equivalecia homotópica $f : X \to Y$ entre espacios trayectoconexos, consideremos la aplicación $f_\# : \Omega(X) \to \Omega(Y)$ dada por $f_\#(\alpha) = f \circ \alpha$ para todo lazo $\alpha : I \to X$, la cual está claramente bien definida e induce un homomorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ como $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ cuyo inverso es $g_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$, lo que indica que se trata de un isomorfismo. ■

Ejemplo 8.1 *El cilindro y el círculo son homotópicamente equivalentes: la proyección $S^1 \times I \to S^1$ y la inclusión*

$$S^1 \hookrightarrow S^1 \times \{0\} \hookrightarrow S^1 \times I$$

son equivalencias homotópicas. De la misma manera, la banda de Möbius y el círculo son homotópicamente equivalentes. □

Ejemplo 8.2 *Sean $X = \{0,1\}$ y $j : X \to I$ la inclusión. Consideremos ahora $f : I \to X$ tal que $f^{-1}(0) = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ y $f^{-1}(1) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Si I tiene la topología euclidiana y X la de Sierpiński $\mathcal{S} = \{\varnothing, \{0\}, X\}$, entonces f y j son invesas homotópicas una de la otra, de manera que los espacios considerados son homotópicamente equivalentes.* □

Un espacio que es homotópicamente equivalente con un espacio que consta de un único punto se dice que tiene la *homotopía de un punto*, que es *contráctil* o que es *homotópicamente trivial.* El ejemplo típico de un espacio con la homotopía de un punto es el disco unitario D^n en $\mathbb{R}^n$, que consiste de los vectores de norma a lo sumo 1. Afirmamos que la inclusión $\iota : \{*\} \to D^n$ dada por $\iota(*) = 0$ es una equivalencia homotópica cuya inversa homotópica es la constante $p : D^n \to \{*\}$. Es claro que $p \circ \iota$ es la identidad, para demostrar que $\iota \circ p$ es homótopa con la identidad considere la homotopía $H : D^n \times I \to D^n$ dada por $H(x,t) = tx$.

$$\pi_1(D^n) = 0$$

Ejemplo 8.3 *Los espacios euclidianos I y $D^1 = [-1,1]$ son homeomorfos, y en particular, son homotópicamente equivalentes. Por tanto, es espacio de Sierpiński es homotópicamente trivial.* □

Ejemplo 8.4 *Alternativamente, puede verse que el espacio de Sierpiński X tiene el tipo de homotopía de un punto es verificar que la aplicación $H : X \times I \to X$ dada por*

$$H(x,t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t < 1 \\ x & si \quad t = 1 \end{cases}$$

es una homotopía. □

Con el fin de calcular el grupo fundamental $\pi_1(S^1)$, consideremos la aplicación exponencial $E : \mathbb{R} \to S^1$ dada mediante $E(t) = e^{i2\pi t}$. Notemos en primer lugar que $E^{-1}(1) = \mathbb{Z}$, más tarde veremos que $\mathbb{R}$ es un espacio cubriente para S^1 y de hecho es su cubriente universal, además de que la exponencial es la correspondiente aplicación cubriente.

Para un lazo $\alpha : I \to S^1$ con punto base $1 \in S^1$, existe un único *levantamiento* $\widetilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\alpha}(0) = 0$ y $\alpha = E \circ \widetilde{\alpha}$. Notemos además que necesariamente $\widetilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$. La unicidad del levantamiento se demuestra usando el hecho de que la exponencial es un homeomorfismo local y la compacidad del intervalo I.

Proposición 8.4 *Dos lazos $\alpha \simeq \beta$ en $\Omega(S^1,1)$ si y sólo si sus levantamientos satisfacen $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$.*

Demostración. Supongamos primero que $\alpha \simeq \beta$ y sea $F : I \times S^1 \to S^1$ una homotopía entre tales lazos. Usando la compacidad de $I \times I$, además del hecho que $1 \times E : I \times \mathbb{R} \to I \times S^1$ se demuestra con facilidad que existe un único levantamiento de la homotopía F, es decir, una homotopía $\widehat{F} : I \times I \to \mathbb{R}$ tal que $E \circ \widehat{F} = H \circ (1 \times E)$.

$$\begin{tikzcd}
I \times I \arrow[r, "\widehat{F}"] \arrow[d, "1\times E"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "E"] \\
I \times S^1 \arrow[r, "F"] & S^1
\end{tikzcd}$$

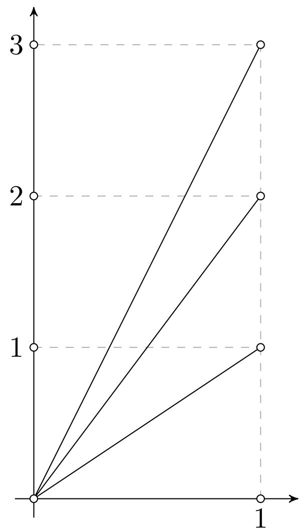
Dado que $\widehat{F}$ es continua, entonces su restricción a $I \times \{1\}$ es también continua y tiene dominio conexo con imagen en $\mathbb{Z}$ que es un espacio discreto, por lo que debe ser contante.

$$\begin{tikzcd}
I \times I \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "E\circ F"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "E"] \\
 & S^1
\end{tikzcd}$$

Recíprocamente, si suponemos que $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$, la homotopía $H : I \times I \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(t, s) = (1 - t)\widetilde{\alpha}(s) + t\widetilde{\beta}(s)$$

es tal que $E \circ H : I \times I \to S^1$ es una homtopía entre α y β. ∎



La figura previa muestra las gráficas de las homotecias dadas mediante multiplicación por 1, 2 y 3, las cuales son los levantamientos de los lazos $\alpha_k : I \to S^1$ dados por $\alpha_k(t) = e^{i2k\pi t}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$. Las gráficas mostradas corresponden entonces a los levantammientos $\widetilde{\alpha_k} : I \to \mathbb{R}$ dadas por $\widetilde{\alpha_k}(t) = kt$. Enunciamos ahora el resultado principal de la presente sección.

Corolario 8.5 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

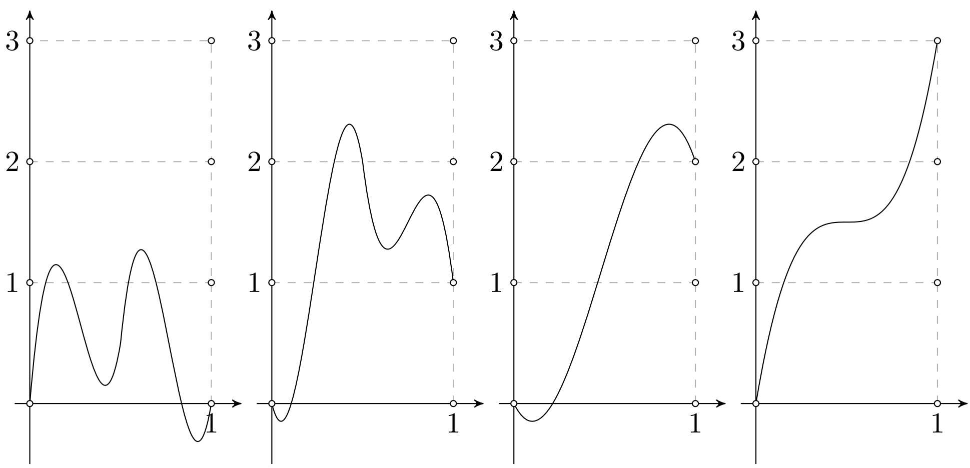
Demostración. Basta notar que $\widetilde{\alpha * \beta}(1) = \widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(1)$. ■

El *grado* de una función $\alpha : S^1 \to S^1$ se define como $\widetilde{\alpha}(1)$ donde $\widetilde{\alpha}$ es el levantamiento que hace conmutativo el diagrama siguiente. Usamos la notación $\deg \alpha = \widetilde{\alpha}(1)$. En la figura anterior, las homotecias ilustradas son levantamientos de aplicaciones que tienen, respectivamente, grados 1, 2 y 3.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[d, "E"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "E"] \\ S^1 \arrow[r, "\alpha"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Intuitivamente el grado de una función del círculo en el círculo es el número de vueltas que la función da en el sentido antihorario. Una función tal homótopa con la constante tiene grado cero. Por otra parte es claro que la aplicación $p_n : S^1 \to S^1$ dada por $p_n(x) = x^n$ tiene grado n, simbólicamente $\deg p_n = n$.

En la figura que sigue se ilustran los levantamientos de cuatro aplicaciones, de grados 0, 1, 2 y 3.



8.5. Functores de Homotopía

Una *categoría* es un par de colecciones no vacías $\mathcal{C} = (Ob(\mathcal{C}), Mor(\mathcal{C}))$ en la que los elementos de la primera se llaman *objetos*, en tanto que los de la segunda se conocen como *morfismos*. Un morfismo es una *flecha* $\alpha \in Mor(\mathcal{C})$ de la forma $\alpha : a \to b$ donde $a, b \in Ob(\mathcal{C})$; el objeto a es el *dominio* del morfismo α, en tanto que b es su *codominio*. Los morfismos satisfacen las propiedades siguientes:

1. *Composición de morfismos*: dados dos morfismos $\alpha : a \to b$ y $\beta : b \to c$ existe un tercer morfismo $\beta \circ \alpha : a \to c$.

2. *Asociatividad*: la composición de morfismos es asociativa.

3. *Morfismos identidad*: Para cada objeto a existe un morfismo $1_a : a \to a$ de forma que para todo morfismo $\alpha : a \to b$ se satisface que $\alpha \circ 1_a = \alpha = 1_b \circ \alpha$.

Si la colección de morfismos de una categoría es un conjunto, decimos que la categoría dada es una *categoría pequeña*.

Ejemplo 8.5 *La categoría* **Set** *tiene como objetos a los conjuntos y como morfismos las funciones. La categoría* **Set** *no es ciertamente una categoría pequeña.* □

Ejemplo 8.6 *La categoría* **PoSet** *tiene como objetos a los conjuntos parcialmente ordenados y en ella un morfismo $a \to b$ existe si y sólo si $a \leq b$.* □

Ejemplo 8.7 *La categoría* **Group** *tiene como objetos a los grupos, siendo los morfismos lo que conocemos como homomorfismos de grupos. En la categoría* **Top** *los objetos son espacios topológicos y los morfismos son transformaciones continuas. La categoría* **Top**$_*$ *tiene como objetos los espacios topológicos de Hausdorff con punto base y como morfismos las aplicaciones continuas y punteadas. La categoría* **Top**$_*$ *es una subcategoría de la categoría* **Top**. □

Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, un *functor* es un par $F = (Ob(F), Mor(F))$ donde las componentes son aplicaciones $Ob(F) : Ob\mathcal{A} \to Ob\mathcal{B}$ y $Mor(F) : Mor\mathcal{A} \to Mor\mathcal{B}$ que respetan la composición de morfismos. Para economizar en simbología denotaremos ambas aplicaciones simplemente por F, entonces la condición anterior significa que para toda composición de morfismos $\beta \circ \alpha$ se tendrá $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$. Es común llamar a un functor como el descrito *functor covariante*, en oposición a un *functor contravariante* que satisface $F(\beta \circ \alpha) = F(\alpha) \circ F(\beta)$.

Ejemplo 8.8 *Un caso típico de functor contravariante es de cualidad en espacios vectoriales, que transforma un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$ en su espacio vectorial dua $V^* = Mor(V, \mathbb{F})$, y a todo morfismo*[2] $f : V \to U$ *el morfismo dual* $f^* : U^* \to V^*$ *definido mediante* $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ *para* $\alpha \in Mor(U, \mathbb{F})$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\alpha)"'] & U \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

Se dice que el morfismo $f^*(\alpha) \in V^*$ *es el retromorfismo*[3] *de* α *por* f. $\square$

A cada espacio topológico X le asociamos de forma única el conjunto de sus componentes trayectoconexas. La aplicación

$$\pi_0 : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

es un fucntor tal que en objetos es $X \mapsto \pi_0(X)$. Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, y si $y = f(x)$, entonces, si $C(x)$ es la componente trayectoconexa de $x \in X$ su imagen $f(C(x))$ es conexo y en consecuencia

[2]Los morfismos en la categoría de los espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{F}$ son las transformaciones $\mathbb{F}$-lineales.

[3]En ingés "pull back".

$f(C(x)) \subseteq C(y)$, de manera que $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ está bien definida y es tal que $\pi_0(C(x)) = C(y)$.

Los H-grupos son espacio topológicos con una estructura adicional, de manera que la categoría de los H-grupos es una subcategoría de la categoría de los espacio topológicos, en tal caso el functor π_0 restringido a los H-grupos toma valores en la categoría de los grupos.

$$\pi_0 : H\text{-}\mathbf{Group} \longrightarrow \mathbf{Group}$$

Por su parte el functor π_1 va de los espacios topológicos punteados en los grupos.

$$\pi_1 : \mathbf{Top}^* \longrightarrow \mathbf{Group}$$

Este es en efecto un functor covariante, pues si $f : X \to Y$ es continua con $y_0 = f(x_0)$, para todo $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, entonces $f \circ \alpha \in \Omega(Y, y_0)$, de manera que $\pi_1(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Es común expresar el homomorfismo $\pi_1(f) : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ como $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.

Un *grupoide* es una categoría en la que todos los morfismos son invertibles. En topología hay muchos ejemplos interesantes de grupoides.

Ejemplo 8.9 *Sea X un espacio topológico. La categoría $Homeo(X)$ tiene como objetos a todos los espacios topológicos homeomorfos con X, siendo en este caso los morfismos todos los posibles homeomorfismos. $Homeo(X)$ es claramente un grupoide.* $\square$

Ejemplo 8.10 *Denotemos por $\Pi(X)$ la categoría cuyos objetos son los puntos de X, y cuyos morfismos son los elementos de $\mathcal{C}[I, X] \subseteq XI$ que es la familia de todas las aplicaciones continuas de I en X. Si $\alpha : I \to X$ es una trayectoria con $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$, entonces α se interpreta como un morfismo $x_0 \to x_1$. La categoría $\Pi(X)$ se conoce como el grupoide fundamental de X.* $\square$

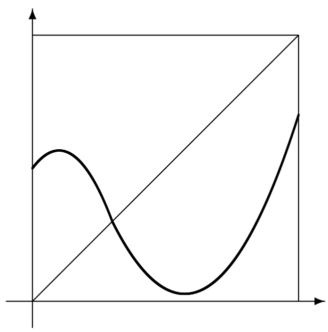
Ejemplo 8.11 *Veamos un ejemplo con algo más de sabor homotópico. La categoría de los lazos en (X, x_0) tiene como objetos los lazos y como morfismos las homotopías entre tales lazos. Esta categoría puede ser interpretada como $\Pi(\Omega(X, x_0))$, y es en realidad el grupoide fundamental de $\Omega(X, x_0)$.*
$\square$

Un *monoide* es una categoría en la que el conjunto de objetos tiene cardinalidad 1. Un *grupo* es un monoide que es grupoide.

Ejemplo 8.12 *Consideremos un espacio topológico X, entonces la categoría $(\{X\}, M(X,X))$ es claramente un monoide. Una subcategoría posible es la que tiene como morfismos el conjunto de los homeomorfismos de X, lo que denotanos por $homeo(X) \subset M(X,X)$, tal categoría $(\{X\}, homeo(X))$ es un grupoide y por consiguiente un grupo.* □

8.6. Aplicaciones

Un resultado bastante conocido afirma que toda función continua $f : I \to I$ tiene un punto fijo, lo cual es además muy cercano a nuestra intuición. El resultado es un caso particular de un resultado clásico demostrado por L. E. J. Brouwer en 1909.[4]



Antes de pasar a una versión más general, demostraremosel mismo resultado de la sección 5.1 con un ligero cambio en el enfoque. Notemos primero que para una aplicación continua $f : X \to Y$ se satisface que $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ está bien definida, es decir que $\pi_0([x]) = [f(x)]$ para todo $x \in I$.

[4]Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), matemático holandés.

Sea $g : I \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(0) < 0 < g(1)$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces la aplicación $r : I \to S^0$ dada por

$$r(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}$$

está bien definida además de ser continua y suprayectiva. En consecuencia, $\pi_0(q) : \pi_0(I) \to \pi_0(S^0)$ es suprayectiva, lo que es claramente imposible, dado que $\pi_0(I)$ tiene un único elemento, en tanto que $\pi_0(S^0)$ tiene, por supuesto, dos de ellos.

La aplicación r definida arriba es, esencialmente, una *retracción* del 1-disco D^1 sobre su frontera S^0, es decir, es una aplicación continua tal que si $j : S^0 \to D^1$ es la inclusión, entonces el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
S^0 \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "1"'] & D^1 \arrow[d, "r"] \\
& S^0
\end{tikzcd}$$

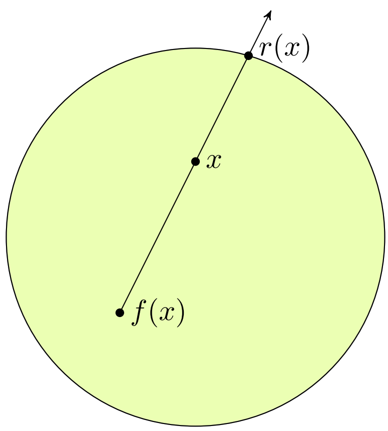
Lo que recién demostramos es entonces, en el fondo, la inexistencia de una retracción $r : D^1 \to S^0$.

Tomemos ahora una aplicación continua $f : I \to I$, y supongamos que f no tiene puntos fijos, de manera que $f(x) \neq x$ para todo $x \in I$. Por hipótesis $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Si definimos ahora $g : I \to \mathbb{R}$ mediante $g(x) = x - f(x)$, claramente g es continua, $g(0) < 0 < g(1)$ y además $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, y en consecuencia, $r = g/|g|$ es la retracción cuya inexistencia ha quedado demostrada.

El resultado siguiente es consecuencia de la inexistencia, en general, de una retracción $r : D^n \to S^{n-1}$, que es un hecho asociado con la $(n-1)$-conexidad. Un espacio X es 0-*conexo* si es trayectoconexo, es decir, si $|\pi_0(X)| = 1$. Un espacio trayectoconexo X es 1-conexo si $\pi_1(X) = 0$, un espacio 1-conexo se dice también *simplemente conexo*. Un espacio trayectoconexo X es n-conexo[5] si $\pi_k(X) = 0$ para $1 \leq k \leq n$.

Teorema 8.6 (Teorema de punto fijo de Brouwer) *Si $f : D^n \to D^n$ es continua, entonces existe $x_0 \in D^n$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demostramos el caso $n = 2$ que es el que se puede abordar conociendo el grupo fundamental. Una vez conocida esta demostración y la estructura de los grupos superiores de homotopía introducidos por Witold Hurewicz[6] saltará a la vista que el teorema es correcto en general. El disco no puede retraerse al círculo, de manera que si encontramos una retracción se produce también una contradicción. Si x y $f(x)$ son sintintos para todos los puntos del disco, entonces el vector $x - f(x)$ es no nulo y puede prolongarse positivamente hasta tocar la esfera en un único punto.



Demostración. Supongamos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in D^2$ y consideremos el vector
$$r(x) = f(x) + t_x(x - f(x))$$
definido como sigue: para cada $x \in D^2$ existe un único $t_x > 0$ para el cual $r(x) = 1$; tenemos además que r es continua porque es resctricción

[5] Los grupos superiores de homotopía son definidos en la sección 8.8.

[6] Witold Hurewicz (1904 - 1956). Matemático polaco, muere en México al caer de una pirámide en Uxmal.

de una aplicación continua. Entonces tenemos definida una una *retracción* $r : D^2 \to S^1$, es decir, una aplicación continua tal que $\iota \circ r : S^1 \to S^1$ es la identidad, donde $\iota : S^1 \to D^2$ es la inclusión, de manera que considerado entonces los homomorfismos inducidos, la composición

$$\iota_* \circ r_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$$

es a su vez la identidad. Lo anterior es claramente imposible, ya que ι_* es un homomorfismo constante. ■

En dimensión 1, la existencia de una retracción significa la existencia de una función continua $r : D^1 \to S^0$, donde por la conexidad de $D^1 = [-1, 1]$ se tiene que r debe ser una aplicación constante igual a 1 ó a -1. Si es 1, entonces $r(1) = 1$, y si es -1, entonces $r(-1) = -1$, de manera que el teorema se verifica usando herramientas de topología general. Usando el functor π_0 se obtiene que la identidad sobre $\pi_0(S^0) \cong C_2$ se factoriza a través del homomorfismo constante $\iota_* : C_2 \to 0 = \pi_0(D^1)$, lo cual nuevamente resulta imposible, como ya se discutió previamente.

Teorema 8.7 (Teorema fundamental del álgebra) *Sea*

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

un polinomio con coeficiente complejos $a_1, \ldots, a_n$ *donde* $n > 0$. *Entonces existe un número complejo* x_0 *tal que* $p(x_0) = 0$.

Demostración. Si $p(x) \neq 0$ para todo complejo x, queda entonces bien definida la restricción

$$\widehat{p} : S^1 \longrightarrow S^1$$

tal que

$$\widehat{p}(x) = \frac{p(x)}{|p(x)|}$$

Si $p(x)$ no tiene taíces, en particular $p(x) \neq 0$ para todo $x \in D^2$. Definamos entonces

$$H : I \times S^1 \longrightarrow S^1$$

por

$$H(x,t) = \frac{p(tx)}{|p(tx)|}$$

la cual es claramente continua.

Tenemos entonces que H es una homotopía entre $\widehat{p}$ y la función constante con valor $p(0)/|p(0)|$, de manera entonces que $\deg(\widehat{p}) = 0$. Por otra parte, dado que $p(x) \neq 0$ para todo complejo x con $|x| \geq 1$ podemos definir

$$F : S^1 \times I \to S^1$$

mediante

$$F(x,t) = \frac{k(x,t)}{|k(x,t)|}$$

donde

$$k(x,t) = x^n + t(a_1 x^{n-1} + t a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + t^{n-1}a_n),$$

de manera que F es una homotopía entre $\widehat{p}$ y $p_n : S^1 \to S^1$ dada por $p_n(x) = x^n$ y como sabemos $\deg p_n = n$, lo que es claramente una contradicción. ■

8.7. Sumas y Productos

El cálculo directo de grupos fundamentales puede ser tedioso y complicado. por lo que resulta razonable hacerse de algunas herramientas algebraicas para el efecto. Consideraremos en la presente sección dos operaciones entre espacios topológicos: el producto cartesiano y la suma cuña, conocida también como unión en un punto, construcciones con las que ya tratamos en el capítulo 3. El primer elemento a considerar es el conjunto de las componentes conexas de un producto cartesiano.

Lema 8.8 *Dados dos espacios topológicos X, Y de Hausdorff*

$$\pi_0(X \times Y) = \pi_0(X) \times \pi_0(Y).$$

Demostración. Claramente el producto de dos espacios trayectoconexos es trayectoconexo. Demostraremos además que si $A \times B$ es trayectoconexo sus factores lo son. Sean $a_0, a_1 \in A$ dos puntos arbitrarios, tomemos ahora dos puntos cualesquiera $b_0, b_1 \in B$ y una trayectoria $\alpha : I \to A \times B$ con $\alpha(0) = (a_0, b_0)$ y $\alpha(1) = (a_1, b_1)$. Dada la proyección $p_A : A \times B \to A$, la cual es obviamente continua, la composición $\beta = p_A \circ \alpha : I \to A$ es una trayectoria con $\beta(0) = a_0$ y $\beta(1) = a_1$. ■

Dados dos espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0), claramente todo lazo $\alpha : I \to X \times Y$ con punto base (x_0, x_0) define de forma única un par de lazos $\alpha_X = p_X \circ \alpha$ y $\alpha_Y = p_Y \circ \alpha$ con puntos base en x_0 y en y_0 respectivamente, donde p_X y p_Y son las proyecciones obvias. Recíprocamente, todo par de lazos en X y en Y define un único lazo en $X \times Y$. Este es un resultado tan elemental como importante.

Dados dos espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0) se tiene

$$\Omega(X \times Y, (x_0, y_0)) = \Omega(X, x_0) \times \Omega(Y, y_0).$$

En virtud de los resultados previos somos ahora capaces de calcular el grupo fundamental de un producto de espacios punteados.

Proposición 8.9 *Dados X y Y dos espacios trayectocoenxos tenemos*

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$$

con la operación obvia término a término. ■

Una aplicación inmediata del resultado previo consiste en el cálculo del grupo fundamental del 2-toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

$$\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

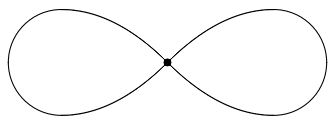
Otra construcción interesante es la llamada *suma cuña*[7] ó unión en un punto. Una construcción típicamente homotópica: tomamos dos espacios

[7] Wedge product.

punteados y construimos con ellos un nuevo espacio punteado. Dados dos espacios (X, x_0) y (Y, y_0) definimos como sigue la suma cuña de ellos.

$$X \vee Y = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$$

Un *ramillete*[8] se define como la suma cuña de una cantidad finita de espacios punteados. Si los espacios son esferas, decimos que se trata de un ramillete de esferas. El ramillete de dos 1-esferas se conoce popularmente como *la figura 8*.



La figura 8 es la suma $S^1 \vee S^1$. El grupo fundamental de un ramillete es el *producto libre* de los grupos fundamentales de los sumandos. En particular, el grupo fundamental de la figura 8 es el grupo libre no abeliano en dos generadores.

$$\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Este grupo se interpreta como el grupo de palabras en dos caracteres, sus elementos tienen la forma

$$a^{k_1} b^{m_1} \ldots a^{k_n} b^{m_n}$$

donde a es el generador del grupo fundamental de uno de los sumandos, siendo b el generador del grupo fundamental del sumando restante.

8.8. Grupos de homotopía

En la presente sección pretendemos introducir las ideas básicas asociadas con uno de los invariantes topológicos más útiles y atractivos. Para continuar será suficiente tener presente que el espacio de lazos de un espacio

[8] Wedge.

punteado, localmente compacto y Hausdorff, es a su vez un espacio punteado, localmente compacto y Hausdorff. Obviamente, la topología empleada sobre los espacios de aplicaciones es la topología compacto abierta.

El *n-ésimo grupo de homotopía* de un espacio topológico punteado (X, x_0), localmente compacto y Hausdorff, que se denota por $\pi_n(X, x_0)$, se define como el conjunto de las clases de homotopía $[(S^0, *), \Omega^n(X, x_0)]$, con la operación inducida por la operación de H-grupo en $\Omega^n(X, x_0)$, es decir, sobre $\Omega(\Omega^{n-1}(X, x_0))$.

$$\pi_n(X) = [(S^0, *), \Omega^n(X, x_0)]$$

Entendiendo que las clases de homotopía bajo consideración lo son de aplicaciones puntedas, y dando por conocidos los respectivos puntos base, una forma más sucinta de expresar lo anterior se encuentra en la notación que sigue, misma que nos permitirá movernos con más agilidad en la selva de los grupos de homotopía.

$$\pi_n(X) = [S^0, \Omega^n X]$$

Recordemos, por otra parte, que para un espacio punteado X, localmente compacto y Hausdorff, la suspensión reducida ΣX es un espacio punteado localmente compacto y Hausdorff, además de que la biyección

$$\alpha \longleftrightarrow \widehat{\alpha}$$

dada por

$$\alpha[x, t] = \widehat{\alpha}(x)(t)$$

define un isomorfismo de grupos

$$[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y]$$

con la operación dada por

$$\alpha * \beta[x, t] = \widehat{\alpha}(x) * \widehat{\beta}(x)(t).$$

Se expresa así la dualidad entre los functores Σ y Ω, lo que nos permite transformar la definición anterior en

$$\pi_n(X) = [S^n, X].$$

Ya hemos establecido previamente que $\pi_0(X)$ tiene estructura de un grupo si X es un H-grupo. Otro hecho particularmente relevante, es que $\pi_1(X)$ es un grupo abeliano si X es un H, grupo, y dado que

$$\pi_2(X) = \pi_1(\Omega X),$$

entonces $\pi_k(X)$ es un grupo abeliano para todo $k \geq 2$. Empleando el homeomorfismo evidente

$$S^2 = \frac{I \times I}{\partial(I \times I)}$$

demostraremos el hecho de que π_2 es abeliano.

El producto de esferas punteadas es, de forma natural, un espacio punteado pero no es una esfera. La suspensión no reducida de una esfera es una esfera pero no es un espacio punteado. La suspensión reducida de una esfera punteada es una esfera punteada. Esta es una buena razón para sustituir el producto por el producto reducido al tratar con homotopía.

La suspensión reducida de una esfera punteada es una esfera punteada. Cada aplicación continua $\alpha : (S^n, *) \to (X, x_0)$ puede verse como una aplicación continua de pares topológicos $\alpha : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, dados los homeomorfismos $S^n - \{*\} = (I^n)^\circ = (D^n)^\circ$. Es evidente que esta correspondencia preserva clases de homotopía.

Teorema 8.10 *π_n es un functor de la categoría* **Top$_*$** *en la categoría* **AbGroup**.

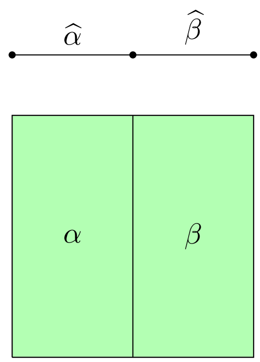
Demostración. Sean aplicaciones continuas $\alpha, \beta : (I^2, \partial I^2) \to (X, x_0)$, y consideremos el producto $\widehat{\alpha} * \widehat{\beta}$ para $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} : I \to \Omega(X)$. De

$$\widehat{\alpha} * \widehat{\beta}(s) = \begin{cases} \widehat{\alpha}(2s) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \widehat{\beta}(2s-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

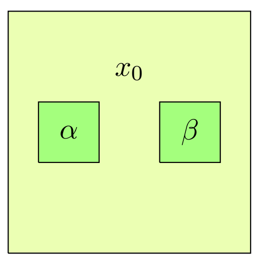
obtenemos

$$\alpha * \beta(s,t) = \begin{cases} \alpha(2s,t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1,t) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

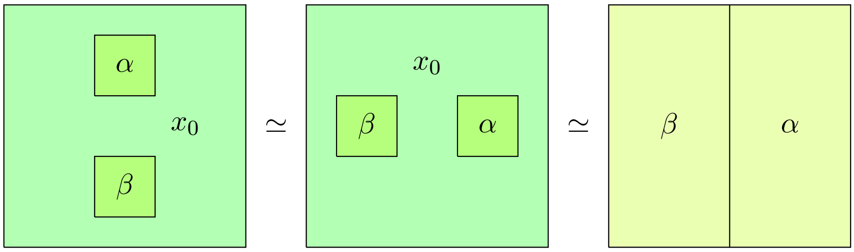
Esto se ilustra en el siguiente dibujo



Las fronteras de ambos rectángulos se aplican sobre el punto base x_0. Reescalando apropiadamente, obtenemos una homotopía de la composición anterior con la que se ilustra enseguida.



Los reescalamientos posteriores se muestran en la siguiente secuencia.



Con ello se demuestra que $\alpha * \beta \simeq \beta * \alpha$. ■

Corolario 8.11 *El grupo $\pi_k(X)$ es abeliano para todo espacio trayectoconexo X y todo $k > 1$.* ■

El lector bien puede haber notado que la abelianidad de π_2 tiene su origen en el hecho de que $\Omega(X)$ es un H-grupo. En resumen, para todo H-grupo X se tiene que $\pi_k(X)$ es abeliano para todo $k > 0$.

8.9. Ejercicios

1. Considere aplicaciones continuas $f_0, f_1, f : X \to Y$ y $g_0, g_1, g : Y \to Z$. Demuestre que:

   a) si $f_0 \simeq f_1$, entonces $g \circ f_0 \simeq g \circ f_1$,

   b) si $g_0 \simeq g_1$, entonces $g_0 \circ f \simeq g_1 \circ f$,

   c) si $f_0 \simeq f_1$ y $g_0 \simeq g_1$, entonces $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

2. Dados dos espacios topológicos X, Y, denotemos por $[X, Y] = M(X, Y)/\simeq$ el conjunto de las clases de homotopía de aplicaciones continuas de X en Y.

   a) Demuestre que $[X, I]$ tiene un único elemento para todo espacio topológico X.

   b) Demuestre que $[I, X]$ tiene un único elemento para todo espacio topológico trayectoconexo X.

c) Demuestre que si Y es contráctil, entonces $[X, Y]$ tiene un único elemento para todo espacio topológico X.

d) Demuestre que si Y es contráctil y Y es trayectoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene un único elemento.

3. Demuestre que $\mathbb{R}^n$ es un espacio contráctil.

4. Demuestre que todo espacio contráctil es trayectoconexo.

5. Considere los espacios punteados (X, x_0), (X, x_1) y sea $\gamma : I \to X$ una trayectoria con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Defínase $\widehat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$, mediante $\widehat{\gamma}[\alpha] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$. Demuestre que esta construcción es functorial, en sentido de que:

   a) si $x_0 = x_1$ y γ es la trayectoria constante, entonces $\widehat{\gamma} = 1_{\pi_1(X,x_0)}$,

   b) si $x_3 \in X$ y $\delta : I \to X$ es una trayectoria con $\delta(0) = x_1$ y $\delta(1) = x_2$, entonces $\widehat{\gamma * \delta} = \widehat{\delta} \circ \widehat{\gamma}$.

6. Sean (X, x_0) un espacio punteado trayectoconexo y $x_1 \in X$ un punto arbitrario. Demuestre que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si $\widehat{\gamma} = \widehat{\eta}$ para dos trayectorias cualesquiera $\gamma, \eta : I \to X$ de x_0 a x_1.

7. Sean G un grupo topológico y e su elemento identidad. Considere el espacio punteado (G, e) y el H-grupo $\Omega(G, e)$, y defínase, para $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$ y $t \in I$ el producto $\alpha \odot \beta \in \Omega(G, e)$ mediante $\alpha \odot \beta(t) = \alpha(t)\beta(t)$.

   a) Demuestre que $\odot$ hace de $\Omega(G, e)$ un grupo.

   b) Demuestre que $\odot$ induce una operación $\bowtie$ sobre $\pi_1(XG, e)$, mediante $[\alpha] \bowtie [\beta] = [\alpha \odot \beta]$, es decir, debe demostrarse que la operación $\bowtie$ está bien definida.

   c) Demuestre que $\bowtie$ coincide con la operación ordinaria de grupo sobre $\pi_1(G, e)$, calculando $(\alpha * \widehat{e}) \odot (\widehat{e} * \beta)$, donde $\widehat{e} \in \Omega(G, e)$ es el lazo constante en la identidad.

   d) Demuestre que $\pi_1(G, e)$ es abeliano.

8. Demuestre que si A es un retracto de D^2, es decir, si existe una retracción $r : D^2 \to A$, entonces toda aplicación continua $f : A \to A$ tiene un punto fijo.

9. En una categoría $\mathcal{C}$, un morfismo g es inyectivo si dados dos morfismos f_1, f_2 en $\mathcal{C}$ se satisface que $g \circ f_1 = g \circ f_2$ implica $f_1 = f_2$. Demuestre que esta noción de inyectividad coincide con la noción correspondiente, usualmente conocida, en la categoría **Set**.

10. En una categoría $\mathcal{C}$, un morfismo f es suprayectivo si dados dos morfismos g_1, g_2 en $\mathcal{C}$ se satisface que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ implica $g_1 = g_2$. Demuestre que esta noción de suprayectividad coincide con la noción correspondiente, usualmente conocida, en la categoría **Set**

11. Demuestre que los espacios de aplicaciones $M((I, \{0,1\}), (X, x_0))$ y $M((S^1, 1), (X, x_0))$ son homeomorfos.

Bibliografía

[1] Aguilar, Marcelo; Gitler, Samuel; Prieto, Carlos. *Topología Algebraica: un enfoque homotópico*. Mc Graw Hill, México 1998.

[2] Alexandroff, P. S. *Über die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Rümen*. Math. Ann. **92** (1924) 294-301

[3] Amor Montaño, José Alfredo. *Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias*. Facultad de Ciencias UNAM, México 2013.

[4] Amor Montaño, José Alfredo; Campero Arena, Gabriela; Miranda Perea Favio. *Teoría de Conjunto, Curso Intermedio*. Facultad de Ciencias UNAM, México 2014.

[5] Bourbaki, Nicolas. *General Topology I* Seire "Elements of Mathematics" . Hermann-Addison Wesley, London 1966.

[6] Bourbaki, Nicolas. *General Topology II* Seire "Elements of Mathematics" . Hermann-Addison Wesley, London 1966.

[7] Bryant, Victor. *Metric Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge 1985.

[8] Cartan, Henri. *Théorie des filtres*. CR Acad. Paris, **205** (1937) 595598.

[9] Cartan, Henri. *Filtres et ultrafiltres*. CR Acad. Paris, **205** (1937) 777-779.

[10] Casarrubias Segura, Fidel; Tamariz Marascarúa, Ángel. *Elementos de Topología General.* Aportaciones Matemáticas, Textos No. **37**, Sociedad Matemática Mexicana, México 2012.

[11] Čech, E. *On Bicompact Spaces.* Ann. Math, **38** (1937) 823-844.

[12] Copson, E. T. *Metric Spaces.* Cambridge University Press, Cambridge 1968.

[13] Croosley, Martin D. *Essential Topology.* Springen-Verlag, London 2005.

[14] Davis, Sheldon W. *Topology* Ma Graw Hill, Boston 2005.

[15] Devlin, Keith. *The joy of sets*, second edition. Springer-Verlag, Berlin 1993.

[16] Dugundji, James. *Topology.* Allyn and Bacon, Boston 1966.

[17] Enderton, Herbert B. *Elements of Set Theory.* Academic Press, London 1970.

[18] Engelking, Ryszard; Sieklucki, Karol. *Outline of General Topology.* American Elsevier Publishing Company, New York 1968.

[19] Engelking, Ryszard. *General Topology.* Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[20] Engelking, Ryszard; Sieklucki, Karol. *Topology: a geometric approach.* Heldermann Verlag, Berlin 1992.

[21] Freyd, Peter J.; Scedrov, Andre. *Categories, Allegories.* North-Holland, Netherlands 1989.

[22] Fulton, W. *Algebraic Topology: a firsto course.* Springer-Verlag, New York 1995.

[23] García Máynez, Adalberto. *Introducción a la Topología de Conjuntos.* Aportaciones Matemáticas, Textos No. **36**, Sociedad Matemática Mexicana, México 2011.

[24] García Máynez, Adalberto; Tamariz Mascarúa, Ángel. *Topología General.* Editorial Porrúa, México 1988.

[25] Gitler, Samuel. *Introducción a la Topología Algebriaca.* El Colegio Nacional, México 2013.

[26] Gómez Laveaga, Carmen. *Introducción a la Teoría Intuitiva de los Conjuntos.* Facultad de Ciencias UNAM, México 2007.

[27] Halmos, Paul R. *Naive Set Theory.* Springer-Verlag, Berlín 1974.

[28] Hernández Hernández, Fernando. *Teoría de Conjuntos. Una introducción.* Aportaciones Matemáticas Textos No. **13**, Sociedad Matemática Mexicana, México 2011.

[29] Hocking, John G.; Young, Gail S. *Topology.* Addyson-Wesley, London 1961.

[30] Hrbacek, Karel; Jech. Thomas. *Introduction to Set Theory.* third edition. Marcel Dekker, New York 1999.

[31] Hu, Sze-Tsen. *Introduction to General Topology.* Holden Day, San Francisco 1966.

[32] James, I. M. *General Topology and Homotopy Theoy.* Elsevier, Amsterdam, 1995.

[33] Jech, Thomas. *Set Theory*, third edition. Springer-Verlag, Berlin 2003.

[34] Kelley, John L. "The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice", *Fundamenta Mathematica*, Textos No. **37** (1950) 75-76.

[35] Kelley, John L. *General Topology.* Springer Verlag GTM no. 27, New York 1975.

[36] Kum, Sangho. "A correction of Kelley's proof on the equivalence between the Tychonoff product theorem and the axiom of choice", *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, vol. **16**, no. 2 (2003) 75-78.

[37] Kuratowski, Kazimierz. *Introduction to Set Theory and Topology.* Pergamon Press, New York 1961.

[38] Kuratowski, Kazimierz. *Topology.* Academic Press, New York 1966.

[39] Lawson, Terry. *Topology: a geometric approach.* Oxford University Press, Oxford 2003.

[40] Lawvere, F. William; Schanuel, Stephen. *Conceptual Mathematics: a first introduction to Categories.* Cambridge University Press, Cambridge 1997.

[41] McCarty, Goerge. *Topology: an introduction with application to topological groups.* Mc Graw Hill, New York 1967.

[42] Mac Lane, Saunders. *Categories for the Working Mathematician.* Springer-Verlag, Berlin 1971.

[43] Mamuzić, Zlatko P. *Introduction to General Topology.* Noordhoff Ltd., Netherlands 1963.

[44] Massey, W. S. *Algebraic Topology: an introduction.* Harcourt, Brace and World, New York 1967.

[45] May, Peter. *A concise course in Algebraic Topology.* Chicago University Press, Chicago 1999.

[46] Moore E. H.; Smith, H. L. *A General Theory of Limits.* Amer. J. Math. Soc. **17** (1916) 131-164.

[47] Munkres, James R. *Topology.* Prentice Hall, Massachusetts 1975.

[48] Simmons, George F. *Topology and Modern Analysis.* Mc Graw Hill, New York 1963.

[49] Sundström, Manya Raman. *A pedagogical history of compactness.* arXiv:1006.4131v1 (2010).

[50] Moore, Eliakim Hastings and Smith, Herman Lyle. *A general theory of limits*. Amer. J. Math. **44** (1922) 102-121.

[51] Pérez, Juan Antonio; de Ávila Martínez, Maribel. *El Anillo de Cobordismo de Thom*. Publicaciones Electrónicas, Cursos No. **1**, Sociedad Matemática Mexicana, México 2012.

[52] Pérez, Juan Antonio. *Teoría Cantoriana de los Conjuntos*. Publicaciones Electrónicas, Cursos No. **2**, Sociedad Matemática Mexicana, México 2012.

[53] Prieto, Carlos. *Topología Básica*. Fondo de Cultura Económica, México 2003.

[54] Salicrup, Graciela. *Introducción a la Topología*. Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas, Textos No. **1**, México 1993.

[55] Schubert, Horst. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston 1968.

[56] Shen, A.; Vereshchagin, N. K. *Basic Set Theory*. Student Mathematical Library **17**, American Mathematical Society, Rhode Island 2002.

[57] Spanier, Edwin H. *Algebraic Topology*. Mc Graw Hill, New York 1966.

[58] Tychonoff, A. N. *Über die topologische Erweiterung von Räumen*. Mathematische Annalen **102** (1930) 544-561.

[59] Vasiliev, V. A. *Introduction to Topology*. Student Mathematical Library **14**, American Mathematical Society, Rhode Island 2001.

[60] Whyburn, Gordon; Duda, Edwin. *Dynamic Topology*. Springer-Verlag, New York 1979.

[61] Willard, Stephen. *General Topology*. Addison-Wesley, Amsterdam 1968.

Índice alfabético

UAM - UAZ
Zacatecas, Zac., México
Tel. 922 99 75